| | | |
|---|---|---|
| | **UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**<br>PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD<br>PARA MAYORES DE 25 AÑOS<br>**AÑO 2023**<br>**MATERIA**: MATEMÁTICAS II | MODELO |

**INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN**

INSTRUCCIONES: El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni simbólicas. **Las respuestas deben estar debidamente justificadas**.

PUNTUACIÓN: La puntuación total es de 10 puntos distribuidos conforme se indica en el enunciado de cada ejercicio.

TIEMPO: 1 hora y 30 minutos.

## OPCIÓN A

**Ejercicio 1 (2.5 puntos)**

Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 3x - y + mz = 2 \\ (m-1)x + y - z = 0 \\ 2x - 2y + 3z = m \end{cases}$

se pide:

a) (1.5 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro real $m$.
b) (1 punto) Resolver el sistema para $m$ =2.

**Ejercicio 2 (2.5 puntos)**

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

se pide:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de f(x) en x=0.
b) (0.75 puntos) Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f(x).
c) (0.75 puntos) Determinar los extremos relativos de f(x) clasificándolos. ¿Hay algún máximo o mínimo absoluto?

**Ejercicio 3 (2.5 puntos)**

Consideramos el plano $\pi: x + y + z - 2 = 0$ y el punto $P(1, -1, 1)$ . Se pide:

a) (1.25 puntos) Determinar el punto $P'$ que es simétrico del punto $P$ respecto del plano $\pi$ .
b) (1.25 puntos) Dados los puntos $A(1,1,0)$, $B(1,0,1)$, $C(0,1,1)$ en el plano $\pi$, determinar el volumen del tetraedro de vértices $A, B, C$ y $P$.

**Ejercicio 4 (2,5 puntos)**

Se sabe que la probabilidad de que se verifique un suceso A es 0.6. También se tiene que $p(\overline{B} \cap A) = 0.4$, donde $\overline{B}$ es el suceso que se verifica cuando no se verifica $B$, y que $p(A \cup B) = 0.8$ . Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular $p(A \cap B)$.
b) (1 punto) Calcular $p(B)$. ¿Son A y B independientes?
c) (0.75 puntos) Calcular $p(A|B)$ .

## OPCIÓN B

**Ejercicio 1 (2.5 puntos)**

Dadas dos matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B$, que también es una matriz cuadrada de orden 2, se sabe que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Calcule $B$.
b) (1 punto) Calcule el determinante de la matriz $(A \cdot B)^{-3}$.
c) (0.5 puntos) Calcule $A \cdot A^t - A^t \cdot A$, donde $A^t$ es la matriz traspuesta de $A$.

**Ejercicio 2 (2.5 puntos)**

Dadas las funciones $f(x) = 3x^2 - x + 1$ y $g(x) = x^3 + x + 1$

a) (1 punto) ¿Para qué valores de x se verifica que las rectas tangentes a las gráficas de f(x) y de $g(x)$ en los puntos $\left(x, f(x)\right)$ y $\left(x, g(x)\right)$, respectivamente, son paralelas?
b) (1.5 puntos) Determine los valores de x para los que f(x)=g(x). Calcule el área de la región del plano comprendida entre las gráficas de ambas funciones, para $x \in [0,2]$.

**Ejercicio 3 (2,5 puntos)**

Dadas las rectas de ecuaciones $r\colon \begin{cases} x = 1 \\ y + z = 6 \end{cases}$, $s\colon \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

a) (0,75 puntos) Discuta la posición relativa de las rectas $r$ y $s$.
b) (1 punto) Calcule la recta $t$ perpendicular común a las rectas $r$ y $s$.
c) (0,75 puntos) Calcule la distancia entre las rectas $r$ y $s$.

**Ejercicio 4 (2,5 puntos)**

Un jugador lanza un dado y gana si la puntuación obtenida es múltiplo de tres. Supongamos que este jugador realiza cuatro tiradas consecutivas.

a) (1.25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que no gane en ninguna de las tiradas?
b) (1.25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que gane al menos tres veces?

**CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN**
**MATMÁTICAS II**

*Con carácter general, deben considerarse válidas todas las formas correctas de resolver un problema, aunque se siga un planteamiento diferente al que se presenta en el documento de soluciones.*

## OPCIÓN A

**Ejercicio 1**

a) Por plantear el problema de modo correcto (buscando la condición de que el rango de la matriz de los coeficientes y la ampliada coincidan para la existencia de solución): 0.5 puntos. Por el cálculo de los dos valores en los que el rango de la matriz de los coeficientes es 2: 0.5 puntos. Por analizar cada uno de esos dos casos: 0, 25 puntos por cada uno. Valorar ideas correctas, en caso de error de cálculo.

b) Resolución correcta del sistema para m=1 (1 punto). Es válida cualquier forma correcta de resolverlo. Valorar ideas correctas, en caso de error de cálculo.

**Ejercicio 2**

a) Por estudiar correctamente la continuidad, 0.5 puntos. Por la derivabilidad 0.5 puntos (0.25 por el estudio a cada lado del cero).

b) 0.5 por el planteamiento, 0.25 por la resolución (determinación correcta de los intervalos).

c) 0.5 por el estudio correcto en el cero (0.25 por ver que es mínimo, 0.25 por ver que es absoluto). 0.5 puntos por el estudio en el 1.

**Ejercicio 3**

a) 0.75 planteamiento correcto. Resolución correcta según ese planteamiento: 0.5 puntos.

b) 0.75 planteamiento correcto. Resolución correcta según ese planteamiento: 0.5 puntos.

**Ejercicio 4**

a) 0.5 planteamiento correcto. Resolución correcta según ese planteamiento: 0.25 puntos

b) Cálculo de la probabilidad de B (0.5 planteamiento correcto; resolución correcta: 0.25 puntos). No independencia de A y B: 0.25 puntos.

c) 0.5 planteamiento correcto. Resolución correcta según ese planteamiento: 0.25 puntos

## OPCIÓN B

**Ejercicio 1**

a) 0.75 planteamiento correcto. Resolución correcta según ese planteamiento: 0.25 puntos.

b) 0.75 planteamiento correcto. Resolución correcta según ese planteamiento: 0.25 puntos.

c) 0.25 planteamiento correcto. Resolución correcta según ese planteamiento: 0.25 puntos.

**Ejercicio 2**

a) 0.5 planteamiento correcto. Resolución correcta según ese planteamiento: 0.5 puntos.

b) Determinación correcta de los puntos donde f(x)=g(x) 0.25 puntos. Planteamiento correcto del cálculo del área 0.5 puntos. Cálculo de primitivas 0.5 puntos. Regla de Barrow 0.25 puntos.

**Ejercicio 3**

a) Planteamiento 0.5 puntos. Resolución 0.25 puntos.

b) Planteamiento 0.5 puntos. Resolución 0.5 puntos.

c) Planteamiento 0.5 puntos. Resolución 0.25 puntos.

**Ejercicio 4**

a) Planteamiento 0.75 puntos. Resolución 0.5 puntos.

b) Planteamiento 0.75 puntos. Resolución 0.5 puntos.

**SOLUCIONES**
**MATEMÁTICAS II**
**OPCIÓN A**

**Ejercicio 1**

a) El determinante de la matriz de los coeficientes es $\begin{vmatrix} 3 & -1 & m \\ m-1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -(m-2)\left(m+\frac{1}{2}\right)$. Por tanto si $m \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$ el sistema es compatible determinado (solución única).

Si $m = 2$, el rango de la matriz ampliada con los términos independientes coincide con el de la matriz de los coeficientes, siendo 2. El sistema es compatible indeterminado.

Si $m = -\frac{1}{2}$ el rango de la matriz de coeficientes es 2, y el de la ampliada 3. Así que el sistema es incompatible.

b) Para $m = 2$, el sistema es $\begin{cases} 3x - y + 2z = 2 \\ x + y - z = 0 \\ 2x - 2y + 3z = 2 \end{cases}$, en el que la tercera ecuación se obtiene restando a la primera la segunda, y que tiene por solución $\begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\lambda \\ y = -\frac{1}{2} + \frac{5}{4}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

**Ejercicio 2**

a) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} xe^{-x} = 0$. Como $f(0) = 0$, f es continua en 0.

Por lo que se refiere a la derivabilidad, $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-0}{x} = \lim_{x\to 0^-} x = 0$. Sin embargo, $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-0}{x} = \lim_{x\to 0^+} e^{-x} = 1$, y f no es derivable en x=0.

b) Para $x \in (-\infty, 0)$, $f'(x) = 2x < 0$ y f es decreciente. Para $x \in (0, +\infty)$, $f'(x) = e^{-x}(1-x)$ de modo que $f'(x) > 0$ si 0<x<1 y f es creciente en ese intervalo. Tenemos $f'(x) < 0$ si x>1, f es decreciente en el intervalo $(1, +\infty)$.

c) En el punto x=0, tenemos un mínimo que de hecho es absoluto, pues f(0)=0 mientras que f(x)>0 para x≠0. En el punto x=1 la función alcanza un máximo relativo f(1)=$e^{-1}$, pues pasa de ser creciente en 0<x<1, a ser decreciente en x>1.

**Ejercicio 3**

a) Un vector normal al plano $\pi$ es el $\vec{n}_\pi = (1,1,1)$, con lo que la ecuación de la perpendicular a $\pi$ que pasa por $P$ es $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$, para $\lambda \in \mathbb{R}$. El punto de corte de $r$ con $\pi$ se obtiene para $\lambda=\frac{1}{3}$ y es el $Q\ (\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$. Por tanto, el punto buscado es $P' = P + 2\overrightarrow{PQ} = (\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$.

b) El volumen del tetraedro es $\frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}]\right| = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}u^3$.

**Ejercicio 4**

a) Como $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$, siendo la unión disjunta, se tiene que

$$p(A \cap B) = p(A) - p(A \cap \bar{B}) = 0.6 - 0.4 = 0.2$$

b) Como $p(A \cup B) = 0.8$, se tiene que $p(\overline{A \cup B}) = 1 - 0.8 = 0.2$, o lo que es lo mismo, $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.2$ .Podemos expresar como unión disjunta $\bar{B} = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$, y por tanto $p(\bar{B}) = p(A \cap \bar{B})$ +p$(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.4 + 0.2 = 0.6$ lo que nos da $p(B) = 1 - 0.6 = 0.4$

Finalmente, como $p(A \cap B) = 0.2$ mientras que $p(A)\,p(B) = 0.24$, $A$ y $B$ no son independientes.

c) $p(A|B) = \frac{p(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{0.4} = \frac{1}{2}$.

## OPCIÓN B

**Ejercicio 1**

a) Podemos calcular $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y como $B = A^{-1} \cdot (A \cdot B)$, se sigue $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) El determinante de $A \cdot B$ es 2, con lo que $\det(A \cdot B)^{-1} = \frac{1}{2}$, y como $(A \cdot B)^{-3} = ((A \cdot B)^{-1})^3$, se tiene que $\det(A \cdot B)^{-3} = \frac{1}{8}$.

c) $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, y por tanto $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, con lo que $A \cdot A^t - A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

**Ejercicio 2**

a) Los valores de $x$ serán aquellos para los que $f'(x) = g'(x)$. Como $f'(x) = 6x - 1$, $g'(x) = 3x^2 + 1$, se tratará de los valores de $x$ para los que $6x - 1 = 3x^2 + 1$, es decir $x = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) $f(x) = g(x)$ si y sólo si $3x^2 - x + 1 = x^3 + x + 1$, lo que equivale a $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$. Esta última ecuación tiene tres raíces $x = 0,1,2$. Evaluando en $\frac{1}{2}$ podemos comprobar que $g(x) - f(x) \geq 0$ para $x \in [0,1]$, mientras que evaluando en $\frac{3}{2}$ vemos que $f(x) - g(x) \geq 0$ para $x \in [1,2]$. Por ello el área pedida es $\int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx + \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x)\,dx =$ $\left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2\right]_1^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\ u^2$.

**Ejercicio 3**

a) Un vector director de $r$ es $\vec{d}_r = (1,0,0) \times (0,1,1) = (0,-1,1)$, y uno de $s$ es $\vec{d}_s = (1,0,1) \times (0,1,0) = (-1,0,1)$. Como $r \cap s = \emptyset$ tenemos que las rectas se cruzan.

b) La perpendicular común, $t$, tendrá por vector director $\vec{d}_t = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = (-1,-1,-1)$. Un plano $\pi$ que contiene a $r$ y es paralelo a la dirección dada por $\vec{d}_t$ es $\pi: -2x + y + z - 4 = 0$. $\pi$ corta a $s$ en el punto $Q\,(-1,0,2)$. La perpendicular común es $t \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 0 - \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) Sea $P := r \cap t = (1,2,4)$ ; tenemos que $d(r,s) = d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}| = 2\sqrt{3}$ u.

**Ejercicio 4**

a) El jugador gana si obtiene un tres o un seis, lo que ocurre con probabilidad $\frac{1}{3}$ en cada tirada. La probabilidad pedida se calcula con una binomial $B(n,p)$ con $n = 4, p = \frac{1}{3}$. Así que tendremos que la probabilidad pedida es $\left(\frac{2}{3}\right)^4$.

b) $\binom{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^4$.