PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2019-2020

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos

b) Este examen consta de 8 ejercicios.

c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.

d) Se realizarán únicamente **cuatro** ejercicios de los **ocho** ejercicios propuestos. Si se realizan más de cuatro ejercicios, solo se evaluarán los primeros cuatro ejercicios que aparezcan físicamente en el papel de examen.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=(5-x)e^{x-4}$. Determina los puntos de la gráfica de f cuya recta tangente tiene pendiente máxima.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(t)=\dfrac{1}{1+e^t}$

a) Calcula $\int f(t)\,dt$ (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $x=1+e^t$). **(1.5 puntos)**

b) Se define $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. Calcula $\lim_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}$ **(1 punto)**

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} -my+z=1 \\ 5x+2y+mz=0 \\ my+(m-3)z=-3 \end{cases}$.

a) Discute el sistema en función de m. **(1.25 puntos)**
b) Para $m = 0$, resuelve el sistema. Calcula, si es posible, una solución en la que $y = 5$. **(1.25 puntos)**

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera los puntos $A(1,0,1)$, $B(-1,0,2)$ y $O(0,0,0)$, y la recta $r\equiv\begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=2 \end{cases}$.

a) Calcula la distancia del punto A a la recta r. **(1.5 puntos)**
b) Determina el área del triángulo de vértices A, B y O. **(1 punto)**

PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2019-2020

MATEMÁTICAS II

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx-1,$$

tiene un punto crítico en $x=2$ y que la recta normal a su gráfica en el punto de abscisa $x=1$ es $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$. Calcula *a*, *b* y c.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Calcula $\int \cos(\ln x)\,dx$ (*ln* denota la función logaritmo neperiano).

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & m\\ m & 2 & -3\\ m-1 & 0 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$

a) Determina los valores de *m* para los que la ecuación $AX+B=C$ tiene solución única. **(1 punto)**
b) Para *m* = *0*, halla *X* tal que $AX+B=C$. **(1.5 puntos)**

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi\equiv 2x-y+z-3=0$, la recta $r\equiv\begin{cases}x=3+\lambda\\ y=1-2\lambda\\ z=-2-\lambda\end{cases}$ y el punto $P(1,1,2)$.

a) Determina la ecuación general del plano perpendicular a π, paralelo a *r* y que pasa por el punto *P*. **(1.25 puntos)**
b) Calcula el punto simétrico de *P* respecto de la recta *r*. **(1.25 puntos)**

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=(5-x)e^{x-4}$. Determina los puntos de la gráfica de f cuya recta tangente tiene pendiente máxima.

La pendiente de la recta tangente viene dada por la derivada de la función.

$$f'(x)=(-1)e^{x-4}+(5-x)e^{x-4}=(4-x)e^{x-4}$$

Buscamos los puntos críticos de la derivada calculando su derivada ($f''(x)$) e igualándola a 0.

$$f''(x)=(-1)e^{x-4}+(4-x)e^{x-4}=(3-x)e^{x-4}$$

$$f''(x)=0\Rightarrow(3-x)e^{x-4}=0\Rightarrow\begin{cases}e^{x-4}=0\rightarrow \text{¡Im } \textit{posible}\text{!}\\ 3-x=0\Rightarrow\boxed{x=3}\end{cases}$$

Comprobamos si en $x = 3$ hay un máximo de la derivada viendo si la derivada tercera es positiva o negativa.

$$f'''(x)=(-1)e^{x-4}+(3-x)e^{x-4}=(2-x)e^{x-4}\Rightarrow f'''(3)=(2-3)e^{3-4}=-e^{-1}<0$$

La pendiente de la recta tangente es máxima en $x = 3$.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(t)=\dfrac{1}{1+e^t}$

a) Calcula $\int f(t)\,dt$ (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $x=1+e^t$). **(1.5 puntos)**

b) Se define $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}$ **(1 punto)**

a) Calculamos la integral pedida.

$$\int f(t)\,dt=\int\frac{1}{1+e^t}\,dt=\left\{\begin{array}{l}x=1+e^t\to x-1=e^t\\ dx=e^t dt\\ dt=\dfrac{1}{e^t}dx=\dfrac{1}{x-1}dx\end{array}\right\}=\int\frac{1}{x}\frac{1}{x-1}dx=\int\frac{1}{x(x-1)}dx=\ldots$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{1}{x(x-1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}\Rightarrow\dfrac{1}{x(x-1)}=\dfrac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)}\Rightarrow 1=A(x-1)+Bx\Rightarrow\\ \Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=0\to 1=A(0-1)+0\to 1=-A\to A=-1\\ x=1\to 1=0+B\to B=1\end{array}\right.\Rightarrow\dfrac{1}{x(x-1)}=\dfrac{-1}{x}+\dfrac{1}{x-1}\end{array}}$$

$$\ldots=\int\frac{-1}{x}+\frac{1}{x-1}dx=\int\frac{-1}{x}dx+\int\frac{1}{x-1}dx=-\ln|x|+\ln|x-1|=-\ln\left(1+e^t\right)+\ln e^t=$$

$$=-\ln\left(1+e^t\right)+t=\boxed{t-\ln\left(1+e^t\right)+C}$$

b) Calculamos la expresión de *g(x)*.

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\left[t-\ln\left(1+e^t\right)\right]_0^x=\left[x-\ln\left(1+e^x\right)\right]-\left[0-\ln\left(1+e^0\right)\right]=x-\ln\left(1+e^x\right)+\ln 2$$

Pasamos a calcular el límite pedido.

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln\left(1+e^x\right)+\ln 2}{x}=\frac{0-\ln\left(1+e^0\right)+\ln 2}{0}=$$

$$=\frac{0}{0}=Indeterminación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{e^x}{1+e^x}+0}{1}=\lim_{x\to 0}1-\frac{e^x}{1+e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+e^x}=\frac{1}{1+e^0}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} -my+z=1 \\ 5x+2y+mz=0 \\ my+(m-3)z=-3 \end{cases}$.

a) Discute el sistema en función de *m*. **(1.25 puntos)**

b) Para *m = 0*, resuelve el sistema. Calcula, si es posible, una solución en la que *y = 5*. **(1.25 puntos)**

a) La matriz de coeficientes y la matriz ampliada asociada al sistema son:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -m & 1 \\ 5 & 2 & m \\ 0 & m & m-3 \end{pmatrix} \text{ y } A/B=\begin{pmatrix} 0 & -m & 1 & 1 \\ 5 & 2 & m & 0 \\ 0 & m & m-3 & -3 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & -m & 1 \\ 5 & 2 & m \\ 0 & m & m-3 \end{vmatrix}=0+0+5m-0+5m(m-3)-0=5m+5m^2-15m=5m^2-10m$$

$$|A|=0 \Rightarrow 5m^2-10m=0 \Rightarrow 5m(m-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{m=0} \\ m-2=0 \to \boxed{m=2} \end{cases}$$

Tenemos tres situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. Si $m \neq 0$ y $m \neq 2$

En este caso el determinante de *A* es no nulo y el rango de *A* es 3, al igual que el rango de *A/B* y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado**.

CASO 2. Si $m=0$

En este caso el determinante de *A* es nulo y el rango de *A* es menor de 3.
El sistema queda muy sencillo, intentamos resolverlo.

$$\begin{cases} z=1 \\ 5x+2y=0 \\ -3z=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{z=1} \\ 5x+2y=0 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow 5x+2y=0 \Rightarrow \boxed{x=-\frac{2}{5}y}$$

El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

CASO 3. Si $m=2$

En este caso el determinante de *A* es nulo y el rango de *A* es menor de 3.
El sistema queda muy sencillo, intentamos resolverlo.

$$\begin{cases} -2y+z=1 \\ 5x+2y+2z=0 \\ 2y-z=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=1+2y \\ 5x+2y+2z=0 \\ 2y-z=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+2y+2(1+2y)=0 \\ 2y-(1+2y)=-3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x+2y+2+4y=0 \\ 2y-1-2y=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+6y=-2 \\ -1=-3 \end{cases} \Rightarrow \text{¡Im}\textit{posible}\text{!}$$

Nos queda una ecuación imposible, por lo que el sistema es **incompatible** (sin solución).

b) Para $m = 0$ el sistema se ha resuelto en el apartado anterior y sus infinitas soluciones son:

$$x=-\frac{2}{5}\alpha;\ y=\alpha;\ z=1;\ \ \alpha\in\mathbb{R}$$

Obtenemos la solución para $y = 5$.

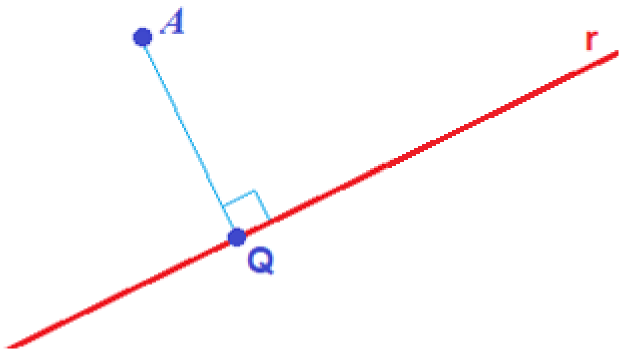
$$y=5 \Rightarrow x=-\frac{2}{5}\cdot 5=-2\ ;\ z=1 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=-2 \\ y=5 \\ z=1 \end{cases}}$$

<u>EJERCICIO 4</u> (2.5 puntos)

Considera los puntos $A(1,0,1)$, $B(-1,0,2)$ y $O(0,0,0)$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=2 \end{cases}$.

a) Calcula la distancia del punto *A* a la recta *r*. **(1.5 puntos)**
b) Determina el área del triángulo de vértices *A*, *B* y *O*. **(1 punto)**

a) Hallamos el punto *Q* del dibujo determinando el plano π perpendicular a la recta *r* y que contiene el punto *A*. Después hallamos el punto Q de corte de recta y plano.



El vector director de la recta $r \equiv \begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=2 \end{cases}$ es $\vec{v_r}=(-1,1,0)$

El plano π tendrá como vector normal el vector director de la recta.

$$\left.\begin{array}{l} A(1,0,1)\in\pi \\ \vec{n}=\vec{v_r}=(-1,1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A(1,0,1)\in\pi \\ \pi\equiv -x+y+D=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -1+0+D=0 \Rightarrow D=1 \Rightarrow \pi\equiv -x+y+1=0$$

Hallamos el punto de corte de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi\equiv -x+y+1=0 \\ r\equiv\begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=2 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow -(-1-\lambda)+\lambda+1=0 \Rightarrow 1+\lambda+\lambda+1=0 \Rightarrow 2\lambda=-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda=-1 \Rightarrow \begin{cases} x=-1-(-1)=0 \\ y=-1 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow Q(0,-1,2)$$

La distancia del punto *A* a la recta *r* es el módulo del vector $\overrightarrow{AQ}$.

$$\overrightarrow{AQ}=(0,-1,2)-(1,0,1)=(-1,-1,1)$$

$$\boxed{Dis\tan cia(A,r)=\left|\overrightarrow{AQ}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}\ u}$$

OTRA FORMA DE RESOLVER EL APARTADO a)

$$r \equiv \begin{cases} x = -1-\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P(-1,0,2) \in r \\ \overrightarrow{v_r} = (-1,1,0) \end{cases}$$

Hallamos el producto vectorial de $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{AP}$ y determinamos la distancia.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r} = (-1,1,0) \\ \overrightarrow{AP} = (-1,0,2)-(1,0,1) = (-2,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i + 2k + j = (1,2,1)$$

$$Dis\tan cia(A,r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|} = \frac{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}{\sqrt{(-1)^2+1^2+0}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{3}\,u}$$

b) Para determinar el área del triángulo de vértices A, B y O usamos la fórmula:

$$\acute{A}rea\ \ ABO = \frac{\left|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right|}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OA} = (1,0,1)-(0,0,0) = (1,0,1) \\ \overrightarrow{OB} = (-1,0,2)-(0,0,0) = (-1,0,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -j-2j = -3j = (0,-3,0)$$

$$\acute{A}rea\ \ ABO = \frac{\left|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right|}{2} = \frac{\sqrt{0^2+(-3)^2+0^2}}{2} = \boxed{\frac{3}{2}\,u^2}$$

EJERCICIO 5 **(2.5 puntos)**
Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx-1,$$

tiene un punto crítico en $x=2$ y que la recta normal a su gráfica en el punto de abscisa $x=1$ es $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$. Calcula a, b y c.

Si la función tiene un punto crítico en $x=2$ la derivada debe anularse → $f'(2)=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3ax^2+2bx+c \\ f'(2)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=3a(2)^2+2b(2)+c=12a+4b+c\Rightarrow \boxed{12a+4b+c=0}$$

La pendiente de la recta normal en $x=1$ es $-\frac{1}{f'(1)}$, como la recta normal es $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ tiene pendiente $\frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{2}\Rightarrow -2=f'(1) \\ f'(x)=3ax^2+2bx+c \end{array}\right\} \Rightarrow -2=f'(1)=3a(1)^2+2b(1)+c\Rightarrow \boxed{-2=3a+2b+c}.$$

La recta normal en $x=1$ y la función en $x=1$ deben coincidir.

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \\ f(x)=ax^3+bx^2+cx-1 \\ \text{Coinciden en } x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{3}{2}=a+b+c-1\Rightarrow 2=a+b+c-1\Rightarrow \boxed{a+b+c=3}$$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 12a+4b+c=0 \\ 3a+2b+c=-2 \\ a+b+c=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 12a+4b+c=0 \\ 3a+2b+c=-2 \\ a=3-b-c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 12(3-b-c)+4b+c=0 \\ 3(3-b-c)+2b+c=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 36-12b-12c+4b+c=0 \\ 9-3b-3c+2b+c=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -8b-11c=-36 \\ -b-2c=-11 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -8b-11c=-36 \\ b=11-2c \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8(11-2c)-11c=-36\Rightarrow -88+16c-11c=-36\Rightarrow 5c=52\Rightarrow \boxed{c=\frac{52}{5}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b=11-2\frac{52}{5}=11-\frac{104}{5}=\frac{-49}{5}} \Rightarrow \boxed{a=3+\frac{49}{5}-\frac{52}{5}=\frac{15+49-52}{5}=\frac{12}{5}}$$

Los valores buscados son $a=\frac{12}{5}$, $b=\frac{-49}{5}$ y $c=\frac{52}{5}$.

EJERCICIO 6 **(2.5 puntos)**

Calcula $\int \cos(\ln x)\,dx$ (*ln* denota la función logaritmo neperiano).

$$\int \cos(\ln x)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \cos(\ln x) \to du = -sen(\ln x)\frac{1}{x}dx \\ dv = dx \to v = x \end{array} \right\} =$$

$$= x\cos(\ln x) - \int x\left(-sen(\ln x)\frac{1}{x}\right)dx = x\cos(\ln x) + \int sen(\ln x)\,dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = sen(\ln x) \to du = \cos(\ln x)\frac{1}{x}dx \\ dv = dx \to v = x \end{array} \right\} = x\cos(\ln x) + x\cdot sen(\ln x) - \int x\cos(\ln x)\frac{1}{x}dx =$$

$$= x\cos(\ln x) + x\cdot sen(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx$$

Hemos obtenido que $\int \cos(\ln x)\,dx = -sen(\ln x) + x\cdot sen(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx$. Juntamos las dos integrales y determinamos el valor de la integral pedida.

$$\int \cos(\ln x)\,dx = x\cdot\cos(\ln x) + x\cdot sen(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \cos(\ln x)\,dx + \int \cos(\ln x)\,dx = x\cdot\cos(\ln x) + x\cdot sen(\ln x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\int \cos(\ln x)\,dx = x\cdot\cos(\ln x) + x\cdot sen(\ln x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \cos(\ln x)\,dx = \frac{x\cdot\cos(\ln x) + x\cdot sen(\ln x)}{2} = \frac{x}{2}\cdot\cos(\ln x) + \frac{x}{2}\cdot sen(\ln x) + C}$$

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & m\\ m & 2 & -3\\ m-1 & 0 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$

a) Determina los valores de *m* para los que la ecuación $AX+B=C$ tiene solución única. **(1 punto)**

b) Para *m = 0*, halla *X* tal que $AX+B=C$. **(1.5 puntos)**

a) Transformamos la ecuación en un sistema de ecuaciones: $AX+B=C\Rightarrow AX=C-B$
Para que tenga solución única la matriz *A* debe tener rango 3 y para ello el determinante de *A* debe ser no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & m\\ m & 2 & -3\\ m-1 & 0 & 4\end{vmatrix}=8+3m-3-2m(m-1)+4m=8+3m-3-2m^2+2m+4m$$

$$\left.\begin{array}{l}|A|=-2m^2+9m+5\\ |A|=0\end{array}\right\}\Rightarrow -2m^2+9m+5=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m=\frac{-9\pm\sqrt{9^2-4(-2)(5)}}{2(-2)}=\frac{-9\pm 11}{-4}=\begin{cases}m=\dfrac{-9+11}{-4}=\dfrac{2}{-4}=\dfrac{-1}{2}\\[2ex] m=\dfrac{-9-11}{-4}=\dfrac{-20}{-4}=5\end{cases}$$

Para cualquier valor de *m* distinto de $\frac{-1}{2}$ y de 5 la ecuación $AX+B=C$ tiene solución única.

b) Para *m = 0* la matriz A queda $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -3\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

Despejamos X en la ecuación.

$$AX+B=C\Rightarrow AX=C-B\Rightarrow X=A^{-1}(C-B)$$

Calculamos la inversa de la matriz *A*.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -3\\ -1 & 0 & 4\end{vmatrix}=8-3=5\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & -3 & 4\end{pmatrix}}{5}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 0 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & -3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & -1\\ -3 & 4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la ecuación y hallamos la expresión de la matriz X.

$$C - B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -16+8-6 \\ -6+8-6 \\ -4+2-4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -14 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14/5 \\ -4/5 \\ -6/5 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera el plano $\pi \equiv 2x - y + z - 3 = 0$, la recta $r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$ y el punto $P(1,1,2)$.

a) Determina la ecuación general del plano perpendicular a π, paralelo a *r* y que pasa por el punto *P*. **(1.25 puntos)**

b) Calcula el punto simétrico de *P* respecto de la recta *r*. **(1.25 puntos)**

a) El plano π´ perpendicular a π y paralelo a *r* tiene como vectores directores el vector normal del plano π y el vector director de la recta *r*.

$$\pi \equiv 2x - y + z - 3 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2,-1,1)$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \Rightarrow \vec{v_r} = (1,-2,-1) \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$$

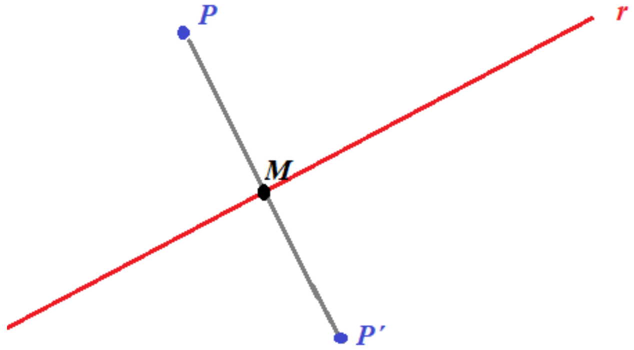
$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = \vec{n} = (2,-1,1) \\ \vec{v} = \vec{v_r} = (1,-2,-1) \\ P(1,1,2) \in \pi´ \end{array}\right\} \Rightarrow \pi´ \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 1 + y - 1 - 4(z-2) + z - 2 + 2y - 2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 1 + y - 1 - 4z + 8 + z - 2 + 2y - 2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x + 3y - 3z = 0 \Rightarrow \boxed{\pi´ \equiv x + y - z = 0}$$

b) Nos piden hallar el punto P´ del dibujo.



Hallamos el plano π perpendicular a la recta que pasa por el punto *P*. Este plano tiene como vector normal el vector director de la recta *r*.

Hallamos la ecuación del plano π.

$$\left.\begin{array}{l} P(1,1,2) \in \pi \\ \vec{n} = \vec{v_r} = (1,-2,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P(1,1,2) \in \pi \\ \pi \equiv x - 2y - z + D = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 - 2 - 2 + D = 0 \Rightarrow D = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv x - 2y - z + 3 = 0$$

Hallamos el punto M de corte de la recta r y el plano π.

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv x-2y-z+3=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=-2-\lambda \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow 3+\lambda-2(1-2\lambda)-(-2-\lambda)+3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3+\lambda-2+4\lambda+2+\lambda+3=0 \Rightarrow 6\lambda+6=0 \Rightarrow \lambda=-1 \Rightarrow \begin{cases} x=3-1=2 \\ y=1+2=3 \\ z=-2+1=-1 \end{cases} \Rightarrow M(2,3,-1)$$

El punto M tiene coordenadas $M(2,3,-1)$.

El punto $P´$ se obtiene al sumarle al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$.

$$\overrightarrow{PM}=(2,3,-1)-(1,1,2)=(1,2,-3)$$
$$P´=M+\overrightarrow{PM}=(2,3,-1)+(1,2,-3)=(3,5,-4)$$

El punto $P´$ simétrico de P respecto de la recta r tiene coordenadas $P´(3,5,-4)$