CIUG

PAU (MAIORES DE 25 ANOS) 2023 Código: 31

MATEMÁTICAS

PROBLEMAS: Hasta 2 puntos cada problema.

1. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}$

   a) Calcule el rango de la matriz $A\cdot B$

   b) Calcule la matriz X que verifica $(A\cdot B)\cdot X-X=C$

2. Dada la recta $r:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z}{3}$ y el plano $\alpha:2x-2y+3z-9=0$

   a) Determine el ángulo que forman la recta r y el plano α

   b) Determine el punto de corte de la recta y el plano.

3. Si $f(x)=\begin{cases}1/x^2 & si\ \ x<-2\\ ax^2+b & si\ \ -2\le x\le 2\\ 1/x^2 & si\ \ 2<x\end{cases}$ es una función continua y pasa por el punto (1,–2)

   a) Determine los valores de a y b.

   b) Calcule el área limitada por la gráfica de $f(x)=ax^2+b$, las rectas $x=2$, $x=-2$ y el eje de abscisas, para los valores de a y b calculados en el apartado anterior.

CUESTIONES: Se valora con 1 punto la respuesta correcta; 0 puntos si no se contesta y –0,5 puntos si la respuesta es incorrecta.

1. En un sistema lineal de ecuaciones homogéneo (términos independientes = 0) de tres ecuaciones con tres incógnitas, si el determinante de la matriz de coeficientes es 0, entonces el sistema

   a) No tiene solución.

   b) Tiene infinitas soluciones.

   c) Sólo tiene la solución $x=y=z=0$

2. Los puntos $P(4,-1,3)$, $Q(3,5,1)$ y $R(0,23,-5)$

   a) Están alineados

   b) Determinan un plano

   c) Son puntos del plano YZ

3. Dada la función $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$, el valor de su derivada en $x=1$ es

   a) $f'(1)=0$

   b) $f'(1)=-2/3$

   c) $f'(1)=-1$

4. La función $f(x)=e^x(x-1)$

   a) Es decreciente en el intervalo $(-\infty,1)$ y creciente en el intervalo $(1,\infty)$

   b) No tiene puntos de inflexión

   c) Tiene un mínimo en $x=0$

SOLUCIONES

1. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}$

a) Calcule el rango de la matriz $A\cdot B$

b) Calcule la matriz X que verifica $(A\cdot B)\cdot X - X = C$

a) Obtenemos la expresión de la matriz $A\cdot B$.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3 & -3\\-4 & -2 & 2\\2 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$3\times\boxed{1\ \cdot\ 1}\times 3\longrightarrow 3\times 3$$

El rango de $A\cdot B$ es 3 o menor.

¿El rango es 3?

$$|A\cdot B|=\begin{vmatrix}6 & 3 & -3\\-4 & -2 & 2\\2 & 1 & -1\end{vmatrix}=12+12+12-12-12-12=0$$

Al ser el determinante nulo el rango de $A\cdot B$ no es 3.

¿El rango es 2?

Observamos que las tres columnas son proporcionales. La columna 3ª es la 2ª cambiada de signo y la 1ª es la 2ª multiplicada por 2.

El rango de $A\cdot B$ no es 2.

El rango de $A\cdot B$ es 1, ya que la matriz tiene elementos no nulos.

b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$(A\cdot B)\cdot X - X = C \Rightarrow (A\cdot B)\cdot X - I\cdot X = C \Rightarrow (A\cdot B - I)X = C \Rightarrow X = (A\cdot B - I)^{-1}C$$

Comprobamos que la matriz $A\cdot B - I$ tiene inversa y la calculamos.

$$A\cdot B - I=\begin{pmatrix}6 & 3 & -3\\-4 & -2 & 2\\2 & 1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 3 & -3\\-4 & -3 & 2\\2 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

$$|A\cdot B - I|=\begin{vmatrix}5 & 3 & -3\\-4 & -3 & 2\\2 & 1 & -2\end{vmatrix}=30+12+12-18-24-10=2\neq 0$$

$$\left(A\cdot B-I\right)^{-1}=\frac{Adj\left(A\cdot B-I\right)^{T}}{\left|A\cdot B-I\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}5&-4&2\\3&-3&1\\-3&2&-2\end{pmatrix}}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}-3&1\\2&-2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}3&1\\-3&-2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}3&-3\\-3&2\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}-4&2\\2&-2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}5&2\\-3&-2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}5&-4\\-3&2\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}-4&2\\-3&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}5&2\\3&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}5&-4\\3&-3\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\left(A\cdot B-I\right)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&3&-3\\-4&-4&2\\2&1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3/2&-3/2\\-2&-2&1\\1&1/2&-3/2\end{pmatrix}$$

Calculamos la expresión de *X*.

$$X=\left(A\cdot B-I\right)^{-1}C=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&3&-3\\-4&-4&2\\2&1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}16-6\\-16+8\\8-2\end{pmatrix}$$

$$3\times\boxed{3\qquad\cdot 3}\times 1\longrightarrow 3\times 1$$

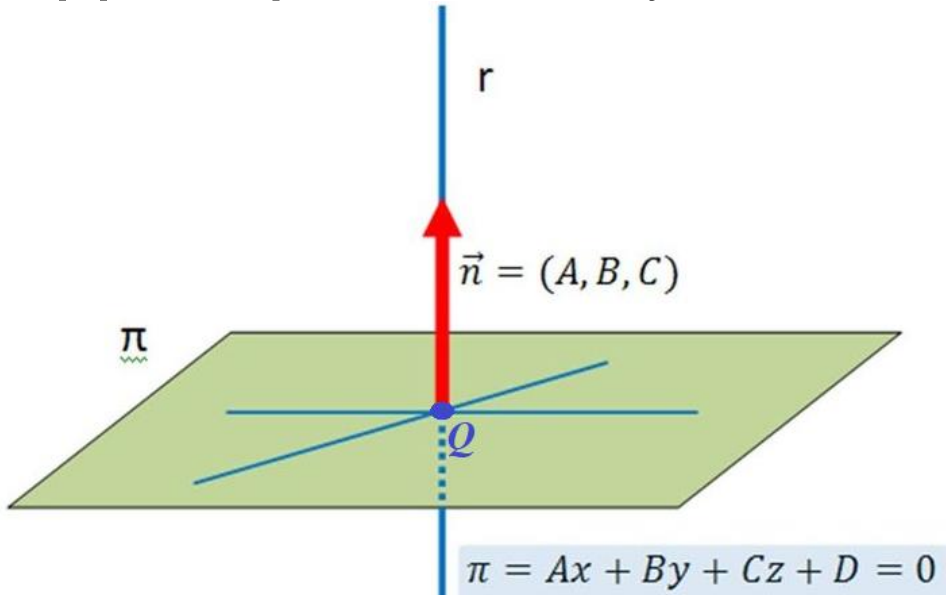
$$\boxed{X=\begin{pmatrix}5\\-5\\3\end{pmatrix}}$$

2. Dada la recta $r:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z}{3}$ y el plano $\alpha: 2x-2y+3z-9=0$

a) Determine el ángulo que forman la recta r y el plano α

b) Determine el punto de corte de la recta y el plano.

a) El plano $\alpha: 2x-2y+3z-9=0$ tiene el vector normal $\vec{n}=(2,-2,3)$ y la recta $r:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z}{3}$ tiene vector director $\vec{v_r}=(2,-2,3)$. Observamos que son iguales por lo que la recta es perpendicular al plano, es decir, forman un ángulo de 90º.



b) Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$r:\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{3} \Rightarrow r:\begin{cases} P_r(-1,3,0) \\ \vec{v_r}=(2,-2,3) \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=3-2\lambda \\ z=3\lambda \end{cases}$$

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano.

$$\left.\begin{array}{l} r:\begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=3-2\lambda \\ z=3\lambda \end{cases} \\ \alpha: 2x-2y+3z-9=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2(-1+2\lambda)-2(3-2\lambda)+3(3\lambda)-9=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2+4\lambda-6+4\lambda+9\lambda-9=0 \Rightarrow 17\lambda-17=0 \Rightarrow \lambda-1=0 \Rightarrow \lambda=1 \Rightarrow \begin{cases} x=-1+2=1 \\ y=3-2=1 \\ z=3 \end{cases}$$

El punto de corte de recta y plano es $Q(1,1,3)$.

3. Si $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & si \quad x<-2 \\ ax^2+b & si \quad -2\le x\le 2 \\ \dfrac{1}{x^2} & si \quad 2<x \end{cases}$ es una función continua y pasa por el punto (1,–2)

a) Determine los valores de a y b.

b) Calcule el área limitada por la gráfica de $f(x)=ax^2+b$, las rectas $x=2, x=-2$ y el eje de abscisas, para los valores de a y b calculados en el apartado anterior.

a) Si la función es continua en $x = -2$ cumple que $f(-2)=\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$.

$$\left.\begin{aligned} & f(-2)=\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^+} f(x) \\ & f(-2)=a(-2)^2+b=4a+b \\ & \lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{(-2)^2}=\frac{1}{4} \\ & \lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+} ax^2+b=4a+b \end{aligned}\right\}\Rightarrow 4a+b=\frac{1}{4}$$

Si la función es continua en $x = 2$ cumple que $f(2)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

$$\left.\begin{aligned} & f(2)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x) \\ & f(2)=a(2)^2+b=4a+b \\ & \lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-} ax^2+b=4a+b \\ & \lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{(-2)^2}=\frac{1}{4} \end{aligned}\right\}\Rightarrow 4a+b=\frac{1}{4}$$

Además la función pasa por el punto (1, –2) , lo que significa que $f(1) = -2$.

$$f(1)=a(1)^2+b=-2\Rightarrow a+b=-2$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{aligned} 4a+b=\frac{1}{4} \\ a+b=-2 \end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned} 16a+4b=1 \\ a=-2-b \end{aligned}\right\}\Rightarrow 16(-2-b)+4b=1\Rightarrow -32-16b+4b=1\Rightarrow -12b=33\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b=\frac{-33}{12}=\frac{-11}{4}}\Rightarrow \boxed{a=-2+\frac{11}{4}=\frac{3}{4}}$$

b) Nos piden calcular el área limitada por la gráfica de $f(x)=\frac{3}{4}x^2-\frac{11}{4}$, las rectas $x=2, x=-2$ y el eje de abscisas.

Averiguamos si la función corta el eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{3}{4}x^2-\frac{11}{4} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{4}x^2-\frac{11}{4}=0 \Rightarrow 3x^2-11=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2=11 \Rightarrow x^2=\frac{11}{3} \Rightarrow x=\sqrt{\frac{11}{3}} \simeq \pm 1.91$$

La gráfica de la función corta el eje de abscisas en dos puntos pertenecientes al intervalo $(-2,\ 2)$.

Calculamos las integrales definidas.

$$\int_{-2}^{-\sqrt{\frac{11}{3}}} f(x)dx=\int_{-2}^{-\sqrt{\frac{11}{3}}} \frac{3}{4}x^2-\frac{11}{4}dx=\left[\frac{3}{4}\frac{x^3}{3}-\frac{11}{4}x\right]_{-2}^{-\sqrt{\frac{11}{3}}}=\left[\frac{x^3}{4}-\frac{11}{4}x\right]_{-2}^{-\sqrt{\frac{11}{3}}}$$

$$=\left[\frac{\left(-\sqrt{\frac{11}{3}}\right)^3}{4}-\frac{11}{4}\left(-\sqrt{\frac{11}{3}}\right)\right]-\left[\frac{(-2)^3}{4}-\frac{11}{4}(-2)\right]=\frac{1}{4}\left(-\left(\sqrt{\frac{11}{3}}\right)^3+\frac{11\sqrt{11}}{\sqrt{3}}+8-22\right)\simeq 0.0106$$

$$\int_{-\sqrt{\frac{11}{3}}}^{+\sqrt{\frac{11}{3}}} f(x)dx=\int_{-\sqrt{\frac{11}{3}}}^{+\sqrt{\frac{11}{3}}} \frac{3}{4}x^2-\frac{11}{4}dx=\left[\frac{3}{4}\frac{x^3}{3}-\frac{11}{4}x\right]_{-\sqrt{\frac{11}{3}}}^{+\sqrt{\frac{11}{3}}}=\left[\frac{x^3}{4}-\frac{11}{4}x\right]_{-\sqrt{\frac{11}{3}}}^{+\sqrt{\frac{11}{3}}}$$

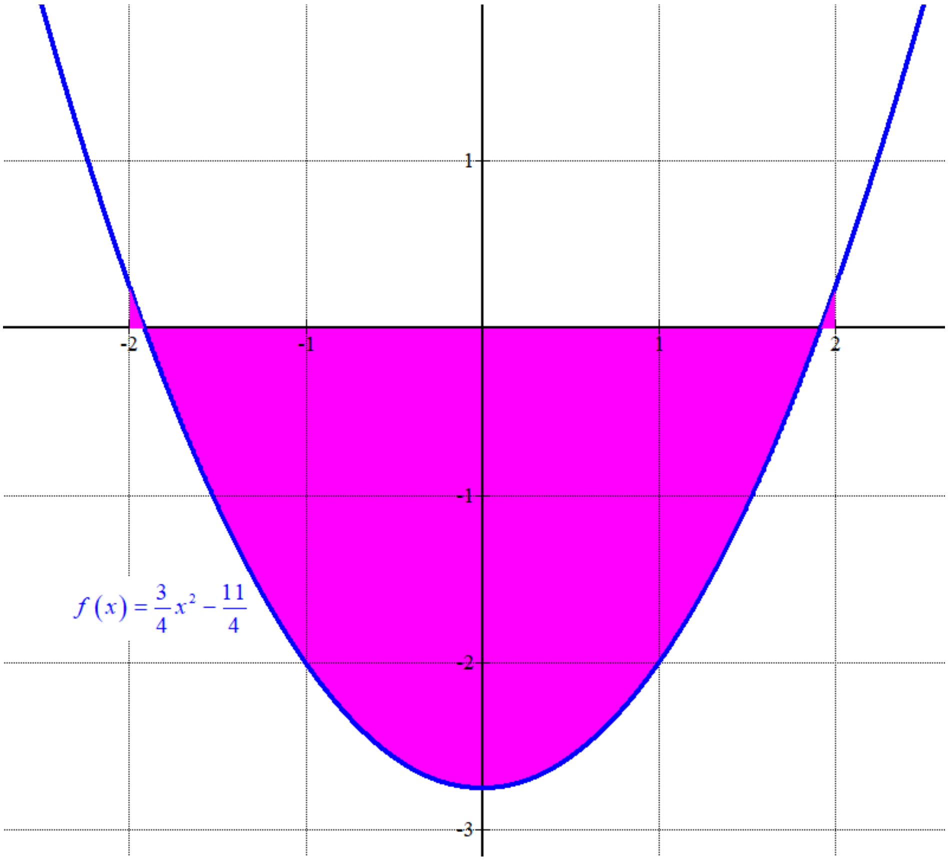
$$=\left[\frac{\left(\sqrt{\frac{11}{3}}\right)^3}{4}-\frac{11}{4}\left(\sqrt{\frac{11}{3}}\right)\right]-\left[\frac{\left(-\sqrt{\frac{11}{3}}\right)^3}{4}-\frac{11}{4}\left(-\sqrt{\frac{11}{3}}\right)\right]=2\left[\frac{\left(\sqrt{\frac{11}{3}}\right)^3}{4}-\frac{11}{4}\left(\sqrt{\frac{11}{3}}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{\frac{11}{3}}\right)^3-11\left(\sqrt{\frac{11}{3}}\right)\right]\simeq -7.021$$

$$\int_{\sqrt{\frac{11}{3}}}^{2} f(x)\,dx = \int_{\sqrt{\frac{11}{3}}}^{2} \frac{3}{4}x^2 - \frac{11}{4}dx = \left[\frac{3}{4}\frac{x^3}{3} - \frac{11}{4}x\right]_{\sqrt{\frac{11}{3}}}^{2} = \left[\frac{x^3}{4} - \frac{11}{4}x\right]_{\sqrt{\frac{11}{3}}}^{2}$$

$$= \left[\frac{2^3}{4} - \frac{11}{4}(2)\right] - \left[\frac{\left(\sqrt{\frac{11}{3}}\right)^3}{4} - \frac{11}{4}\left(\sqrt{\frac{11}{3}}\right)\right] = 2 - \frac{11}{2} - \frac{1}{4}\left(\left(\sqrt{\frac{11}{3}}\right)^3 - \frac{11\sqrt{11}}{\sqrt{3}}\right) \simeq 0.0106$$

El área será $\acute{A}rea = \frac{280}{33} \approx 8.49\ u^2$.



CUESTIONES: Se valora con 1 punto la respuesta correcta; 0 puntos si no se contesta y –0,5 puntos si la respuesta es incorrecta.

1. En un sistema lineal de ecuaciones homogéneo (términos independientes = 0) de tres ecuaciones con tres incógnitas, si el determinante de la matriz de coeficientes es 0, entonces el sistema
a) No tiene solución.
b) Tiene infinitas soluciones.
c) Sólo tiene la solución $x = y = z = 0$

Al ser un sistema homogéneo el rango de la matriz de coeficientes A es el mismo que el de la matriz ampliada A/B, por lo que el sistema tendrá solución (única o infinitas). Como además el determinante de la matriz de coeficientes es 0 su rango no es 3 y será menor que el número de incógnitas (3) y el sistema tendrá infinitas soluciones. La respuesta correcta es la b).

2. Los puntos $P(4,-1,3)$, $Q(3,5,1)$ y $R(0,23,-5)$
a) Están alineados
b) Determinan un plano
c) Son puntos del plano YZ

Para comprobar si están alineados o no basta con comprobar si las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ tienen coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}=(3,5,1)-(4,-1,3)=(-1,6,-2)\\ \overrightarrow{PR}=(0,23,-5)-(4,-1,3)=(-4,24,-8)\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{-1}{-4}=\frac{6}{24}=\frac{-2}{-8}$$

Los puntos están alineados y la respuesta correcta es la a)

3.Dada la función $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$, el valor de su derivada en $x = 1$ es
a) $f'(1) = 0$
b) $f'(1) = -2/3$
c) $f'(1) = -1$

$$f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}=1-x^{2/3}\Rightarrow f'(x)=0-\frac{2}{3}x^{2/3-1}=-\frac{2}{3}x^{-1/3}\Rightarrow f'(1)=-\frac{2}{3}\cdot 1^{-1/3}=-\frac{2}{3}$$

La respuesta correcta es la b)

4. La función $f(x)=e^x(x-1)$
a) Es decreciente en el intervalo $(-\infty,1)$ y creciente en el intervalo $(1,\infty)$
b) No tiene puntos de inflexión
c) Tiene un mínimo en $x = 0$

$$f(x)=e^x(x-1)\Rightarrow f'(x)=e^x(x-1)+e^x\cdot 1=e^x(x-1+1)=xe^x$$

$$\left.\begin{array}{l}f'(x)=xe^x\\ f'(x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow xe^x=0\Rightarrow x=0$$

En el intervalo $\left(-\infty,0\right)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f\,'\left(-1\right)=\left(-1\right)e^{-1}=-\frac{1}{e}<0$. La función decrece en $\left(-\infty,0\right)$.

En el intervalo $\left(0,+\infty\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f\,'\left(-1\right)=\left(1\right)e^{1}=e>0$. La función crece en $\left(0,+\infty\right)$.

La función tiene un mínimo en $x = 0$.

La respuesta correcta es la c).