UNIVERSIDAD DE CANTABRIA
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS
MAYO 2023

MATEMÁTICAS

INDICACIONES
El examen consta de seis ejercicios. El alumno **ha de elegir y resolver tres** de ellos completos.
Cada ejercicio tiene un valor máximo de 10 puntos. La nota del examen será igual a la media aritmética de las notas de los tres ejercicios elegidos.
Las respuestas deben ser razonadas.
No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.
Si responde a más de tres ejercicios, solo se corregirán los tres primeros que haya resuelto según el orden en que se presenten en el cuadernillo de examen.

Ejercicio 1 [10 PUNTOS]

Considere el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} ax + y = 0 \\ -y + 2az = 0 \\ -x + ay = 0 \end{cases}$$

que depende del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

1) [5 PUNTOS] Determine para qué valores de *a* el sistema es compatible determinado.
2) [5 PUNTOS] Calcule la solución del sistema cuando *a* toma los valores para los cuales el sistema es compatible determinado.

Ejercicio 2 [10 PUNTOS]

Considere la función

$$f(x) = \frac{x+2}{2x-1}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.
1) [2,5 PUNTOS] Determine el dominio de *f(x)*.
2) [2,5 PUNTOS] Determine el rango de *f(x)*.
3) [5 PUNTOS] Determine el/los intervalo(s) de decrecimiento de *f(x)*.

Ejercicio 3 [10 PUNTOS]

Dé un valor a los parámetros *a*, *b* ∈ R para que

$$x - a = \frac{2}{3}(y - b)$$

sea la ecuación de una recta que pase por el origen de coordenadas, es decir, que pase por el punto (0, 0).

Ejercicio 4 [10 PUNTOS]

Considere la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

que depende de un parámetro $a \in \mathbb{R}$.

1) [2,5 PUNTOS] Calcule el determinante de *A* en función del parámetro *a*.
2) [2,5 PUNTOS] Determine los *a* para los cuales *A* tiene inversa.
3) [5 PUNTOS] Calcule la inversa de *A* para el caso $a = 1$.

Ejercicio 5 [10 PUNTOS]

Considere la función $f(x)=x^2-2x+2$.

1) [2 PUNTOS] Indique si $f(x)$ corta con los ejes y, en ese caso, el punto o puntos de corte.
2) [4 PUNTOS] Calcule la parte del dominio de definición de $f(x)$ en que es convexa.
3) [4 PUNTOS] Represente gráficamente a $f(x)$.

Ejercicio 6 [10 PUNTOS]

Considere los puntos $A = (3, 2)$ y $B = (5, 4)$
1) [5 PUNTOS] Calcule la distancia entre A y B.
2) [5 PUNTOS] Determine la ecuación de la recta que pasa por A y B.

SOLUCIONES

Ejercicio 1 [10 PUNTOS]

Considere el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} ax+y=0 \\ -y+2az=0 \\ -x+ay=0 \end{cases}$$

que depende del parámetro $a\in\mathbb{R}$.

1) [5 PUNTOS] Determine para qué valores de *a* el sistema es compatible determinado.
2) [5 PUNTOS] Calcule la solución del sistema cuando *a* toma los valores para los cuales el sistema es compatible determinado.

Estudiamos la compatibilidad del sistema.

Su matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2a \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2a \\ -1 & a & 0 \end{vmatrix}=-2a-2a^3$$

$$|A|=0\Rightarrow -2a-2a^3=0\Rightarrow -2a\left(1+a^2\right)=0\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ 1+a^2=0\Rightarrow a^2=-1\Rightarrow a=\sqrt{-1}=\nexists \end{cases}$$

Si *a = 0* el determinante de A es nulo y por tanto su rango no es 3.

En este caso tenemos que el sistema queda $\begin{cases} y=0 \\ -y=0 \\ -x=0 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \\ z=\lambda \end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}$.

El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Si $a\neq 0$ el determinante de A es no nulo y por tanto su rango es 3. Al igual que el de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

1) Para $a\neq 0$.
2) Resolvemos el sistema para $a\neq 0$.

$$\begin{cases} ax+y=0 \\ -y+2az=0 \\ -x+ay=0 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} y=-ax \\ -y+2az=0 \\ -x+ay=0 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} ax+2az=0 \\ -x+a\cdot(-ax)=0 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a\left(x+2z\right)=0 \\ -x-a^2x=0 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a\left(x+2z\right)=0 \\ x\left(1+a^2\right)=0 \end{cases}\Rightarrow \left.\begin{cases} a\neq 0 \\ 1+a^2\neq 0 \end{cases}\right\}\Rightarrow \begin{cases} x+2z=0 \\ \boxed{x=0} \end{cases}\Rightarrow 0+2z=0\Rightarrow \boxed{z=0}\Rightarrow \boxed{y=-a\cdot 0=0}$$

La solución es *x = 0, y = 0, z = 0.*

Ejercicio 2 [10 PUNTOS]

Considere la función

$$f(x)=\frac{x+2}{2x-1}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

1) [2,5 PUNTOS] Determine el dominio de *f(x)*.

2) [2,5 PUNTOS] Determine el rango de *f(x)*.

3) [5 PUNTOS] Determine el/los intervalo(s) de decrecimiento de *f(x)*.

1) El dominio son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

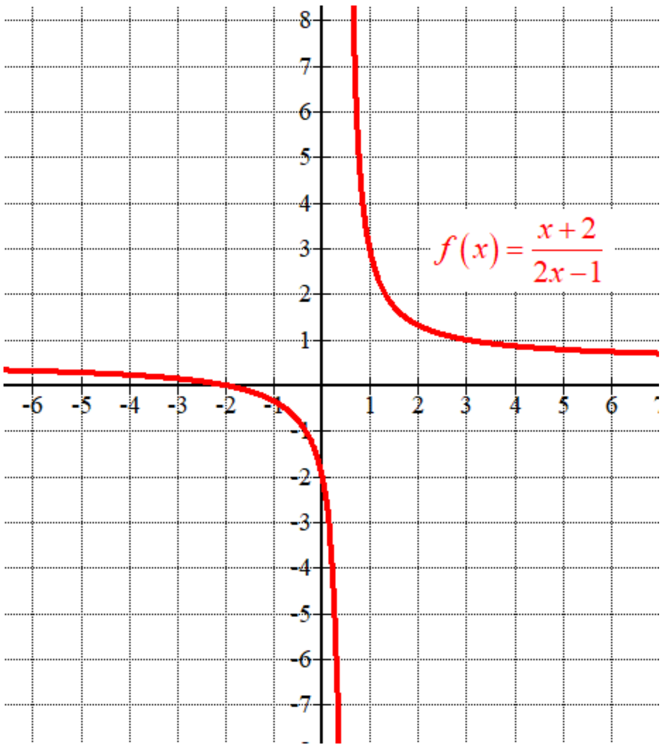
$$2x-1=0 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

Dominio f(x) = $\mathbb{R}-\{1/2\}$

2) Hallamos la función inversa para obtener el recorrido de la función. El rango de *f(x)* es el dominio de su función inversa.

$$y=\frac{x+2}{2x-1} \Rightarrow 2xy-y=x+2 \Rightarrow 2xy-x=2+y \Rightarrow x(2y-1)=2+y \Rightarrow x=\frac{2+y}{2y-1}$$

El rango de *f(x)* es $\mathbb{R}-\{1/2\}$.



3) Usamos la función derivada.

$$f'(x)=\frac{1(2x-1)-2(x+2)}{(2x-1)^2}=\frac{2x-1-2x-4}{(2x-1)^2}=\frac{-5}{(2x-1)^2}$$

Esta función derivada no cambia de signo en ningún momento, pues el numerador es constante y el denominador está elevado al cuadrado. El signo siempre es negativo, por lo que la función siempre decrece.

La función decrece en $\mathbb{R}-\{1/2\}$.

Ejercicio 3 [10 PUNTOS]

Dé un valor a los parámetros a, $b \in$ R para que

$$x-a=\frac{2}{3}\left(y-b\right)$$

sea la ecuación de una recta que pase por el origen de coordenadas, es decir, que pase por el punto (0, 0).

La recta pasa por el origen de coordenadas (0, 0).

$$\left.\begin{array}{l} x-a=\frac{2}{3}\left(y-b\right) \\ x=0;\, y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0-a=\frac{2}{3}\left(0-b\right) \Rightarrow -a=\frac{2}{3}\left(-b\right) \Rightarrow a=\frac{2}{3}b$$

Hay muchos valores que nos valdrían. Damos un valor cualquiera a b y obtenemos el valor de a correspondiente. Por ejemplo, $b = 3$ → $a=\frac{2}{3}3=2$.

Una pareja de valores que cumplen lo pedido es $a = 2$ y $b = 3$.

Ejercicio 4 [10 PUNTOS]

Considere la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

que depende de un parámetro $a \in \mathbb{R}$.

1) [2,5 PUNTOS] Calcule el determinante de *A* en función del parámetro *a*.

2) [2,5 PUNTOS] Determine los *a* para los cuales *A* tiene inversa.

3) [5 PUNTOS] Calcule la inversa de *A* para el caso *a = 1*.

1)

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}=-6a-4-2+3+4a+4=-2a+1$$

2) Para que la matriz tenga inversa su determinante debe ser no nulo.

$$\left.\begin{array}{l} |A|=-2a+1 \\ |A|=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2a+1=0 \Rightarrow -2a=-1 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de *a* distinto de $\frac{1}{2}$

3) Para *a = 1* la matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-2+1=-1\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=-\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 5 [10 PUNTOS]

Considere la función $f(x)=x^2-2x+2$.

1) [2 PUNTOS] Indique si $f(x)$ corta con los ejes y, en ese caso, el punto o puntos de corte.
2) [4 PUNTOS] Calcule la parte del dominio de definición de $f(x)$ en que es convexa.
3) [4 PUNTOS] Represente gráficamente a $f(x)$.

1)

Con el eje de ordenadas OY → $\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2-2x+2 \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=0^2-2\cdot 0+2=2 \Rightarrow \boxed{P(0,2)}$

Con el eje de abscisas OX →

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2-2x+2 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=x^2-2x+2 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(2)}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}=\nexists$$

Solo existe punto de corte con el eje de ordenadas → *P(0, 2)*.

2) La función es una parábola, por lo que o es cóncava (∩) o convexa (∪) en todo su dominio. Como el coeficiente del x^2 es positivo es convexa (∩) en todo su dominio.

OTRA FORMA DE RAZONARLO

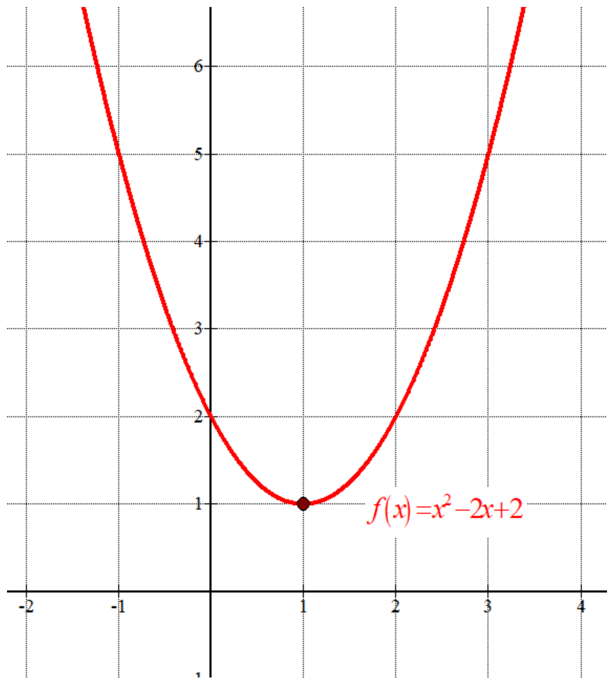
$f'(x)=2x-2 \Rightarrow f''(x)=2>0$. La derivada segunda siempre es positiva, por lo que la función es convexa en todo su dominio.

3) Esta función es una función parabólica. Determinamos su vértice y una tabla de valores para representar su gráfica.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=2x-2 \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x-2=0 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

x = 1 es el vértice de la parábola, Y será un mínimo de la función.

x	$y=x^2-2x+2$
-1	5
0	2
1	1 *Mínimo*
2	2
3	5



Ejercicio 6 [10 PUNTOS]
Considere los puntos *A = (3, 2)* y *B = (5, 4)*
1) [5 PUNTOS] Calcule la distancia entre A y B.
2) [5 PUNTOS] Determine la ecuación de la recta que pasa por A y B.

1) Calculo las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ que une estos dos puntos.

$$\overrightarrow{AB} = (5,4) - (3,2) = (2,2)$$

La distancia entre los puntos es el módulo o longitud del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$D(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} \simeq 2.83 \text{ } unidades$$

2)

$$r: \begin{cases} A(3,2) \in r \\ B(5,4) \in r \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} A(3,2) \in r \\ \vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (2,2) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} A(3,2) \in r \\ m = \dfrac{2}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow y - 2 = 1(x-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 2 = x - 3 \Rightarrow \boxed{y = x - 1}$$