Prueba de Acceso a la Universidad para Mayores de 25 años
Convocatoria: 2023
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS
Tiempo de realización:1.5 horas

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas.
Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. **Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.**

PROPUESTA A:

1.- Dada la función

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2+x-2}$$

(i) **(1 punto)** Halla su dominio y sus asíntotas.
(ii) **(2 puntos)** Estudia la monotonía y sus extremos relativos o locales.
(iii) **(1 punto)** Dibuja su gráfica reflejando las cuestiones anteriores.

2.- Sea *r* la recta de ecuación

$$r:\frac{x-1}{2}=y=\frac{z+2}{3}$$

(i) **(1 punto)** Determina un punto y un vector director de la recta *r*.
(ii) **(2 puntos)** Calcula la ecuación del plano que contiene a la recta *r* y es perpendicular al plano de ecuación $x+3y+5z-7=0$.

3.- Sea *a* un número real. Para el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y+2z=0, \\ ax+y-z=a-2, \\ 3x+ay+z=a-2. \end{cases}$$

(i) **(2 puntos)** Discute su solución según los valores de *a*.
(ii) **(1 punto)** Determina, si es posible, todas las soluciones cuando $a = 1$.

PROPUESTA B:

1.- Dada la función

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2+x-2}$$

(i) **(1 punto)** Halla su dominio y sus asíntotas.
(ii) **(2 puntos)** Estudia la monotonía y sus extremos relativos o locales.
(iii) **(1 punto)** Dibuja su gráfica reflejando las cuestiones anteriores.

2.- Sea *r* la recta de ecuación

$$r:\frac{x-1}{2}=y=\frac{z+2}{3}$$

(i) **(1 punto)** Determina un punto y un vector director de la recta *r*.
(ii) **(2 puntos)** Calcula la ecuación del plano que contiene a la recta *r* y es perpendicular al plano de ecuación $x+3y+5z-7=0$.

3.- Tras superar varias pruebas y eliminar a otros concursantes Pedro, para conseguir el gran premio del concurso, se enfrenta a la siguiente situación: ante él tiene tres urnas con 6 bolas cada una. La primera tiene 3 bolas blancas y 3 negras. La segunda 4 blancas y 2 negras. Y la tercera 5 blancas y 1 negra. Con los ojos cerrados tiene que elegir una de las tres urnas y tomar de ella 1 bola. Gana el premio final si la bola es blanca.
(i) **(1.5 puntos)** ¿Qué probabilidad tiene Pedro de ganar el premio final?
(ii) **(1.5 puntos)** Suponiendo que haya perdido, ¿qué probabilidad hay de que haya elegido la primera urna?

SOLUCIONES

PROPUESTA A:

1.- Dada la función

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2+x-2}$$

(i) **(1 punto)** Halla su dominio y sus asíntotas.
(ii) **(2 puntos)** Estudia la monotonía y sus extremos relativos o locales.
(iii) **(1 punto)** Dibuja su gráfica reflejando las cuestiones anteriores.

i) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2+x-2=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1(-2)}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases}\dfrac{-1+3}{2}=1=x\\ \dfrac{-1-3}{2}=-2=x\end{cases}$$

$$Dominio\ f(x)=\mathbb{R}-\{-2,1\}$$

Asíntotas verticales. $x=a$

¿ $x=-2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{x+1}{x^2+x-2}=\frac{-2+1}{(-2)^2-2-2}=\frac{-1}{0}=\infty$$

$x=-2$ es asíntota vertical

¿ $x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2+x-2}=\frac{1+1}{1^2+1-2}=\frac{2}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical

Asíntotas horizontales. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0$$

$y=0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Como tiene asíntota horizontal no tiene asíntota oblicua.

ii) Utilizamos la derivada para encontrar sus puntos críticos.

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2+x-2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot\left(x^2+x-2\right)-(2x+1)(x+1)}{\left(x^2+x-2\right)^2}=\frac{x^2+x-2-2x^2-2x-x-1}{\left(x^2+x-2\right)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{-x^2-2x-3}{\left(x^2+x-2\right)^2} \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-x^2-2x-3}{\left(x^2+x-2\right)^2}=0 \Rightarrow -x^2-2x-3=0 \Rightarrow x^2+2x+3=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot3}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-8}}{2}=\nexists$$

La función no tiene puntos críticos y por tanto no tiene máximos ni mínimos locales.
Estudiamos la evolución del signo de la derivada antes, entre y después de $x=-2$ y $x=1$ (valores excluidos del dominio)

En el intervalo $(-\infty,-2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale

$f'(-3)=\dfrac{-(-3)^2-2(-3)-3}{\left((-3)^2-3-2\right)^2}=\dfrac{-6}{16}<0$. La función decrece en $(-\infty,-2)$.

En el intervalo $(-2,1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0)=\dfrac{-0^2-0-3}{\left(0^2+0-2\right)^2}=\dfrac{-3}{4}<0$. La función decrece en $(-2,1)$.

En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2)=\dfrac{-2^2-2\cdot2-3}{\left(2^2+2-2\right)^2}=\dfrac{-11}{16}<0$. La función decrece en $(1,+\infty)$.

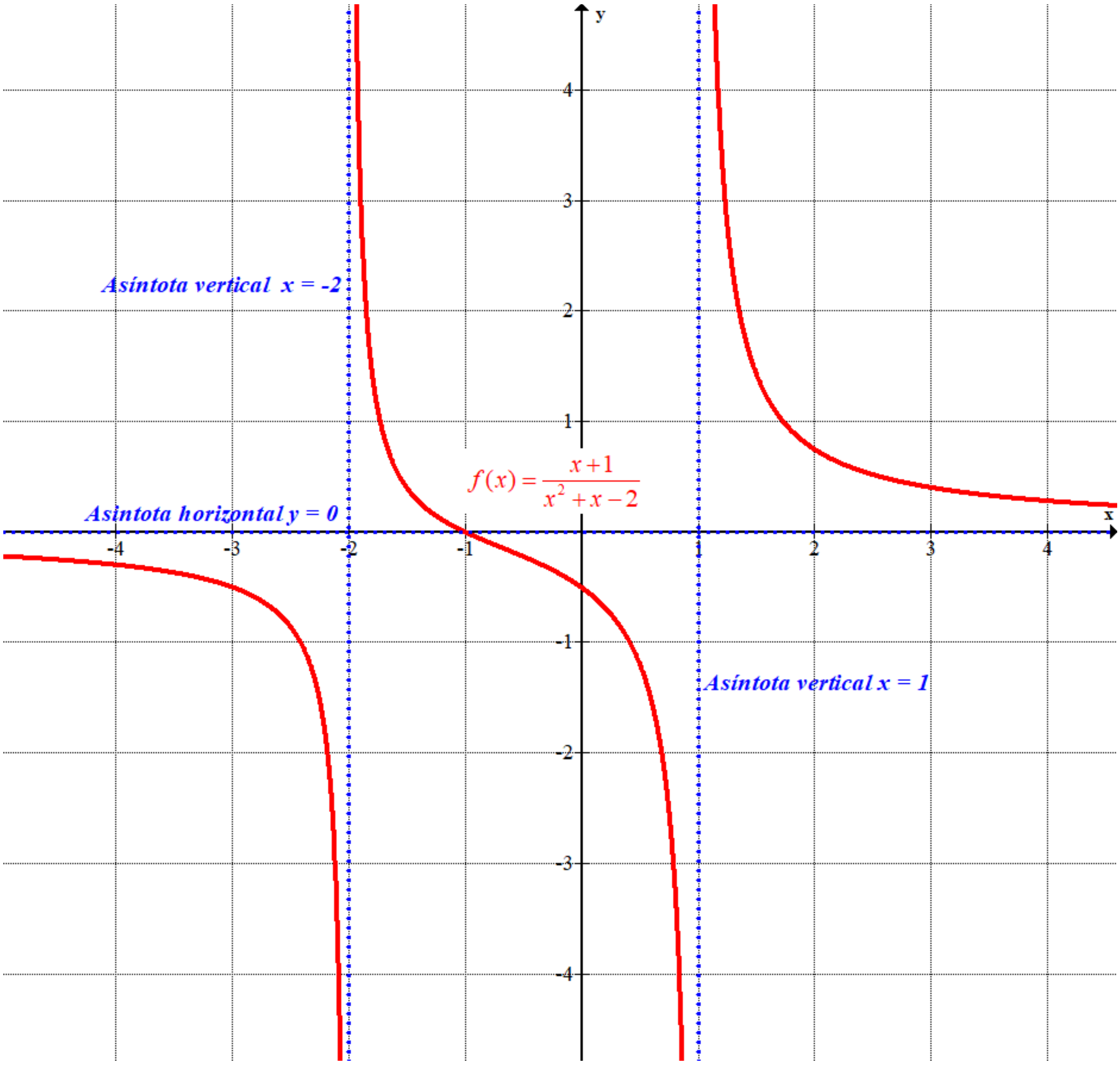
La función decrece en todo su dominio $\mathbb{R}-\{-2,1\}$.

iii) Obtenemos una tabla de valores y dibujamos su gráfica.

x	$y=\dfrac{x+1}{x^2+x-2}$
-4	-0.3
-3	-0.5
-2.5	-0.86

x	$y=\dfrac{x+1}{x^2+x-2}$
-1.5	0.4
-1	0
0	-0.5
0.5	-1.2

x	$y=\dfrac{x+1}{x^2+x-2}$
2	0.75
3	0.4
4	0.27



y
x
Asíntota vertical x = -2
Asíntota horizontal y = 0
Asíntota vertical x = 1
$f(x)=\frac{x+1}{x^2+x-2}$

2.- Sea *r* la recta de ecuación

$$r:\frac{x-1}{2}=y=\frac{z+2}{3}$$

(i) **(1 punto)** Determina un punto y un vector director de la recta *r*.

(ii) **(2 puntos)** Calcula la ecuación del plano que contiene a la recta *r* y es perpendicular al plano de ecuación $x+3y+5z-7=0$.

(i) Dada la ecuación $r:\frac{x-1}{2}=y=\frac{z+2}{3}$ sabemos que un punto de la recta es *P(1, 0, –2)* y que un vector director es $\overrightarrow{v_r}=(2,1,3)$.

(ii) El plano que contiene a la recta *r* tendrá como uno de sus vectores directores al vector director de la recta $\overrightarrow{v_r}=(2,1,3)$ y contiene al punto *P(1, 0, –2)* de la recta. Al ser perpendicular al plano $x+3y+5z-7=0$ también tendrá como vector director el vector normal de este plano $\vec{n}=(1,3,5)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(1,0,-2)\in\pi \\ \vec{u}=\vec{n}=(1,3,5) \\ \vec{v}=\overrightarrow{v_r}=(2,1,3) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi:\begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9(x-1)+10y+(z+2)-6(z+2)-3y-5(x-1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x-9+10y+z+2-6z-12-3y-5x+5=0\Rightarrow \boxed{\pi:4x+7y-5z-14=0}$$

3.- Sea a un número real. Para el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y+2z=0, \\ ax+y-z=a-2, \\ 3x+ay+z=a-2. \end{cases}$$

(i) **(2 puntos)** Discute su solución según los valores de a.
(ii) **(1 punto)** Determina, si es posible, todas las soluciones cuando $a = 1$.

(i) El sistema dado tiene asociado la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & -1 \\ 3 & a & 1 \end{pmatrix}$

y la matriz ampliada $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a & 1 & -1 & a-2 \\ 3 & a & 1 & a-2 \end{pmatrix}$.

Averiguamos donde se anula el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & -1 \\ 3 & a & 1 \end{vmatrix}=1-3+2a^2-6-a+a=2a^2-8$$

$$|A|=0 \Rightarrow 2a^2-8=0 \Rightarrow a^2-4=0 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow a=\pm\sqrt{4}=\pm 2$$

Analizamos tres casos por separado.

CASO 1. $a \neq 2 \quad y \quad a \neq -2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. El rango de la ampliada A/B también es 3, así como el número de incógnitas. El sistema tiene **solución única**.

CASO 2. $a=-2$

Para $a=-2$ las matrices quedan $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

La matriz A no tiene rango 3 pues su determinante vale cero.

La matriz A tiene rango 2 pues al considerar el menor de orden 2 que resulta de eliminar la 3ª fila y la 3ª columna tiene determinante no nulo → $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=1+1=3\neq 0$

La matriz A/B tiene también rango 3 pues el menor de orden 3 que resulta de quitar la 1ª columna tiene determinante distinto de 0 → $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & -4 \end{vmatrix}=4-16+8-4=-8\neq 0$. El rango de A/B es 3.

Por lo que el rango de A/B (3) es distinto al rango de A (2). El sistema **no tiene solución**.

CASO 3. $a=2$

Para $a=2$ las matrices quedan $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ y $A/B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 0\\ 3 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

La matriz A no tiene rango 3 pues su determinante vale 0.
La matriz A tiene rango 2 pues si consideramos el menor de orden 2 que resulta de eliminar la 3ª fila y la 3ª columna tiene determinante no nulo → $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1-2=-1\neq 0$

El rango de la matriz A/B es el mismo que el de A pues la 4ª columna es nula.
El rango de A/B es 2.

Como rango de A (2) es igual al rango de A/B (2), pero menor que el número de incógnitas (3) el sistema tiene **infinitas soluciones**.

(ii) Lo resolvemos para $a=1$. Sabemos, por lo visto en el primer apartado que el sistema tiene una única solución.

El sistema queda $\begin{cases}x+y+2z=0,\\ x+y-z=-1,\\ 3x+y+z=-1.\end{cases}$

Utilizamos el método de Gauss para resolverlo.

$$\begin{cases}x+y+2z=0,\\ x+y-z=-1,\\ 3x+y+z=-1.\end{cases}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 2ª} - \text{Ecuación 1ª}\\ \begin{array}{cccc} x & +y & -z & =-1\\ -x & -y & -2z & =0\\ \hline & & -3z & =-1 \end{array}\to \text{Nueva ecuación 2ª}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}x+y+2z=0\\ \qquad -3z=-1\\ 3x+y+z=-1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{\text{Ecuación 2ª} \leftrightarrow \text{Ecuación 3ª}\}\Rightarrow\begin{cases}x+y+2z=0\\ 3x+y+z=-1\\ \qquad -3z=-1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 2ª} - 3\cdot\text{Ecuación 1ª}\\ \begin{array}{cccc} 3x & +y & +z & =-1\\ -3x & -3y & -6z & =0\\ \hline & -2y & -5z & =-1 \end{array}\to \text{Nueva ecuación 2ª}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}x+y+2z=0\\ -2y-5z=-1\\ \qquad -3z=-1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+y+2z=0\\ -2y-5z=-1\\ \boxed{z=\dfrac{-1}{-3}=\dfrac{1}{3}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y+2\dfrac{1}{3}=0\\ -2y-5\dfrac{1}{3}=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y+\dfrac{2}{3}=0\\ -2y=-1+\dfrac{5}{3}\to -2y=\dfrac{2}{3}\to\boxed{y=\dfrac{-1}{3}}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=0 \Rightarrow \boxed{x=-\frac{1}{3}}$$

La solución es $x=-\frac{1}{3};\ \ y=-\frac{1}{3};\ \ z=\frac{1}{3}$

PROPUESTA B:

1.- Dada la función

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2+x-2}$$

(i) **(1 punto)** Halla su dominio y sus asíntotas.
(ii) **(2 puntos)** Estudia la monotonía y sus extremos relativos o locales.
(iii) **(1 punto)** Dibuja su gráfica reflejando las cuestiones anteriores.

Igual que el ejercicio 1 de propuesta A

2.- Sea *r* la recta de ecuación

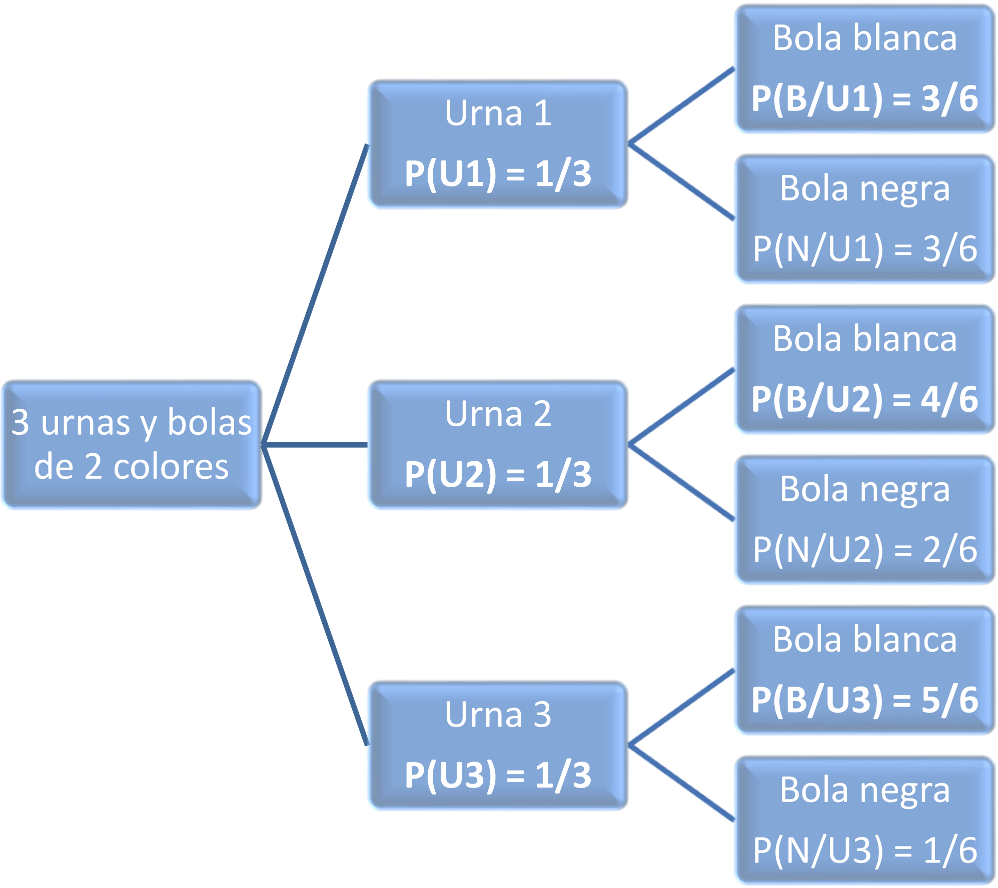
$$.\,r:\frac{x-1}{2}=y=\frac{z+2}{3}$$

(i) **(1 punto)** Determina un punto y un vector director de la recta *r*.
(ii) **(2 puntos)** Calcula la ecuación del plano que contiene a la recta *r* y es perpendicular al plano de ecuación $x+3y+5z-7=0$.

Igual que el ejercicio 2 de propuesta A

3.- Tras superar varias pruebas y eliminar a otros concursantes Pedro, para conseguir el gran premio del concurso, se enfrenta a la siguiente situación: ante él tiene tres urnas con 6 bolas cada una. La primera tiene 3 bolas blancas y 3 negras. La segunda 4 blancas y 2 negras. Y la tercera 5 blancas y 1 negra. Con los ojos cerrados tiene que elegir una de las tres urnas y tomar de ella 1 bola. Gana el premio final si la bola es blanca.
(i) **(1.5 puntos)** ¿Qué probabilidad tiene Pedro de ganar el premio final?
(ii) **(1.5 puntos)** Suponiendo que haya perdido, ¿qué probabilidad hay de que haya elegido la primera urna?

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Para ganar debe sacar bola blanca, calculamos esta probabilidad aplicando el teorema de la probabilidad total.

$$P(B) = P(U1)P(B/U1) + P(U2)P(B/U2) + P(U3)P(B/U3) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6} = \frac{12}{18} = \boxed{\frac{2}{3} \approx 0.6667}$$

b) Si ha perdido es que ha sacado bola negra.
La probabilidad pedida es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(U1/N) = \frac{P(U1 \cap N)}{P(N)} = \frac{P(U1)P(N/U1)}{1 - P(B)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6}}{1 - \frac{2}{3}} = \boxed{\frac{1}{2} = 0.5}$$