

MATEMÁTICAS

INDICACIONES

El examen consta de seis ejercicios. El alumno **ha de elegir y resolver tres** de ellos completos.

Cada ejercicio tiene un valor máximo de 10 puntos. La nota del examen será igual a la media aritmética de las notas de los tres ejercicios elegidos.

Las respuestas deben ser razonadas.

No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.

Si responde a más de tres ejercicios, solo se corregirán los tres primeros que haya resuelto según el orden en que se presenten en el cuadernillo de examen.

Ejercicio 1 [10 PUNTOS]

Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + y = 0 \\ -y + 2az = 0 \\ -x + ay = 0 \end{cases}$$

que depende del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

- 1) [5 PUNTOS] Determine para que valores de a el sistema es compatible determinado.
- 2) [5 PUNTOS] Calcule la solución del sistema cuando a toma los valores para los cuales el sistema es compatible determinado.

Ejercicio 2 [10 PUNTOS]

Considere la función

$$f(x) = \frac{x + 2}{2x - 1}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

- 1) [2,5 PUNTOS] Determine el dominio de $f(x)$.
- 2) [2,5 PUNTOS] Determine el rango de $f(x)$.
- 3) [5 PUNTOS] Determine el/los intervalo(s) de decrecimiento de $f(x)$.

Ejercicio 3 [10 PUNTOS]

Dé un valor a los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que

$$x - a = \frac{2}{3}(y - b)$$

sea la ecuación de una recta que pase por el origen de coordenadas, es decir, que pase por el punto $(0, 0)$.

Ejercicio 4 [10 PUNTOS]

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

que depende de un parámetro $a \in \mathbb{R}$.

- 1) [2,5 PUNTOS] Calcule el determinante de A en función del parámetro a .
- 2) [2,5 PUNTOS] Determine los a para los cuales A tiene inversa.
- 3) [5 PUNTOS] Calcule la inversa de A para el caso $a = 1$.

Ejercicio 5 [10 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

- 1) [2 PUNTOS] Indique si $f(x)$ corta con los ejes y , en ese caso, el punto o puntos de corte.
- 2) [4 PUNTOS] Calcule la parte del dominio de definición de $f(x)$ en que es convexa.
- 3) [4 PUNTOS] Represente gráficamente a $f(x)$.

Ejercicio 6 [10 PUNTOS]

Considere los puntos $A = (3, 2)$ y $B = (5, 4)$.

- 1) [5 PUNTOS] Calcule la distancia entre A y B .
- 2) [5 PUNTOS] Determine la ecuación de la recta que pasa por A y B .