MATEMÁTICAS II

SOLUCIONES

(Documento de trabajo orientativo)

A.1.

a) La inversa existe si el determinante no es nulo: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 - m \neq 0$

Por tanto A es invertible siempre que $m \neq -1$ y en estos casos su matriz inversa es: $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\mathrm{Adj}(A^T)$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & m & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathrm{Adj}(A^T) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -m & -1 & m \\ -1 & 1 & -m \end{pmatrix} \implies \boxed{A^{-1} = \frac{1}{m+1}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ m & 1 & -m \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix}}$$

b) Para $m \neq -1$ el sistema es compatible determinado. Para $m = -1$ se trata de un sistema incompatible, ya que $\mathrm{rg}\,(A) = 2$ y $\mathrm{rg}\,(A|B) = 3$.

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right) \to \boxed{\begin{cases} x = 1/3 \\ y = 1/3 \\ z = -1/3 \end{cases}}$

A.2.

a) $C = 105x^2 + 100 \cdot xy$ (en euros); $\Rightarrow y = \frac{C - 105x^2}{100x}$ (en metros).
b) $C = 1260$: $V(x) = \frac{1260x - 105x^3}{100}$ es máximo para $x = 2$; $V_{\text{máx}} = 16.8\,\mathrm{m}^3$.

A.3.

a) La ecuación paramétrica de la recta, r, que pasa por el punto $(0, 0, 0)$ y tiene como vector director $(1, 1, -1)$ es $(x, y, z) = (\lambda, \lambda, -\lambda)$.
b) El plano π tendrá como vector normal $\overrightarrow{N} = (1, 1, -1)$ además pasa por el punto $(0, 0, 0)$, eso nos lleva a que su ecuación implícita es $x + y - z = 0$.
c) La distancia de de P_1 a π será el $|\overrightarrow{N}| = \sqrt{3}$.

A.4.

- $P(\text{“Dos rojos”}) = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) + P(V_1 \cap R_2 \cap R_3) = \dfrac{6}{10}\dfrac{5}{15}\dfrac{4}{14} + \dfrac{4}{10}\dfrac{4}{15}\dfrac{3}{14} = \dfrac{2}{25}$.
- $P(\text{“Dos verdes”}) = P(R_1 \cap V_2 \cap V_3) + P(V_1 \cap V_2 \cap V_3) = \dfrac{6}{10}\dfrac{10}{15}\dfrac{9}{14} + \dfrac{4}{10}\dfrac{11}{15}\dfrac{10}{14} = \dfrac{7}{15}$.
- $P(\text{“Mismo color”}) = \dfrac{2}{25} + \dfrac{7}{15} = \dfrac{41}{75} \approx 0.546667$.

B.1.

Sean x: kilogramos de café Gold Cuvée, y: kilogramos de café Paradiso y z: kilogramos de café Cremissimo. Estas variables deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 7.85x + 13.3y + 24.85z & = & 3112.5 \\ 0.1x + 0.15y + 0.2z & = & 27.1 \\ 2(x+y) & = & z \end{array}\right.$$

Su solución es $(x, y, z) = (30, 22, 104) \Rightarrow 0.9 \cdot 30 + 0.85 \cdot 22 + 0.8 \cdot 104 = 128.9$.
Por tanto, se han utilizado 128.9 kilogramos de grano del tipo Arábica.

B.2.

a) $(x-2)^2$ es un polinomio, continuo y derivable en todo el eje real. $\sqrt[5]{x}$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$. Luego $f(x)$, como composición de ambas, es continua en la recta real, y derivable para todo $x \in \mathbb{R}$ excepto en $x = 2$.
b) $f'(x) = \frac{2}{5}(x-2)^{-3/5}$ si $x \neq 2$, luego la función es decreciente en $[-2, 2)$ y creciente en $(2, 4]$. Por tanto, tiene un mínimo relativo y absoluto en $(2, 0)$, y el máximo debe alcanzarse en alguno de los extremos del intervalo de definición. De hecho, el máximo absoluto se alcanza en $(-2, \sqrt[5]{(-4)^2})$.
c) $f'(2)$ no existe, al no ser finito $\lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)^{2/5} - 0}{x-2}$. Luego $g(x) = f'(x)$ no es continua ni derivable en $x = 2$ y por tanto no posee recta tangente en dicho punto.

B.3.

a) El láser sigue una trayectoria recta de ecuación $(x, y, z) = (2, 3, -5) + \lambda(-1, -2, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. La intersección con el plano $3x - 2y - 2z = 1$ se produciría para λ solución de $3(2+\lambda) - 2(3+2\lambda) + 2(-5-2\lambda) = 1$, es decir, $\lambda = 3$. El punto de impacto es, pues, $(-1, -3, 1)$.
b) El ángulo α entre el láser y el plano verifica que

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{|(-1, -2, 2) \cdot (3, -2, -2)|}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2}\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{17}}{17}.$$

Por tanto, $\alpha \approx 14.06^o$ y no se produce perforación.
c) El segundo rayo se lanzaría desde el punto P' simétrico a P respecto al plano π. Para hallar P', calculamos el punto $O = \pi \cap \{P + \mu(3, -2, -2)\}$, es decir, $3(2+3\mu) - 2(3-2\mu) - 2(-5-2\mu) = 1$, $\mu = -9/17$. Puesto que $\overrightarrow{PP'} = 2\overrightarrow{PO}$, obtenemos que P' está en la recta $P + \mu(3, -2, -2)$ para el valor $\mu = -18/17$, es decir, $P'\left(\frac{-20}{17}, \frac{87}{17}, \frac{-49}{17}\right)$.

B.4.

a) $(1 - 3/5)^4 = (2/5)^4 = 0.0256$.
b) Se trata de una binomial $B(4; 3/5) = B(4; 0.6)$, luego

$$P(X = 3) + P(X = 4) = \binom{4}{3}(0.6)^3(0.4)^1 + \binom{4}{4}(0.6)^4(0.4)^0 = 0.4752.$$

c) En n disparos, la probabilidad de marcar será $1 - 0.4^n$; para que supere a 0.999 habrá de cumplirse que $1 - 0.4^n > 0.999$; $0.4^n < 0.001$; $n \geq \ln(0.001)/\ln(0.4) > 7.5$. Habrá que lanzar al menos 8 disparos.