Pruebas de Acceso para Mayores de 25 Años
Convocatoria de 2023
Materia: MATEMÁTICAS

**Instrucciones**: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de la opción seleccionada, el estudiante elegirá CUATRO ejercicios entre los seis propuestos. Si respondiese a más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

# PROPUESTA A

**A1.** Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & 12 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) **[1,25 puntos]** Calcula el rango de A.
b) **[1,25 puntos]** Despeja *X* de la ecuación $B\cdot X + A = I$ y calcula *X*, siendo *I* la matriz identidad.

**A2.** a) **[1,25 puntos]** Clasifica razonadamente el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+y \quad\;\; =1 \\ \quad\; y-z=-1 \end{cases}.$$

b) **[1,25 puntos]** Resuélvelo, si es posible, explicando el método utilizado.

**A3.** Sean los vectores $\vec{u}=(2,a,1)$ y $\vec{v}=(-1,1,0)$ con $a\in\mathbb{R}$.

a) **[1,25 puntos]** Calcula el valor de *a* para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares.
b) **[1,25 puntos]** Para $a=1$, halla la ecuación del plano π que tiene como vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y pasa por el punto (3, –2,–1).

**A4.** Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2-5x+1 & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{x^2+x-2}{x+2} & si \quad x>1 \end{cases}$$

a) **[1,25 puntos]** Estudia la continuidad de la función indicando de qué tipo son sus discontinuidades, si las tuviera.
b) **[1,25 puntos]** Halla la recta tangente a la gráfica de la función en $x=-2$.

**A5**. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) **[1,25 puntos]** $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-2x-3}dx$.  b) **[1,25 puntos]** $\displaystyle\int_1^3 (x+3)e^{2x}dx$.

**A6.** a) Una marca europea de coches tiene tres fábricas A, B y C. La fábrica A produce el 45% de los coches, la B el 30% y la C el 25 %. De la fábrica A se exporta a América el 15% de la producción, de la B el 20% y de la C el 10 %. Los coches una vez fabricados se almacenan todos juntos. Se selecciona un coche de esa marca al azar del almacén, calcula razonadamente la probabilidad de:

a.1) **[0,5 puntos]** El coche sea destinado a la exportación.

a.2) **[0,75 puntos]** Si el coche elegido es destinado a la exportación, que haya sido fabricado por la fábrica B.

b) La producción por día de una empresa aceitera sigue una normal de media 10000 litros de aceite y desviación típica 110. Se selecciona al azar un día. Calcula razonadamente la probabilidad de que:

b.1) **[0,5 puntos]** La producción sea superior a 10100 litros de aceite.

b.2) **[0,75 puntos]** La producción esté entre 9950 y 10050 litros de aceite.

| a | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0.40** | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| **0.50** | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| **0.60** | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| **0.70** | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| **0.80** | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| **0.90** | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |

Pruebas de Acceso para Mayores de 25 Años
Convocatoria de 2023
Materia: MATEMÁTICAS

**Instrucciones**: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de la opción seleccionada, el estudiante elegirá CUATRO ejercicios entre los seis propuestos. Si respondiese a más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

# PROPUESTA B

**B1.** Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 12 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) **[1,25 puntos]** Comprueba que $\left|A^{-1}\right|$ es $1/|A|$, donde $|A|$ es el determinante de *A* y $\left|A^{-1}\right|$ el de la inversa de *A*.

b) **[1,25 puntos]** Despeja *X* de la ecuación $A\cdot X+I=B$ y calcula *X*, siendo *I* la matriz identidad.

**B2.** a) **[1,25 puntos]** Clasifica razonadamente el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 3x - y + 2z = 6 \\ 2x - 3y + 3z = 2 \end{cases}$$

b) **[1,25 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior, si es posible, e indica el método de resolución utilizado.

**B3.** a) **[1,5 puntos]** Sean los vectores $\vec{u}=(a,1,1)$, $\vec{v}=(-1,3,-2)$ y $\vec{w}=(4,2,1)$, determina el valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$ para que $\vec{u}\times\vec{w}=\vec{v}$.

b) **[1 punto]** ¿Qué ángulo forman $\vec{u}$ y $\vec{w}$ para el valor de *a* obtenido en el apartado anterior?

**B4.** Dada la función $f(x)=\left(-x^2-3\right)/(x+1)$.

a) **[1,5 puntos]** Estudia los máximos y mínimos locales, si los tiene.

b) **[1 punto]** Calcula su asíntota vertical.

**B5.** a) **[1,25 puntos]** Calcula

$$\int \frac{3x}{x^2-3x-4}\,dx.$$

b) **[1,25 puntos]** Calcula el área de la región encerrada por las gráficas de las funciones $f(x)=x^2-5x+4$ y $g(x)=-\frac{3}{2}x^2+\frac{25}{2}x-21$.

**B6.** a) Tenemos un dado cubico con las caras numeradas del 1 al 6 y dos urnas. La urna A contiene tres bolas rojas y dos negras y la urna B contiene cuatro bolas rojas y cinco bolas negras. Lanzamos el dado y si la cara superior muestra un múltiplo de tres extraemos una bola de la urna A, si la cara superior no es múltiplo de tres extraemos la bola de la urna B. Lanzamos el dado y extraemos una bola:

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que la bola extraída sea roja?

a.2) **[0,75 puntos]** Si la bola extraída es roja, ¿qué probabilidad hay que de la hayamos sacado de la urna A?

b) En una mesa de un restaurante hay 8 personas sentadas para comer. Si la probabilidad de que una persona pida un menú vegetariano es de 0.20, calcular:

b.1) **[0,5 puntos]** La probabilidad de que pidan menú vegetariano dos personas de la mesa.

b.2) **[0,75 puntos]** La probabilidad de que pidan menú no vegetariano al menos 6 personas de la mesa.

| n | k \ p | 0.10 | 0.20 | 0.30 | 0.40 | 0.50 | 0.60 | 0.70 | 0.80 | 0.90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 0 | 0.4305 | 0.1678 | 0.0576 | 0.0168 | 0.0039 | 0.0007 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 1 | 0.3826 | 0.3355 | 0.1977 | 0.0896 | 0.0313 | 0.0079 | 0.0012 | 0.0001 | 0.0000 |
| | 2 | 0.1488 | 0.2936 | 0.2965 | 0.2090 | 0.1094 | 0.0413 | 0.0100 | 0.0011 | 0.0000 |
| | 3 | 0.0331 | 0.1468 | 0.2541 | 0.2787 | 0.2188 | 0.1239 | 0.0467 | 0.0092 | 0.0004 |
| | 4 | 0.0046 | 0.0459 | 0.1361 | 0.2322 | 0.2734 | 0.2322 | 0.1361 | 0.0459 | 0.0046 |
| | 5 | 0.0004 | 0.0092 | 0.0467 | 0.1239 | 0.2188 | 0.2787 | 0.2541 | 0.1468 | 0.0331 |
| | 6 | 0.0000 | 0.0011 | 0.0100 | 0.0413 | 0.1094 | 0.2090 | 0.2965 | 0.2936 | 0.1488 |
| | 7 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0012 | 0.0079 | 0.0313 | 0.0896 | 0.1977 | 0.3355 | 0.3826 |
| | 8 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0007 | 0.0039 | 0.0168 | 0.0576 | 0.1678 | 0.4305 |

# SOLUCIONES

**A1.** Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 3 & 5\\ 1 & 10 & 12\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

a) **[1,25 puntos]** Calcula el rango de A.

b) **[1,25 puntos]** Despeja *X* de la ecuación $B\cdot X+A=I$ y calcula *X*, siendo *I* la matriz identidad.

a) El rango de *A* es 3 o menor de 3.

¿El rango de A es 3?

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 3 & 5\\ 1 & 10 & 12\end{vmatrix}=72-5+30-9+12-100=0$$

El rango de *A* no es 3.

¿El rango de *A* es 2?

Considero el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª. Calculo el valor de su determinante.

$$\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=6+1=7\neq 0$$

$\boxed{\text{El rango de } A \text{ es } 2}$.

b) Despejamos la matriz *X* de la ecuación.

$$B\cdot X+A=I\Rightarrow B\cdot X=I-A\Rightarrow X=B^{-1}\left(I-A\right)$$

He supuesto que la matriz *B* tiene determinante no nulo y por tanto existe $B^{-1}$.

Calculamos $B^{-1}$.

$$|B|=\begin{vmatrix}-2 & 0 & 2\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=-2+0+0+2+0-2=-2\neq 0$$

$$B^{-1}=\frac{Adj\left(B^T\right)}{|B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}}{-2}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ -1 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 1/2 & 0 & 1\\ -1/2 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

Calculamos la expresión de *X*.

$$X = B^{-1}\left(I - A\right) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ -1/2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & 12 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ -1/2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -5 \\ -1 & -10 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1+1 & -1+2+10 & 3+5+11 \\ -1/2+0-1 & 1/2+0-10 & -3/2+0-11 \\ 1/2+1+1 & -1/2+2+10 & +3/2+5+11 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 19 \\ -3.5 & -9.5 & -12.5 \\ 2.5 & 11.5 & 17.5 \end{pmatrix}}$$

**A2.** a) **[1,25 puntos]** Clasifica razonadamente el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+y \quad\;\; =1 \\ \quad\; y-z=-1 \end{cases}.$$

b) **[1,25 puntos]** Resuélvelo, si es posible, explicando el método utilizado.

a) Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente al dado.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+y \quad\;\; =1 \\ \quad\; y-z=-1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Ecuación\,2^{a} - Ecuación\,1^{a} \\ \begin{array}{rrrr} x & +y & & =1 \\ -x & -y & -z & =-2 \\ \hline & & -z & =-1 \end{array} \to \text{Nueva ecuación } 2^{a} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ \quad\;\; -z=-1 \\ \quad\; y-z=-1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ Ecuación\,3^{a} \leftrightarrow Ecuación\,2^{a} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ \quad\; y-z=-1 \\ \quad\;\; -z=-1 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado al ser el rango de la matriz de coeficientes A y el de la matriz ampliada A/B igual al número de incógnitas (3).

b) He utilizado el método de Gauss para obtener un sistema equivalente. Resuelvo el sistema a partir del sistema equivalente obtenido.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ \quad\; y-z=-1 \\ \quad\;\; -z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ \quad\; y-z=-1 \\ \quad\;\; \boxed{z=1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+1=2 \\ \quad\; y-1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ \boxed{y=0} \end{cases} \Rightarrow x+0=1 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

La solución del sistema es $\boxed{\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}}$

**A3**. Sean los vectores $\vec{u}=(2,a,1)$ y $\vec{v}=(-1,1,0)$ con $a\in\mathbb{R}$.

a) **[1,25 puntos]** Calcula el valor de $a$ para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares.

b) **[1,25 puntos]** Para $a=1$, halla la ecuación del plano π que tiene como vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y pasa por el punto (3, –2,–1).

a) Para que dos vectores sean perpendiculares su producto escalar debe ser 0.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Rightarrow(2,a,1)(-1,1,0)=-2+a=0\Rightarrow\boxed{a=2}$$

b) Para $a=1$ los vectores directores del plano π quedan $\vec{u}=(2,1,1)$ y $\vec{v}=(-1,1,0)$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(2,1,1)\\ \vec{v}=(-1,1,0)\\ P(3,-2,-1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\pi\equiv\begin{vmatrix}x-3 & y+2 & z+1\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow-(y+2)+2(z+1)+(z+1)-(x-3)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-y-2+2z+2+z+1-x+3=0\Rightarrow\boxed{\pi\equiv-x-y+3z+4=0}$$

**A4.** Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2-5x+1 & si \quad x\leq 1 \\ \dfrac{x^2+x-2}{x+2} & si \quad x>1 \end{cases}$$

a) **[1,25 puntos]** Estudia la continuidad de la función indicando de qué tipo son sus discontinuidades, si las tuviera.
b) **[1,25 puntos]** Halla la recta tangente a la gráfica de la función en $x=-2$.

a) La función es continua en $x\in(-\infty,1)$, pues en dicho intervalo es una función polinómica: $f(x)=x^2-5x+1$. La función es continua en $x\in(1,+\infty)$, pues en dicho intervalo la función tiene la expresión $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x+2}$ que es continua salvo en $x=-2$ que no pertenece al intervalo $(1,+\infty)$.

Estudiamos la continuidad en $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1^2-5\cdot 1+1=-3 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2-5x+1=-3 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+x-2}{x+2}=\dfrac{1^2+1-2}{1+2}=\dfrac{0}{3}=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-3\neq 0=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$$

La función es discontinua en $x=1$.
La función es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$, presentando una discontinuidad inevitable de salto finito en $x=1$.

b) La recta tangente a la gráfica de la función en $x=-2$ tiene ecuación $y-f(-2)=f'(-2)(x+2)$.

La función en las proximidades de $x=-2$ tiene la expresión $f(x)=x^2-5x+1$ y su derivada es $f'(x)=2x-5$

Calculamos la expresión de la recta tangente.

$$\left.\begin{array}{l} f(-2)=(-2)^2-5(-2)+1=4+10+1=15 \\ f'(-2)=2(-2)-5=-9 \\ y-f(-2)=f'(-2)(x+2) \end{array}\right\}\Rightarrow y-15=-9(x+2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-15=-9x-18\Rightarrow \boxed{y=-9x-3}$$

**A5**. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) **[1,25 puntos]** $\int \frac{x}{x^2-2x-3}dx$. b) **[1,25 puntos]** $\int_1^3 (x+3)e^{2x}dx$.

a)

$$\int \frac{x}{x^2-2x-3}dx = \{\text{Descomposición en fracciones simples}\} = \ldots$$

$$x^2-2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}=\begin{cases}\frac{2+4}{2}=3=x\\ \frac{2-4}{2}=-1=x\end{cases}$$

$$\frac{x}{x^2-2x-3}=\frac{x}{(x-3)(x+1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+1}\Rightarrow \frac{x}{(x-3)(x+1)}=\frac{A(x+1)+B(x-3)}{(x-3)(x+1)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=A(x+1)+B(x-3)\Rightarrow \begin{cases} x=-1\to -1=A(0)+B(-1-3)\to -1=-4B\to B=\frac{1}{4}\\ x=3\to 3=A(3+1)+B(0)\to 3=4A\to A=\frac{3}{4}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x^2-2x-3}=\frac{3/4}{x-3}+\frac{1/4}{x+1}$$

$$\ldots=\int \frac{3/4}{x-3}+\frac{1/4}{x+1}dx=\int\frac{3/4}{x-3}dx+\int\frac{1/4}{x+1}dx=\frac{3}{4}\int\frac{1}{x-3}dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+1}dx=$$

$$=\boxed{\frac{3}{4}\ln|x-3|+\frac{1}{4}\ln|x+1|+K}$$

b) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int (x+3)e^{2x}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=x+3\to du=dx\\ dv=e^{2x}dx\to v=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}\end{array}\right\}=(x+3)\frac{1}{2}e^{2x}-\int\frac{1}{2}e^{2x}dx=$$

$$=\frac{x+3}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx=\frac{x+3}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x}=\frac{x+3}{2}e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}=\left(\frac{x+3}{2}-\frac{1}{4}\right)e^{2x}=$$

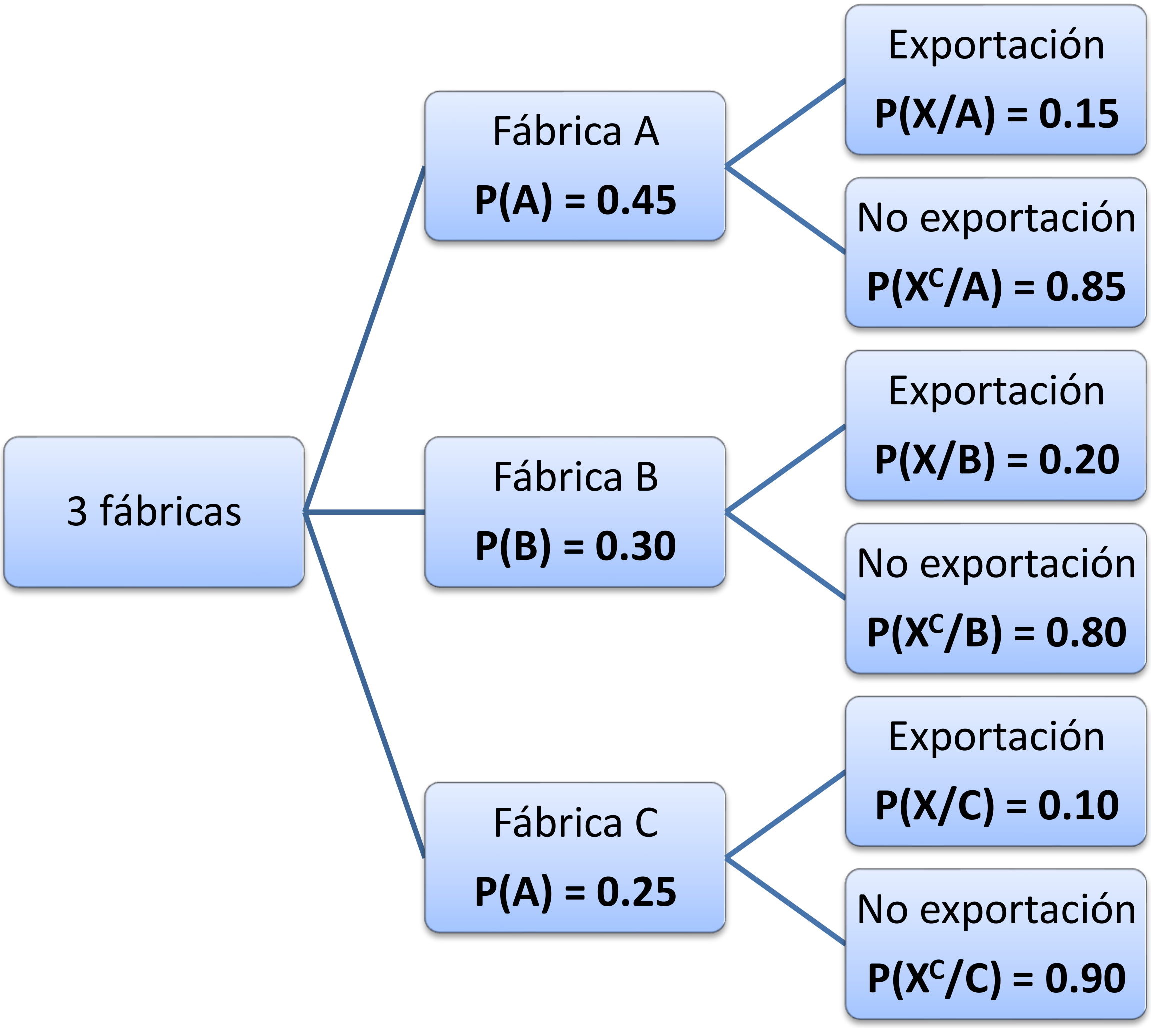
$$=\frac{2x+6-1}{4}e^{2x}=\frac{2x+5}{4}e^{2x}+K$$

Pasamos a calcular la integral definida pedida.

$$\int_1^3 (x+3)e^{2x}dx=\left[\frac{2x+5}{4}e^{2x}\right]_1^3=\left[\frac{6+5}{4}e^6\right]-\left[\frac{2+5}{4}e^2\right]=\boxed{\frac{11}{4}e^6-\frac{7}{4}e^2}$$

**A6.** a) Una marca europea de coches tiene tres fábricas A, B y C. La fábrica A produce el 45% de los coches, la B el 30% y la C el 25 %. De la fábrica A se exporta a América el 15% de la producción, de la B el 20% y de la C el 10 %. Los coches una vez fabricados se almacenan todos juntos. Se selecciona un coche de esa marca al azar del almacén, calcula razonadamente la probabilidad de:
a.1) **[0,5 puntos]** El coche sea destinado a la exportación.
a.2) **[0,75 puntos]** Si el coche elegido es destinado a la exportación, que haya sido fabricado por la fábrica B.
b) La producción por día de una empresa aceitera sigue una normal de media 10000 litros de aceite y desviación típica 110. Se selecciona al azar un día. Calcula razonadamente la probabilidad de que:
b.1) **[0,5 puntos]** La producción sea superior a 10100 litros de aceite.
b.2) **[0,75 puntos]** La producción esté entre 9950 y 10050 litros de aceite.

a) Realizamos un diagrama de árbol.




a.1) Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(X)=P(A)P(X/A)+P(B)P(X/B)+P(C)P(X/C)=$$

$$=0.45\cdot 0.15+0.30\cdot 0.20+0.25\cdot 0.10=\boxed{0.1525}$$

a.2) Es una probabilidad a posteriori, utilizamos el teorema de Bayes para calcularla.

$$P(B/X)=\frac{P(B\cap X)}{P(X)}=\frac{P(B)P(X/B)}{P(X)}=\frac{0.30\cdot 0.20}{0.1525}=\boxed{\frac{24}{61}=0.3934}$$

b) X = La producción por día de una empresa aceitera.
X = N(10000, 110)

b.1)

$$P(X\geq 10100)=\{Tipificamos\}=P\left(Z\geq\frac{10100-10000}{110}\right)=P(Z\geq 0.91)=$$

$$=1-P(Z\leq 0.91)=\left\{\begin{matrix}\text{Mirando en la tabla}\\ \text{de la N(0, 1)}\end{matrix}\right\}=1-0.8196=\boxed{0.1804}$$

| a | 0.00 | 0.01 | 0. |
|---|---|---|---|
| 0.40 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6 |
| 0.50 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6 |
| 0.60 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7 |
| 0.70 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7 |
| 0.80 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7 |
| 0.90 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8 |

b.2)

$$P(9950\leq X\leq 10050)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{9950-10000}{110}\leq Z\leq\frac{10050-10000}{110}\right)=$$

$$=P(-0.45\leq Z\leq 0.45)=P(Z\leq 0.45)-P(Z\leq -0.45)=$$

$$=P(Z\leq 0.45)-P(Z\geq 0.45)=P(Z\leq 0.45)-[1-P(Z\leq 0.45)]=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{Mirando en la tabla}\\ \text{de la N(0, 1)}\end{matrix}\right\}=0.6736-[1-0.6736]=\boxed{0.3472}$$

| a | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.40 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0. |
| 0.50 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0. |

**B1.** Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 5\\ 1 & 1 & 12\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

a) **[1,25 puntos]** Comprueba que $\left|A^{-1}\right|$ es $1/|A|$, donde $|A|$ es el determinante de $A$ y $\left|A^{-1}\right|$ el de la inversa de $A$.

b) **[1,25 puntos]** Despeja $X$ de la ecuación $A\cdot X+I=B$ y calcula $X$, siendo $I$ la matriz identidad.

a) Calculamos la inversa de A.

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 5\\ 1 & 1 & 12\end{vmatrix}=0-5+0-0+12-10=-3\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 5 & 12\end{pmatrix}}{-3}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 1\\ 5 & 12\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 12\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 5\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 5 & 12\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 12\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 5\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-5 & 12 & -5\\ -7 & 24 & -10\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/3 & -4 & 5/3\\ 7/3 & -8 & 10/3\\ -1/3 & 1 & -1/3\end{pmatrix}$$

Sabemos que $|A|=-3$

Calculamos el determinante de la matriz inversa.

$$\left|A^{-1}\right|=\begin{vmatrix}5/3 & -4 & 5/3\\ 7/3 & -8 & 10/3\\ -1/3 & 1 & -1/3\end{vmatrix}=\frac{40}{9}+\frac{40}{9}+\frac{35}{9}-\frac{40}{9}-\frac{28}{9}-\frac{50}{9}=\frac{-3}{9}=-\frac{1}{3}$$

Por lo que se cumple que $\left|A^{-1}\right|=-\frac{1}{3}=\frac{1}{-3}=\frac{1}{|A|}$

b) Despejo $X$ de la ecuación matricial.

$$A\cdot X+I=B\Rightarrow A\cdot X=B-I\Rightarrow X=A^{-1}\left(B-I\right)$$

Calculo la expresión de la matriz $X$.

$$X = A^{-1}(B-I) = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & 12 & -5 \\ -7 & 24 & -10 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$X = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & 12 & -5 \\ -7 & 24 & -10 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & 24-5 & -10-12+10 \\ -10 & 48-10 & -14-24+20 \\ 1 & -6+1 & 2+3-2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & 19 & -12 \\ -10 & 38 & -18 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 & -19/3 & 4 \\ 10/3 & -38/3 & 6 \\ -1/3 & 5/3 & -1 \end{pmatrix}}$$

**B2.** a) **[1,25 puntos]** Clasifica razonadamente el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 3x - y + 2z = 6 \\ 2x - 3y + 3z = 2 \end{cases}$$

b) **[1,25 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior, si es posible, e indica el método de resolución utilizado.

a) Aplicamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente al dado en el ejercicio.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 3x - y + 2z = 6 \\ 2x - 3y + 3z = 2 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Ecuación\, 2^{a} - 3 \cdot Ecuación\, 1^{a} \\ \;\;3x \;\; -y \;\; +2z \;\; =6 \\ -3x \;\; -6y \;\; +3z \;\; =-12 \\ \hline \;\;\;\; -7y \;\; +5z \;\; =-6 \to \text{Nueva ecuación } 2^{a} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Ecuación\, 3^{a} - 2 \cdot Ecuación\, 1^{a} \\ \;\;2x \;\; -3y \;\; +3z \;\; =2 \\ -2x \;\; -4y \;\; +2z \;\; =-8 \\ \hline \;\;\;\; -7y \;\; +5z \;\; =-6 \to \text{Nueva ecuación } 3^{a} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ \quad - 7y + 5z = -6 \\ \quad - 7y + 5z = -6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Ecuación\, 3^{a} - Ecuación\, 2^{a} \\ -7y \;\; +5z \;\; =-6 \\ \;\;7y \;\; -5z \;\; =6 \\ \hline \qquad 0 \;\; =0 \to \text{Nueva ecuación } 3^{a} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ \quad - 7y + 5z = -6 \\ \qquad 0 = 0 \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Resolvemos el sistema a partir del sistema triangular equivalente obtenido.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ \quad - 7y + 5z = -6 \\ \qquad 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 5z = -6 + 7y \to \boxed{z = \dfrac{7y-6}{5}} \end{cases} \Rightarrow x + 2y - \frac{7y-6}{5} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x + 10y - (7y-6) = 20 \Rightarrow 5x + 10y - 7y + 6 = 20 \Rightarrow 5x + 3y = 14 \Rightarrow 5x = 14 - 3y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{14-3y}{5}}$$

Las infinitas soluciones del sistema son $\begin{cases} x = \dfrac{14-3\lambda}{5} \\ y = \lambda \\ z = \dfrac{7\lambda-6}{5} \end{cases} \; ; \quad \lambda \in \mathbb{R}$

**B3.** a) **[1,5 puntos]** Sean los vectores $\vec{u}=(a,1,1)$, $\vec{v}=(-1,3,-2)$ y $\vec{w}=(4,2,1)$, determina el valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$ para que $\vec{u}\times\vec{w}=\vec{v}$.
b) **[1 punto]** ¿Qué ángulo forman $\vec{u}$ y $\vec{w}$ para el valor de *a* obtenido en el apartado anterior?

a) Calculamos el producto vectorial $\vec{u}\times\vec{w}$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(a,1,1)\\ \vec{w}=(4,2,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{u}\times\vec{w}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ a & 1 & 1\\ 4 & 2 & 1\end{vmatrix}=i+4j+2ak-4k-aj-2i$$

$$\vec{u}\times\vec{w}=-i+(4-a)j+(2a-4)k=(-1,4-a,2a-4)$$

Como debe ser igual al vector $\vec{v}$ tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}\times\vec{w}=(-1,4-a,2a-4)\\ \vec{v}=(-1,3,-2)\\ \vec{u}\times\vec{w}=\vec{v}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}-1=-1\\ 4-a=3\to -a=-1\to \boxed{a=1}\\ 2a-4=-2\to 2a=2\to\boxed{a=1}\end{cases}$$

El valor buscado es *a = 1*.

b) Para *a = 1* los vectores son $\vec{u}=(1,1,1)$ y $\vec{w}=(4,2,1)$. Usamos el producto escalar para obtener el ángulo que forman.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(1,1,1)\\ \vec{w}=(4,2,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}=\frac{(1,1,1)(4,2,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{4^2+2^2+1^2}}=\frac{4+2+1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{21}}=\frac{7}{\sqrt{63}}$$

$$\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\frac{7}{\sqrt{63}}\Rightarrow\left(\vec{u},\vec{v}\right)=arc\cos\frac{7}{\sqrt{63}}\simeq 28^{\circ}$$

El ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$ es aproximadamente de 28º.

**B4.** Dada la función $f(x)=\left(-x^2-3\right)/\left(x+1\right)$.
a) **[1,5 puntos]** Estudia los máximos y mínimos locales, si los tiene.
b) **[1 punto]** Calcula su asíntota vertical.

a) Hallamos los puntos críticos de la función buscando cuando su función derivada se anula.

$$f(x)=\frac{-x^2-3}{x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{(-2x)(x+1)-1\cdot\left(-x^2-3\right)}{(x+1)^2}=\frac{-2x^2-2x+x^2+3}{(x+1)^2}=\frac{-x^2-2x+3}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-x^2-2x+3}{(x+1)^2}=0\Rightarrow -x^2-2x+3=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(-1)\cdot 3}}{2(-1)}=\frac{2\pm 4}{-2}=\begin{cases}\dfrac{2+4}{-2}=-3=x\\[2ex]\dfrac{2-4}{-2}=1=x\end{cases}$$

Estudiamos la evolución del signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores. Añadimos el valor $x=-1$ que está excluido del dominio por anular el denominador de la función.

En el intervalo $(-\infty,-3)$ tomamos $x=-4$ y la derivada vale

$f'(-4)=\dfrac{-(-4)^2-2(-4)+3}{(-4+1)^2}=\dfrac{-5}{9}<0$. La función decrece en $(-\infty,-3)$.

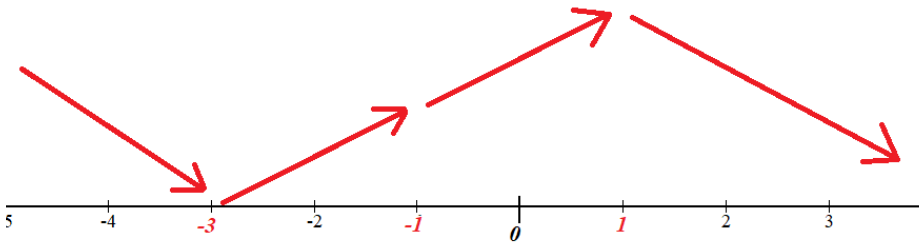
En el intervalo $(-3,-1)$ tomamos $x=-2$ y la derivada vale

$f'(-2)=\dfrac{-(-2)^2-2(-2)+3}{(-2+1)^2}=\dfrac{3}{1}=3>0$. La función crece en $(-3,-1)$.

En el intervalo $(-1,1)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0)=\dfrac{-0^2-2\cdot 0+3}{(0+1)^2}=3>0$. La función crece en $(-1,1)$.

En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale $f'(2)=\dfrac{-2^2-2\cdot 2+3}{(2+1)^2}=\dfrac{-5}{9}<0$. La función decrece en $(1,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:




La función presenta un mínimo relativo en $x=-3$ y un máximo relativo en $x=1$.

b) El dominio de la función $f\left(x\right)=\frac{-x^2-3}{x+1}$ es $\mathbb{R}-\left\{-1\right\}$.

¿$x = -1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -1} f\left(x\right)=\lim_{x\to -1}\frac{-x^2-3}{x+1}=\frac{-\left(-1\right)^2-3}{-1+1}=\frac{-4}{0}=\infty$$

$x = -1$ es asíntota vertical

**B5.** a) **[1,25 puntos]** Calcula

$$\int \frac{3x}{x^2-3x-4}\,dx.$$

b) **[1,25 puntos]** Calcula el área de la región encerrada por las gráficas de las funciones $f(x)=x^2-5x+4$ y $g(x)=-\frac{3}{2}x^2+\frac{25}{2}x-21$.

a)

$$\int \frac{3x}{x^2-3x-4}\,dx = \{\text{Descomposición en fracciones simples}\} = \ldots$$

$$x^2-3x-4=0 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2}=\frac{3\pm 5}{2}=\begin{cases}\frac{3+5}{2}=4=x\\ \frac{3-5}{2}=-1=x\end{cases}$$

$$\frac{3x}{x^2-3x-4}=\frac{3x}{(x-4)(x+1)}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+1}\Rightarrow \frac{3x}{(x-4)(x+1)}=\frac{A(x+1)+B(x-4)}{(x-4)(x+1)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x=A(x+1)+B(x-4)\Rightarrow\begin{cases}x=-1\to -3=A(0)+B(-1-4)\to -3=-5B\to B=\frac{3}{5}\\ x=4\to 12=A(4+1)+B(0)\to 12=5A\to A=\frac{12}{5}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{x^2-2x-3}=\frac{12/5}{x-4}+\frac{3/5}{x+1}$$

$$\ldots=\int \frac{12/5}{x-4}+\frac{3/5}{x+1}\,dx=\int \frac{12/5}{x-4}\,dx+\int\frac{3/5}{x+1}\,dx=\frac{12}{5}\int\frac{1}{x-4}\,dx+\frac{3}{5}\int\frac{1}{x+1}\,dx=$$

$$=\boxed{\frac{12}{5}\ln|x-4|+\frac{3}{5}\ln|x+1|+K}$$

b) Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$\left.\begin{array}{l}g(x)=-\frac{3}{2}x^2+\frac{25}{2}x-21\\ f(x)=x^2-5x+4\\ f(x)=g(x)\end{array}\right\}\Rightarrow -\frac{3}{2}x^2+\frac{25}{2}x-21=x^2-5x+4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x^2+25x-42=2x^2-10x+8\Rightarrow 0=5x^2-35x+50\Rightarrow x^2-7x+10=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 1\cdot 10}}{2}=\frac{7\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{7+3}{2}=5=x\\ \frac{7-3}{2}=2=x\end{cases}$$

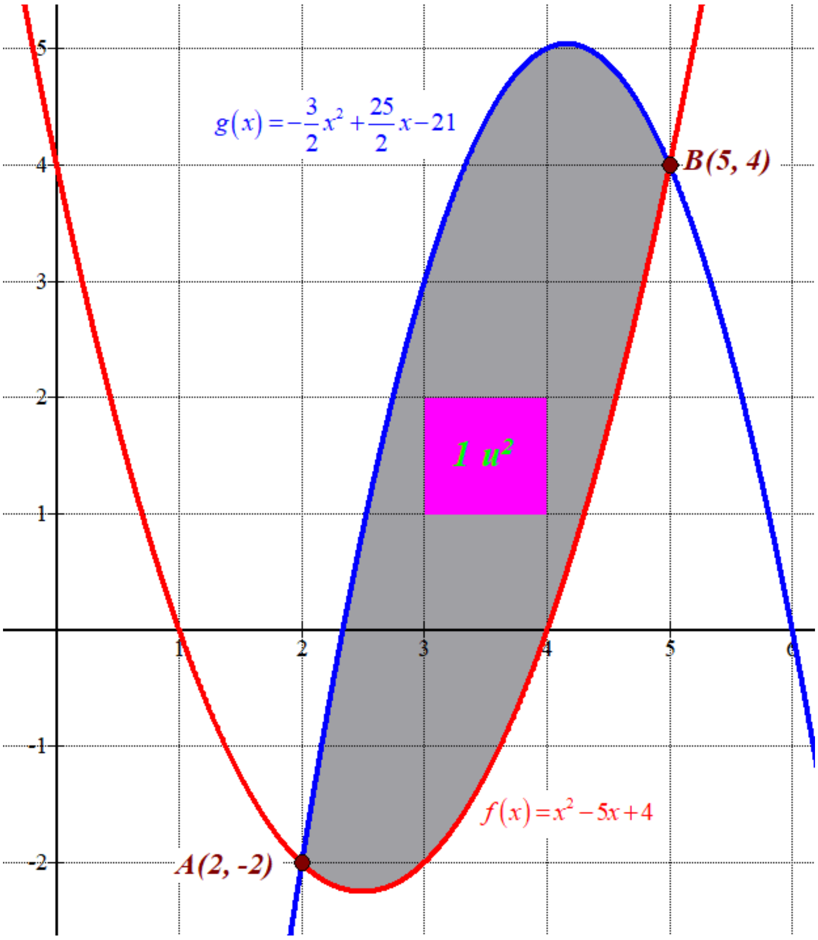
El área del recinto pedido es el valor absoluto de la integral definida de la diferencia entre las dos funciones entre 2 y 5.

$$\int_2^5 -\frac{3}{2}x^2+\frac{25}{2}x-21-\left(x^2-5x+4\right)dx = \int_2^5 -\frac{3}{2}x^2+\frac{25}{2}x-21-x^2+5x-4dx =$$

$$= \int_2^5 -\frac{5}{2}x^2+\frac{35}{2}x-25dx = \left[-\frac{5}{6}x^3+\frac{35}{4}x^2-25x\right]_2^5 =$$

$$= \left[-\frac{5}{6}5^3+\frac{35}{4}5^2-25\cdot 5\right]-\left[-\frac{5}{6}2^3+\frac{35}{4}2^2-25\cdot 2\right] = \frac{45}{4} = \boxed{11.25u^2}$$

Dibujamos la región para comprobar la bondad de la solución.



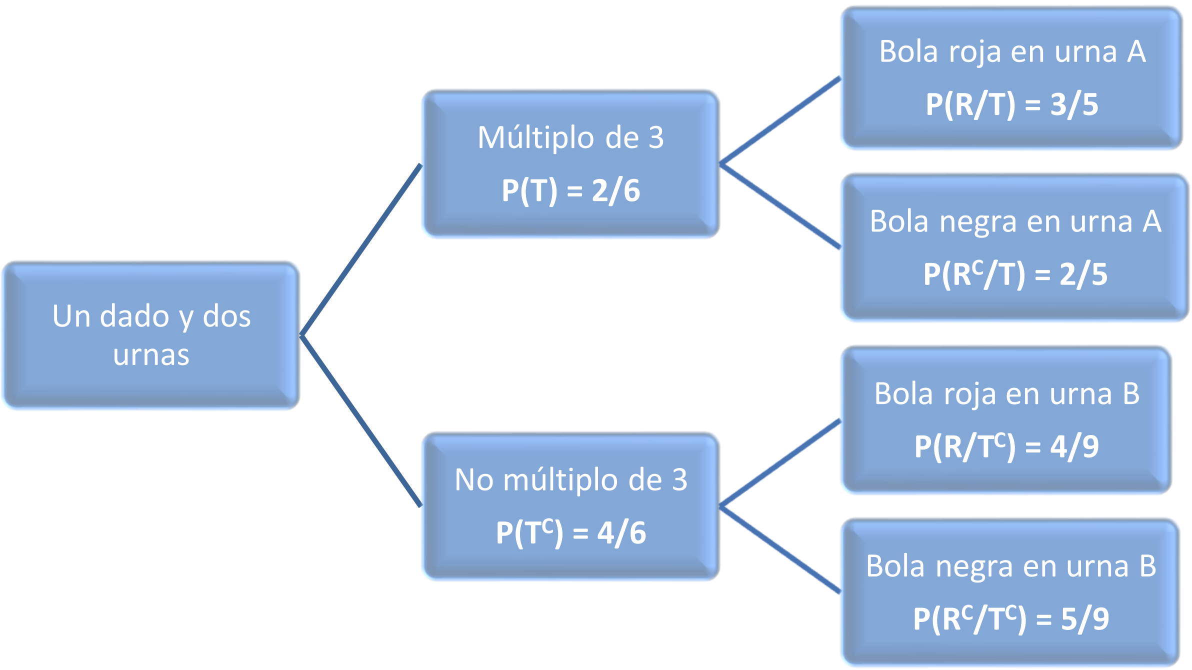
**B6.** a) Tenemos un dado cubico con las caras numeradas del 1 al 6 y dos urnas. La urna A contiene tres bolas rojas y dos negras y la urna B contiene cuatro bolas rojas y cinco bolas negras. Lanzamos el dado y si la cara superior muestra un múltiplo de tres extraemos una bola de la urna A, si la cara superior no es múltiplo de tres extraemos la bola de la urna B. Lanzamos el dado y extraemos una bola:
a.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que la bola extraída sea roja?
a.2) **[0,75 puntos]** Si la bola extraída es roja, ¿qué probabilidad hay que de la hayamos sacado de la urna A?
b) En una mesa de un restaurante hay 8 personas sentadas para comer. Si la probabilidad de que una persona pida un menú vegetariano es de 0.20, calcular:
b.1) **[0,5 puntos]** La probabilidad de que pidan menú vegetariano dos personas de la mesa.
b.2) **[0,75 puntos]** La probabilidad de que pidan menú no vegetariano al menos 6 personas de la mesa.

a) Hacemos un diagrama de árbol.
Llamamos T al suceso "sacar múltiplo de 3 al lanzar un dado". Como de los resultados posibles {1, 2, 3, 4, 5 y 6} solo son múltiplos de 3 dos de ellos {3, 6}

$$P(T)=\frac{2}{6}$$

Llamamos R al suceso "sacar bola roja".

$$P(Bola\,roja\,en\,urna\,A)=\frac{3}{5} \qquad P(Bola\,roja\,en\,urna\,B)=\frac{4}{9}$$




a.1) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(R)=P(T)P(R/T)+P(T^C)P(R/T^C)=\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{5}+\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{9}=\boxed{\frac{67}{135}\simeq 0.4963}$$

a.2) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(T/R)=\frac{P(T\cap R)}{P(R)}=\frac{P(T)P(R/T)}{P(R)}=\frac{\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{67}{135}}=\boxed{\frac{27}{67}\simeq 0.403}$$

b) Consideramos la variable aleatoria X = Número de personas que piden menú vegetariano en una mesa de 8 comensales.
Es una variable binomial pues las elecciones son independientes y se elige menú vegetariano o no.
Los parámetros son *n = nº de repeticiones = 8; p = P(una persona elija menú vegetariano) = 0.20*.
X = B(8, 0.20)

b.1) $P(X=2)=\binom{8}{2}0.20^2\cdot 0.80^6=\boxed{0.2936}$

También podemos buscar este valor en la tabla.

| n | k \ p | 0.10 | 0.20 | 0 |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 0 | 0.4305 | 0.1678 | 0. |
| | 1 | 0.3826 | [illegible] | 0. |
| | 2 | [illegible] | 0.2936 | 0. |
| | 3 | 0.0331 | 0.1468 | 0. |

b.2) Que pidan menú no vegetariano al menos 6 personas de la mesa sucede cuando piden menú no vegetariano 6, 7 u 8 personas, que se traduce en que 2, 1 o 0 personas piden menú vegetariano.

$$P(\text{Al menos 6 personas no piden menú vegetariano})=P(X=2)+P(X=1)+P(X=0)=$$

$$=0.2936+0.3355+0.1678=\boxed{0.7969}$$

| n | k \ p | 0.10 | 0.20 | 0. |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 0 | [illegible] | 0.1678 | 0.0 |
| | 1 | [illegible] | 0.3355 | 0.1 |
| | 2 | [illegible] | 0.2936 | 0.2 |
| | 3 | 0.0331 | [illegible] | 0.2 |
| | 4 | 0.0046 | 0.0459 | 0.1 |