MATEMÁTICAS II–SOLUCIONES
(Documento de trabajo orientativo)

A.1.

a) $|A| = 0 \Rightarrow k = \pm 2$
• $si\ k \neq \{\pm 2\} \Rightarrow \mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(A') = n = 3 \Rightarrow SCD.$
• $si\ k = 2 \Rightarrow \mathrm{rg}\,(A) = 2 = \mathrm{rg}\,(A') < 3 \Rightarrow SCI.$
• $si\ k = -2 \Rightarrow \mathrm{rg}\,(A) = 2 = \mathrm{rg}\,(A') < 3 \Rightarrow SCI.$

b) Si $k = -3$, tenemos un SCD cuya solución es $(x, y, z) = (-2, 1, 2)$.

A.2.

a) La derivada de f es $f'(x) = -x \operatorname{sen} x$, que es negativa en $(0, \pi/2)$. Por tanto, f es estrictamente decreciente en $(0, \pi/2)$. Como $f(0) = 1/2$ y $f(\pi/2) = -1/2$ y f es continua, el Teorema de Bolzano permite afirmar que existe un valor $c \in [0, \pi/2]$ tal que $f(c) = 0$. Al ser f estrictamente decreciente en el intervalo, dicho valor c es único.
b)

$$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \operatorname{sen} x + x \cos x\right) dx = \left[\frac{x}{2} + 2\cos x + x \operatorname{sen} x\right]_0^{\pi/2} = \frac{3\pi - 8}{4} = \frac{3\pi}{4} - 2.$$

A.3.

a) $\overrightarrow{AB} = (3, 2, 1),\ \ \overrightarrow{AC} = (-1, 1, 1),\ \ \overrightarrow{BC} = (-4, -1, 0)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow \text{ el ángulo correspondiente al vértice } A \text{ es recto}$$

Luego los catetos son los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ y la hipotenusa el segmento $\overline{BC}$. De manera alternativa se puede comprobar mediante el teorema de Pitágoras:

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = 14,\ \ |\overrightarrow{AC}|^2 = 3,\ \ |\overrightarrow{BC}|^2 = 17 \Rightarrow |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2$$

b) El vector característico de π es el producto vectorial de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, $\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1, -4, 5)$. Considerando cualquiera de los puntos (por ejemplo A), la ecuación del plano es

$$\pi \equiv x - 4(y + 4) + 5(z - 2) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x - 4y + 5z - 26 = 0}$$

c) La recta que pasa por B y C es $r \equiv (x, y, z) = (3, -2, 3) + \lambda(4, 1, 0)$. El plano perpendicular a dicha recta, que pasa por el punto A es $4x + y = -4$. En consecuencia, la proyección A'' del punto A sobre la recta r es la intersección de r con el plano normal,

$$4(3 + 4\lambda) + (-2 + \lambda) = -4 \Rightarrow \lambda = -\frac{14}{17} \Rightarrow A''\left(\frac{-5}{17}, \frac{-48}{17}, 3\right).$$

Como el punto simétrico A' verifica que $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AA''}$, tenemos que $A' = A + 2\overrightarrow{AA''} = \left(\frac{-10}{17}, \frac{-28}{17}, 4\right)$.

A.4.

a) $P(\text{“Múltiplos de 3”}) = \frac{6}{20} \cdot \frac{5}{19} = \frac{3}{38}$
b) $P(\text{“Primero múltiplo de 6 y segundo múltiplo de 3”}) = \frac{3}{20} \cdot \frac{5}{19} = \frac{3}{76}$
c) $P(\text{“Los dos impares”}) = \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} = \frac{9}{38}$
d) $P(\text{“Impar el segundo”}|\text{“Impar el primero”}) = \frac{9/38}{1/2} = \frac{9}{19}$

B.1.

a) Utilizando propiedades del determinante del producto de matrices $\det(A) = \det(C) = \boxed{6}$.

b) $BCB^{-1} = BC \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 5/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}}$

c) $BC = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Resolviendo el sistema $BC \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, la solución es $\boxed{x = 2, y = \frac{1}{2}, z = 0}$.

B.2.

a) Por el Teorema de Pitágoras, altura $= \sqrt{x^2 - (x/2)^2} = x(\sqrt{3}/2)$

b) Si denotamos por x, y las longitudes de los lados del rectángulo, usando el resultado anterior tenemos que Área $= xy + x^2(\sqrt{3}/4)$. Por otro lado, $4x + 2y = 10$, de modo que $y = 5 - 2x$, y resulta que tenemos que calcular el máximo de la función $f(x) = x(5 - 2x) + x^2(\sqrt{3}/4) = 5x - (2 - \sqrt{3}/4)x^2$ para $x \in [0, 5/2]$. Derivando, $f'(x) = 5 - 2(2 - \sqrt{3}/4)x$, por lo que f es creciente en $\left(0, \frac{5}{4 - (\sqrt{3}/2)}\right)$ y decreciente en $\left(\frac{5}{4 - (\sqrt{3}/2)}, \frac{5}{2}\right]$, y por tanto alcanza el máximo en $x_M = \frac{5}{4 - (\sqrt{3}/2)} \approx 1.59542$. El valor correspondiente para y será $y_M = 5 - 2x_M \approx 1.80916$. Tenemos que cortar la barra original en cuatro trozos de longitud x_M y dos trozos de longitud y_M.

B.3.

a) Un punto genérico de s es de la forma $(\frac{1}{4} - a, \frac{1}{4} + a, \frac{1}{2})$, y no cumple las ecuaciones de r. Las rectas se cruzan.

b) Un vector director de r es $\vec{v}_r = (1, 0, 1)$ y un punto de r es $P(1, 2, 1)$. Un vector director de s es $\vec{v}_s = (-1, 1, 0)$ y un punto de s es $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$. Un vector perpendicular a r y s es $\vec{w} = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = (-1, -1, 1)$.
El plano pedido, que contiene a r y tiene a $\vec{w}$ en su subespacio director, es:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = x - 2y - z + 4 = 0.$$

c) La recta solución es la intersección del plano obtenido en el apartado anterior y del plano que contiene a s y tiene a $\vec{w}$ en su subespacio director, que es: $\begin{vmatrix} x - \frac{1}{4} & y - \frac{1}{4} & z - \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = x + y + 2z - \frac{3}{2} = 0.$

La recta pedida es, por tanto, $\left\{ \begin{array}{l} x - 2y - z + 4 = 0 \\ x + y + 2z - \frac{3}{2} = 0 \end{array} \right.$.

B.4.

a)

$$0.8 = P(X \leq 3693) = P\left(\frac{X - 3353}{\sigma} \leq \frac{3693 - 3353}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{340}{\sigma}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{340}{\sigma} \approx 0.84 \Rightarrow \boxed{\sigma \approx 404.76 \text{ gramos}}.$$

b) Tenemos una distribución simétrica respecto de su media $\mu = 3353$. Sabemos que $P(X > 3693) = 0.2$. Como $3693 = \mu + 340$ y la distribución es simétrica, resulta que $P(X < \mu - 340) = 0.2$, es decir $P(X < 3013) = 0.2$. Por tanto, el valor buscado es $x_0 = 3013$ gramos.