Universidad Zaragoza 1542

PRUEBAS DE ACCESO PARA MAYORES DE 25 AÑOS
CONVOCATORIA DE MARZO DE 2023
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

A1. a) *(1,5 puntos)* Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x}{e^x+1}, & x\le 0 \\ x^2+a, & x>0 \end{cases}$, obtener los valores a para los cuales f es una función continua

b) *(1 punto)* Calcular los siguientes límites

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+2^x}{2^x}\right)^{2^x}$, ii) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-4}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}\right)$

A2. Para la función $f(x)=\dfrac{3x^3-3}{x^2-x}$,

a) *(1,75 puntos)* Calcular su dominio, sus asíntotas y obtener sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) *(0,75 puntos)* Obtener la integral $\displaystyle\int \frac{xf(x)}{3}dx$

A3. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & b \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y b un número real.

a) *(0,75 puntos)* Calcular el rango de A en función de los valores del parámetro b.

b) *(1 punto)* Para $b = 0$ obtener la inversa de A.

c) *(0,75 puntos)* Estudiar para qué valores de b el determinante de la matriz $2A$ es 24.

A4. Para las personas contagiadas por un virus, la prueba PGR da positivo en el 80% de las ocasiones, y entre las personas libres del virus la prueba PGR da positivo el 15% de las ocasiones.

a) *(1,25 puntos)* Los epidemiólogos creen que el 2% de la población total está contagiada. ¿Qué proporción de positivos se espera obtener si se hacen pruebas PGR de forma indiscriminada a toda una gran ciudad?

b) *(1,25 puntos)* Calcular la probabilidad de que una persona con test PGR positivo sea realmente una persona sana (libre de virus).

OPCIÓN B

B1. *(2,5 puntos)* Hallar los valores de *a*, *b*, *c* para que la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ pase por el punto (3, 9) y tenga un punto de inflexión en $\left(\frac{2}{3},\frac{-16}{27}\right)$.

B2. Sea $f(x)=sen(3x)$

a) *(1 punto)* Para la función $h(x)=\left(f(x)\right)^3$, calcular $h'(x)$ y $h''(x)$.

b) *(1,5 puntos)* Obtener $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 9\left(f(x)\right)^2\cos(3x)\,dx$

B3. *(2,5 puntos)* Discutir, según los valores del parámetro real *a*, cuándo existe una, ninguna o infinitas soluciones del sistema $\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ ax+y+z=2+3a \\ 2x+y+az=4-2a \end{cases}$. Resolverlo para $a=0$.

B4.

La variable *x* recoge la duración total en minutos que dura el trayecto en coche desde el punto A al punto B de una gran ciudad. La variable *y* recoge los minutos que el coche está parado (por semáforos o congestión de tráfico).

x	9	11	13	15	17	19	21
y	0	2	3	5	6	8	11

a) *(1,25 puntos)* Calcula la recta de regresión que permite ajustar los minutos que está parado el coche (*y*) en función de la duración total (*x*).

b) *(1,25 puntos)* Calcula el R^2 de la regresión y los minutos que indica la recta que el coche ha estado parado si la duración total del trayecto ha sido 25 minutos.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

A1. a) *(1,5 puntos)* Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x}{e^x+1}, & x\le 0\\ x^2+a, & x>0\end{cases}$, obtener los valores *a* para los cuales f es una función continua

b) *(1 punto)* Calcular los siguientes límites

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+2^x}{2^x}\right)^{2^x}$, ii) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-4}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}\right)$

a) Para que la función sea continua debe serlo en *x = 0*.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\dfrac{e^0}{e^0+1}=\dfrac{1}{2}\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{1}{2}\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2+a=a\\ f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{a=\dfrac{1}{2}}$$

La función es continua para $a=\dfrac{1}{2}$.

b)

i) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+2^x}{2^x}\right)^{2^x}=(1)^{+\infty}=Indeterminación=e^{\lim\limits_{x\to\infty}2^x\left(\frac{1+2^x}{2^x}-1\right)}=\ldots$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}2^x\left(\frac{1+2^x}{2^x}-1\right)=\lim_{x\to\infty}2^x\left(\frac{1+2^x-2^x}{2^x}\right)=\lim_{x\to\infty}2^x\left(\frac{1}{2^x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{2^x}=1}$$

$$\ldots=e^1=\boxed{e}$$

ii) $$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}\right)=\frac{4-4}{\sqrt{2}-\sqrt{2}}=\frac{0}{0}=Indeterminación\left(L´Hôpital\right)=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{2x}{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right)=\frac{4}{-\frac{1}{2\sqrt{2}}}=\boxed{-8\sqrt{2}}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)(x+2)}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}\right)=\{Racionalizamos\}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{2}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{x}\right)}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{2}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{2}+\sqrt{x}\right)}{2-x}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{(-1)\cancel{(2-x)}(x+2)\left(\sqrt{2}+\sqrt{x}\right)}{\cancel{2-x}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left((-1)(x+2)\left(\sqrt{2}+\sqrt{x}\right)\right)=(-1)(2+2)\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)=-4\cdot 2\sqrt{2}=\boxed{-8\sqrt{2}}$$

A2. Para la función $f(x)=\dfrac{3x^3-3}{x^2-x}$,

a) *(1,75 puntos)* Calcular su dominio, sus asíntotas y obtener sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) *(0,75 puntos)* Obtener la integral $\displaystyle\int \frac{xf(x)}{3}dx$

a) Su dominio son todos los reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-1=0 \rightarrow x=1 \end{cases}$$

Dominio = $\mathbb{R}-\{0,1\}$ **.**

Asíntotas verticales. $x=a$

¿ $x=0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{3x^3-3}{x^2-x}=\frac{-3}{0}=\infty$$

$x=0$ es asíntota vertical.

¿ $x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{3x^3-3}{x^2-x}=\frac{0}{0}=Indeterminación=\lim_{x\to 1}\frac{3(x^3-1)}{x(x-1)}=\dots$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \lfloor 0 \end{array} \Rightarrow x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

$$\dots=\lim_{x\to 1}\frac{3\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{x\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x^2+x+1)}{x}=\frac{9}{1}=9\neq\infty$$

$x=1$ **no** es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-3}{x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}3x=\infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^3-3}{x^2-x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-3}{x\left(x^2-x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-3}{x^3-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}}=3$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-3}{x^2-x}-3x=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-3-3x^3+3x^2}{x^2-x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-3}{x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2}=3$$

La asíntota oblicua es $y=3x+3$.

La función tiene una asíntota vertical $x=0$ y una asíntota oblicua $y=3x+3$.

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento usamos la derivada. Antes de derivar simplificamos la expresión de la función.

$$f(x)=\frac{3x^3-3}{x^2-x}=\frac{3\cancel{(x-1)}\left(x^2+x+1\right)}{x\cancel{(x-1)}}=\frac{3\left(x^2+x+1\right)}{x}$$

$$f'(x)=\frac{3(2x+1)(x)-(1)3\left(x^2+x+1\right)}{x^2}=\frac{6x^2+3x-\left(3x^2+3x+3\right)}{x^2}=$$

$$=\frac{6x^2+3x-3x^2-3x-3}{x^2}=\frac{3x^2-3}{x^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{3x^2-3}{x^2}=0\Rightarrow 3\left(x^2-1\right)=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm1$$

Analizamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores y los valores excluidos del dominio.

En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomamos *x = –2* y la derivada vale $f'(-2)=\frac{3(-2)^2-3}{(-2)^2}=\frac{9}{4}>0$.

La función crece en $(-\infty,-1)$.

En el intervalo $(-1,0)$ tomamos *x = –0.5* y la derivada vale

$f'(-0.5)=\frac{3(-0.5)^2-3}{(-0.5)^2}=\frac{-2.25}{0.25}<0$. La función decrece en $(-1,0)$.

En el intervalo $(0,1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale

$f'(0.5)=\frac{3(0.5)^2-3}{(0.5)^2}=\frac{-2.25}{0.25}<0$. La función decrece en $(0,1)$.

En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2)=\frac{3(2)^2-3}{(2)^2}=\frac{9}{4}>0$. La función crece en $(1,+\infty)$.

La función crece en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y decrece en $(-1,0)\cup(0,1)$.

b)

$$\int \frac{xf(x)}{3}dx=\int \frac{x\frac{3x^3-3}{x^2-x}}{3}dx=\int \frac{\cancel{x}\frac{3(x^3-1)}{\cancel{x}(x-1)}}{3}dx=\int \frac{3(x^3-1)}{3(x-1)}dx=\int \frac{x^3-1}{x-1}dx=$$

$$=\int \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{x-1}}dx=\int x^2+x+1dx=\boxed{\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+K}$$

A3. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 4 & 2 & b\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y b un número real.

a) *(0,75 puntos)* Calcular el rango de A en función de los valores del parámetro b.
b) *(1 punto)* Para $b = 0$ obtener la inversa de A.
c) *(0,75 puntos)* Estudiar para qué valores de b el determinante de la matriz $2A$ es 24.

a) Veamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 4 & 2 & b\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=2+b+0-0+4+0=6+b$$

$$|A|=0\Rightarrow 6+b=0\Rightarrow b=-6$$

Analizamos dos situaciones diferentes.

Si $b=-6$.
En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Vemos si es 2.

La matriz queda $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 4 & 2 & -6\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª → $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=2+4=6\neq 0$. El rango de A es 2.

Si $b\neq -6$
En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3.

El rango de A es 3 si $b\neq -6$ y es 2 si $b=-6$.

b) Para $b = 0$ la matriz queda $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 4 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y su determinante vale

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 4 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=2+4=6\neq 0.$$

Calculamos su inversa.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 4 & -1\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}{6}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}4 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 4\\ 0 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}4 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 4\\ -1 & 2\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & 0 \\ -2/3 & 1/6 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 1 \end{pmatrix}}$$

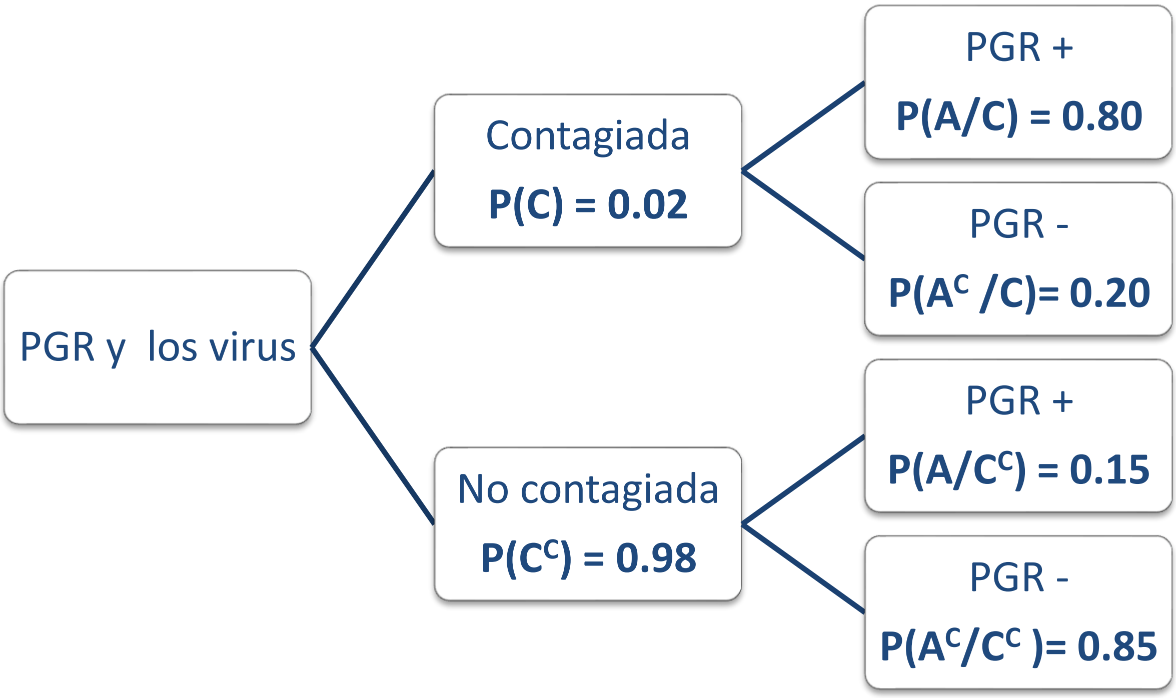
c) $2A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 8 & 4 & 2b \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$|2A|=\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 8 & 4 & 2b \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=16+8b+32=48+8b$$

$$|2A|=24 \Rightarrow 48+8b=24 \Rightarrow 8b=-24 \Rightarrow \boxed{b=\frac{-24}{8}=-3}$$

A4. Para las personas contagiadas por un virus, la prueba PGR da positivo en el 80% de las ocasiones, y entre las personas libres del virus la prueba PGR da positivo el 15% de las ocasiones.
a) *(1,25 puntos)* Los epidemiólogos creen que el 2% de la población total está contagiada. ¿Qué proporción de positivos se espera obtener si se hacen pruebas PGR de forma indiscriminada a toda una gran ciudad?
b) *(1,25 puntos)* Calcular la probabilidad de que una persona con test PGR positivo sea realmente una persona sana (libre de virus).

Realizamos un diagrama de árbol.
Llamamos C al suceso "Estar contagiado del virus" y A al suceso "Dar positivo en la prueba PGR".



a) Nos piden calcular la probabilidad de dar positivo $P(A)$.

$$P(A)=P(A\cap C)+P(A\cap C^C)=P(C)P(A/C)+P(C^C)P(A/C^C)=$$

$$=0.02\cdot 0.80+0.98\cdot 0.15=\frac{163}{1000}$$

Habrá una proporción de 163 positivos por cada mil habitantes.

b) Nos piden calcular $P(C^C/A)$. Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(C^C/A)=\frac{P(C^C\cap A)}{P(A)}=\frac{P(C^C)P(A/C^C)}{P(A)}=\frac{0.98\cdot 0.15}{\frac{163}{1000}}=\boxed{\frac{147}{163}\simeq 0.902}$$

OPCIÓN B

B1. *(2,5 puntos)* Hallar los valores de a, b, c para que la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ pase por el punto (3, 9) y tenga un punto de inflexión en $\left(\frac{2}{3},\frac{-16}{27}\right)$.

La función tiene un punto de inflexión en $\left(\frac{2}{3},\frac{-16}{27}\right) \rightarrow f''\left(\frac{2}{3}\right)=0$.

$$f'(x)=3x^2+2ax+b \Rightarrow f''(x)=6x+2a$$

$$f''\left(\frac{2}{3}\right)=0 \Rightarrow 0=6\frac{2}{3}+2a \Rightarrow 0=4+2a \Rightarrow 2a=-4 \Rightarrow \boxed{a=\frac{-4}{2}=-2}$$

La función queda $f(x)=x^3-2x^2+bx+c$.

La función $f(x)=x^3-2x^2+bx+c$ pasa por el punto (3, 9) $\rightarrow$ *f(3) = 9*.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3-2x^2+bx+c \\ f(3)=9 \end{array}\right\} \Rightarrow 9=3^3-2\cdot 3^2+3b+c \Rightarrow 9=27-18+3b+c=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0=3b+c \Rightarrow \boxed{c=-3b}$$

La función queda $f(x)=x^3-2x^2+bx-3b$

La función $f(x)=x^3-2x^2+bx-3b$ pasa por el punto $\left(\frac{2}{3},\frac{-16}{27}\right) \rightarrow f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{-16}{27}$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3-2x^2+bx-3b \\ f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{-16}{27} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-16}{27}=\left(\frac{2}{3}\right)^3-2\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)b-3b \Rightarrow \frac{-16}{27}=\frac{8}{27}-\frac{8}{9}+\frac{2}{3}b-3b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -16=8-24+18b-81b \Rightarrow 0=-63b \Rightarrow \boxed{b=0}$$

Por lo que $\boxed{c=-3\cdot 0=0}$

Los valores buscados son *a = –2, b = 0, c = 0.*

B2. Sea $f(x) = sen(3x)$

a) *(1 punto)* Para la función $h(x) = (f(x))^3$, calcular $h'(x)$ y $h''(x)$.

b) *(1,5 puntos)* Obtener $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 9(f(x))^2 \cos(3x)\,dx$

a)

$$h(x) = (f(x))^3 = (sen(3x))^3 \Rightarrow h'(x) = 3(sen(3x))^2 \cos(3x)\cdot 3$$

$$h'(x) = 9(sen(3x))^2 \cos(3x) = 9(1-\cos^2(3x))\cos(3x) = 9\cos(3x) - 9\cos^3(3x)$$

$$\boxed{h'(x) = 9\cos(3x) - 9\cos^3(3x)}$$

$$h''(x) = 9(-3sen(3x)) - 9\cdot 3\cos^2(3x)(-sen(3x))3 =$$

$$= -27sen(3x) + 81\cos^2(3x)sen(3x) = -27sen(3x) + 81(1-sen^2(3x))sen(3x) =$$

$$= -27sen(3x) + 81sen(3x) - 81sen^3(3x)$$

$$\boxed{h''(x) = 54sen(3x) - 81sen^3(3x)}$$

b) Obtenemos primero la integral indefinida.

$$\int 9(f(x))^2 \cos(3x)\,dx = \int 9(sen(3x))^2 \cos(3x)\,dx = \left\{\begin{array}{l} sen(3x) = t \\ 3\cos(3x)\,dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{3\cos(3x)} \end{array}\right\} =$$

$$= \int 9(t)^2 \cancel{\cos(3x)} \frac{dt}{3\cancel{\cos(3x)}} = 3\int t^2 dt = 3\frac{t^3}{3} = t^3 = sen^3(3x) + K$$

Lo aplicamos al cálculo de la integral definida.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 9(f(x))^2 \cos(3x)\,dx = \left[sen^3(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[sen^3\left(3\frac{\pi}{2}\right)\right] - \left[sen^3(0)\right] = \boxed{-1}$$

B3. *(2,5 puntos)* Discutir, según los valores del parámetro real *a*, cuándo existe una, ninguna o infinitas soluciones del sistema $\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ ax+y+z=2+3a \\ 2x+y+az=4-2a \end{cases}$. Resolverlo para $a=0$.

El sistema tiene asociada una matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$ y una matriz ampliada $A/B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 2+3a \\ 2 & 1 & a & 4-2a \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix}=2a+2+a-2-a^2-2=-a^2+3a-2$$

$$|A|=0 \Rightarrow -a^2+3a-2=0 \Rightarrow a=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(-1)(-2)}}{-2}=\frac{-3\pm 1}{-2}=\begin{cases} \dfrac{-3+1}{-2}=1=a \\ \dfrac{-3-1}{-2}=2=a \end{cases}$$

Analizamos por separado tres situaciones diferentes.

CASO 1. $a \neq 2$ y $a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema tiene **una única solución**.

CASO 2, $a=2$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Estudiamos su rango usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2ª} - \text{Fila 1ª} \\ \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 8 \\ -2 & -1 & -1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \to \text{Nueva fila 2ª} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3ª} - \text{Fila 1ª} \\ \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \to \text{Nueva fila 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{\text{Fila 2ª} \leftrightarrow \text{Fila 3ª}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el rango de A/B es 3, por lo que al tener valores distintos el sistema **no tiene solución**.

CASO 3. $a=1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Estudiamos su rango usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 2^{\text{a}} - \text{Fila } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{cccc} 2 & 2 & 2 & 10 \\ -2 & -1 & -1 & -2 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 8 \end{array} \to \text{Nueva fila } 2^{\text{a}} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^{\text{a}} - \text{Fila } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \to \text{Nueva fila } 3^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2, el de A/B también es 2. Dicho valor es menor que el número de incógnitas (3). El sistema **tiene infinitas soluciones**.

Resolverlo para $a=0$. Es un valor que entra dentro del CASO 1, por lo que tiene una única solución. Lo resolvemos utilizando el método de Gauss.

$$\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ \quad\quad y+z=2 \\ 2x+y \quad\; =4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y+z=2 \\ \quad\quad y+z=2 \\ y=4-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+4-2x+z=2 \\ \quad 4-2x+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{z=-2} \\ -2x+z=-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x-2=-2 \Rightarrow -2x=0 \Rightarrow \boxed{x=0} \Rightarrow \boxed{y=4-2\cdot 0=4}$$

La solución es $x = 0$; $y = 4$; $z = -2$.

B4.
La variable x recoge la duración total en minutos que dura el trayecto en coche desde el punto A al punto B de una gran ciudad. La variable y recoge los minutos que el coche está parado (por semáforos o congestión de tráfico).

x	9	11	13	15	17	19	21
y	0	2	3	5	6	8	11

a) *(1,25 puntos)* Calcula la recta de regresión que permite ajustar los minutos que está parado el coche (y) en función de la duración total (x).
b) *(1,25 puntos)* Calcula el R^2 de la regresión y los minutos que indica la recta que el coche ha estado parado si la duración total del trayecto ha sido 25 minutos.

a) Obtenemos los datos para el cálculo de la covarianza y la varianza.

x	y	x^2	y^2	x · y
9	0	81	0	0
11	2	121	4	22
13	3	169	9	39
15	5	225	25	75
17	6	289	36	102
19	8	361	64	152
21	11	441	121	231
105	35	1687	259	621

$$\bar{x} = \frac{105}{7} = 15 \; ; \; \bar{y} = \frac{35}{7} = 5$$

$$\sigma_x{}^2 = \frac{1687}{7} - 15^2 = 16 \; ; \; \sigma_y{}^2 = \frac{259}{7} - 5^2 = 12 \; ; \; \sigma_{xy} = \frac{621}{7} - 15 \cdot 5 = \frac{96}{7}$$

La recta de regresión de y sobre x es:

$$y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x{}^2}\left(x - \bar{x}\right)$$

$$y - 5 = \frac{96/7}{16}\left(x - 15\right) \Rightarrow y - 5 = \frac{6}{7}\left(x - 15\right) \Rightarrow y = \frac{6}{7}x - \frac{90}{7} + 5 \Rightarrow \boxed{y = \frac{6}{7}x - \frac{55}{7}}$$

b) $$R^2 = \frac{\sigma_{xy}{}^2}{\sigma_x{}^2 \cdot \sigma_y{}^2} = \frac{\left(\frac{96}{7}\right)^2}{16 \cdot 12} = \boxed{\frac{48}{49} \simeq 0.98}$$

Para $x = 25$ tenemos: $y = \frac{6}{7}25 - \frac{55}{7} = \frac{95}{7} \simeq 13.57$.

En un recorrido de 25 minutos se espera que esté parado 13 minutos y medio