Universidad Zaragoza 1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2023
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican.
El/la estudiante debe indicar claramente, <u>en la primera página del tríptico</u>, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar)

1) Sea la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases} ax-\dfrac{senx}{x}+2 & , \quad x\neq 0 \\ 2 & , \quad x=0 \end{cases} , \quad a\in\mathbb{R}$$

a) (1 punto) Estudia su continuidad en $\mathbb{R}$ según los valores de a.

b) (1 punto) Calcula el valor de a para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x=-\dfrac{\pi}{2}$ y di qué tipo de extremo es.

2) Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}\right]^{\ln x}$$

3) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=-x^2+4x$ y la recta de pendiente $\dfrac{1}{2}$ que corta a $f(x)$ en $x=\dfrac{7}{2}$.

4) Dada la siguiente función

$$f(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}}$$

a) (0,75 puntos) Estudia y escribe su dominio de definición.
b) (1,25 puntos) Estudia la existencia de asíntotas y ramas parabólicas, Determina las asíntotas caso de existir.

5) Sean las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ D=A\cdot B^T-2I$$

donde B^Tes la matriz traspuesta de B, e I es la matriz identidad de orden 3.
a) (1 punto) Estudia si la matriz D tiene inversa y, en caso afirmativo, calcúlala.
b) (1 punto) Resuelve la ecuación matricial $CX=A^T\cdot B$, donde A^Tes la matriz traspuesta de A.

6) Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -x & & +mz & = & 0 \\ & my & +2z & = & 2+m^2 \\ x & +y & & = & 2m \end{cases}$$

a) (1,2 puntos) Discute según los valores de $m \in \mathbb{R}$, qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado o indeterminado, incompatible).

b) (0,8 puntos) Resuelve el sistema para el valor $m = 2$.

7) Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Calcula la matriz A^n para $n \in \mathbb{N}$.

b) (1 punto) Resuelve la ecuación $(A+2I)X = B$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

8) El plano $\pi \equiv 2x + by - 2z + 4 = 0$, $b \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0$, corta a los ejes de coordenadas en tres puntos A, B y C. Calcula los valores de $b \in \mathbb{R}$ tal que el área del triángulo que determinan estos tres puntos A, B y C sea 6 u^2.

9) Si los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son linealmente independientes,

a) (1 punto) Comprueba si los vectores $\{\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo

$$\vec{r} = 2\vec{u} + \vec{w}, \quad \vec{s} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}, \quad \vec{t} = -3\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$$

b) (1 punto) Si además, los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son ortogonales y unitarios, calcula razonadamente $\vec{u}\cdot\vec{r} + \vec{v}\cdot\vec{s} + \vec{w}\cdot\vec{t}$ donde $\cdot$ representa el producto escalar de dos vectores.

10) El contenido total en sulfitos (medido en mg/l) del vino que se produce en una bodega, sigue una distribución normal de media 150 mg/l y desviación típica 30 mg/l. La bodega se compromete a vender solamente vinos con un contenido total en sulfitos inferior a 200 mg/l, por lo que se desechan para la venta aquellos que superen esta cantidad. Se pide,

a) (1 punto) ¿Cuál es probabilidad de que un vino producido en la bodega se deseche por la elevada cantidad total de sulfitos?

b) (1 punto) ¿Qué porcentaje de los vinos producidos en esta bodega tienen un contenido total en sulfitos entre 110 y 150 mg/l?

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \le k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

1) Sea la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases} ax-\dfrac{senx}{x}+2 & , \quad x\neq 0 \\ 2 & , \quad x=0 \end{cases}, \quad a\in\mathbb{R}$$

a) (1 punto) Estudia su continuidad en $\mathbb{R}$ según los valores de a.

b) (1 punto) Calcula el valor de a para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x=-\dfrac{\pi}{2}$ y di qué tipo de extremo es.

a) Para $x\neq 0$ la función existe para todos los valores y es continua. Falta comprobar la continuidad en $x=0$.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} ax-\frac{senx}{x}+2=\lim_{x\to 0}\frac{ax^2-senx+2x}{x}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación(L´Hôpital)=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2ax-\cos x+2}{1}=\frac{2a\cdot 0-\cos 0+2}{1}=\frac{1}{1}=\boxed{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=0\neq 1=\lim_{x\to 0} f(x)$$

La función no es continua, independientemente del valor de a.
La función es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$ para todo valor de a.

b) Para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x=-\dfrac{\pi}{2}$ la derivada debe anularse.

$$\left.\begin{array}{l} f´(x)=a-\dfrac{x\cos x-senx}{x^2}, \quad para\ x\neq 0 \\ f´\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a-\frac{\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)-sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\frac{\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot 0-(-1)}{\frac{\pi^2}{4}}\Rightarrow a=\frac{1}{\frac{\pi^2}{4}}\Rightarrow \boxed{a=\frac{4}{\pi^2}}$$

El valor buscado es $a=\dfrac{4}{\pi^2}$.

Para $a=\dfrac{4}{\pi^2}$ comprobamos que tipo de extremo hay en $x=-\dfrac{\pi}{2}$.

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

En el intervalo $\left(-\infty, \frac{-\pi}{2}\right)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$f\,'(-2) = \frac{4}{\pi^2} - \frac{(-2)\cos(-2) - sen(-2)}{(-2)^2} = -0.03 < 0$. La función decrece en $\left(-\infty, \frac{-\pi}{2}\right)$.

En el intervalo $\left(\frac{-\pi}{2}, 0\right)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$f\,'(x) = \frac{4}{\pi^2} - \frac{(-1)\cos(-1) - sen(-1)}{(-1)^2} = 0.1 > 0$. La función crece en $\left(\frac{-\pi}{2}, 0\right)$. Tomamos un intervalo cercano al valor, pues no sabemos si existen más puntos críticos y por tanto, cambios de signo de la derivada.

Decrece y luego crece → En $x = -\frac{\pi}{2}$ hay un mínimo relativo.

2) Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}\right]^{\ln x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}\right]^{\ln x} = 1^{+\infty} = \text{Indeterminación(número e)} =$$

$$= e^{\lim_{x\to+\infty}(\ln x)\left[\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}-1\right]} = \ldots$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln x)\left[\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}-1\right] = \lim_{x\to+\infty}(\ln x)\left[\frac{(x+1)^2-x^2-3x-1}{x^2+3x+1}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(\ln x)\left[\frac{x^2+2x+1-x^2-3x-1}{x^2+3x+1}\right] = \lim_{x\to+\infty}(\ln x)\left[\frac{-x}{x^2+3x+1}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x\ln x}{x^2+3x+1} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación(L´Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-\ln x - x\frac{1}{x}}{2x+3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\ln x-1}{2x+3} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación(L´Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x}}{2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{2x} = \frac{-1}{\infty} = \boxed{0}$$

$$\ldots = e^0 = \boxed{1}$$

3) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=-x^2+4x$ y la recta de pendiente $\frac{1}{2}$ que corta a $f(x)$ en $x=\frac{7}{2}$.

Hallamos la ecuación de la recta de pendiente $\frac{1}{2}$ que corta a $f(x)$ en $x=\frac{7}{2}$.

$$f\left(\frac{7}{2}\right)=-\left(\frac{7}{2}\right)^2+4\left(\frac{7}{2}\right)=-\frac{49}{4}+14=\frac{7}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} pendiente=\frac{1}{2} \\ pasa\ por\left(\frac{7}{2},\frac{7}{4}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow y-\frac{7}{4}=\frac{1}{2}\left(x-\frac{7}{2}\right)\Rightarrow y-\frac{7}{4}=\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}\Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}x}$$

Debemos calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)=-x^2+4x$ y la recta $y=\frac{1}{2}x$.

Hallamos los puntos de corte de parábola y recta.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=-x^2+4x \\ y=\frac{1}{2}x\end{array}\right\}\Rightarrow -x^2+4x=\frac{x}{2}\Rightarrow -2x^2+8x=x\Rightarrow -2x^2+7x=0\Rightarrow$$

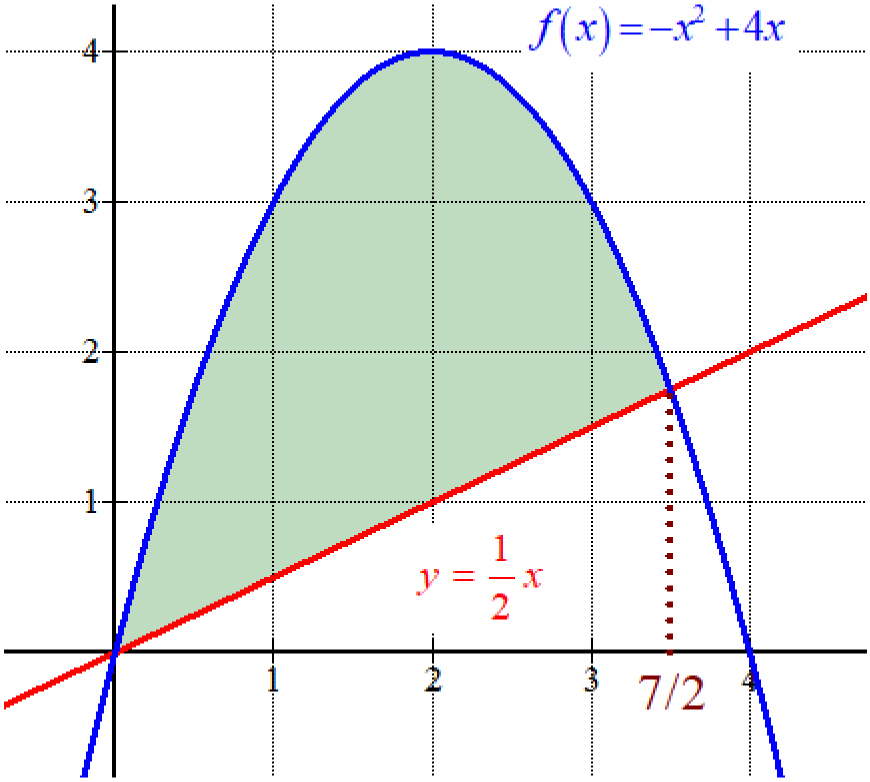
$$\Rightarrow x(-2x+7)=0\Rightarrow\begin{cases} x=0 \\ -2x+7=0\to -2x=-7\Rightarrow x=\frac{7}{2}\end{cases}$$

Calculamos la integral definida de la diferencia de las dos funciones entre 0 y 7/2.

$$\int_0^{7/2}-x^2+4x-\frac{1}{2}xdx=\int_0^{7/2}-x^2+\frac{7}{2}x\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{7}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^{7/2}=$$

$$=\left[-\frac{(7/2)^3}{3}+\frac{7(7/2)^2}{4}\right]-\left[-\frac{0^3}{3}+\frac{7\cdot 0^2}{4}\right]=\frac{343}{48}\simeq 7.15$$

El área de la región pedida es $\frac{343}{48}\simeq 7.15$ unidades cuadradas.



$f(x) = -x^2 + 4x$
$y = \frac{1}{2}x$
7/2
1
2
3
4

4) Dada la siguiente función

$$f(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}}$$

a) (0,75 puntos) Estudia y escribe su dominio de definición.
b) (1,25 puntos) Estudia la existencia de asíntotas y ramas parabólicas, Determina las asíntotas caso de existir.

a) Vemos cuando se anula el denominador.

$$x^2-x-2=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-2)}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{1+3}{2}=2=x\\ \frac{1-3}{2}=-1=x\end{cases}$$

Estos valores están excluidos del dominio.

Vemos cuando existe la raíz. Para ello debe ser el radicando positivo ($x^2-x-2>0$)

En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomamos *x = –2* y la el radicando vale $(-2)^2-(-2)-2=4>0$. La función existe en $(-\infty,-1)$.

En el intervalo $(-1,2)$ tomamos *x = 0* y la el radicando vale $0^2-0-2=-2<0$. La función **no** existe en $(-1,2)$.

En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos *x = 3* y la el radicando vale $3^2-3-2=3>0$. La función existe en $(2,+\infty)$.

El dominio de la función es $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.

b)

Asíntota vertical. $x=a$

¿ $x=2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}}=\frac{2\cdot 2-1}{\sqrt{2^2-2-2}}=\frac{3}{0}=\infty$$

$x=2$ es asíntota vertical

¿ $x=-1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}}=\frac{2(-1)-1}{\sqrt{(-1)^2-(-1)-2}}=\frac{-3}{0}=\infty$$

$x=-1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$.

$$b=\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{2x}{x}-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}=\frac{2-\frac{1}{\infty}}{\sqrt{1-\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}}=2$$

$y=2$ es asíntota horizontal cuando *x* tiende a +∞.

$$b=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x-1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x}}=\left\{\begin{array}{l}\text{Como } x<0\\ \text{introduzco en la raiz}\\ -x\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x-1}{x}}{-\frac{\sqrt{x^2-x-2}}{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x}{x}-\frac{1}{x}}{-\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{-\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}=$$

$$=\frac{2-\frac{1}{\infty}}{-\sqrt{1-\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}}=\frac{2}{-\sqrt{1}}=-2$$

$y=-2$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

No tiene, pues tiene una asíntota horizontal

La función no tiene ramas parabólicas, pues los límites en el infinito son finitos.

5) Sean las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ D=A\cdot B^T-2I$$

donde B^Tes la matriz traspuesta de B, e I es la matriz identidad de orden 3.

a) (1 punto) Estudia si la matriz D tiene inversa y, en caso afirmativo, calcúlala.

b) (1 punto) Resuelve la ecuación matricial $CX=A^T\cdot B$, donde A^Tes la matriz traspuesta de A.

a) Calculamos la expresión de la matriz D.

$$D=A\cdot B^T-2I=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & -2+1 & 4\\ 2 & 2 & -4\\ 1 & 1-1 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 4\\ 2 & 2 & -4\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{D=\begin{pmatrix}-4 & -1 & 4\\ 2 & 0 & -4\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}}$$

Comprobamos que su determinante es no nulo.

$$|D|=\begin{vmatrix}-4 & -1 & 4\\ 2 & 0 & -4\\ 1 & 0 & -4\end{vmatrix}=0+4+0-0-8-0=-4\neq 0$$

Existe la inversa de la matriz D. La calculamos.

$$D^{-1}=\frac{Adj\left(D^T\right)}{|D|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-4 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 4 & -4 & -4\end{pmatrix}}{-4}=\frac{-1}{4}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0 & 0\\ -4 & -4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 4 & -4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 0\\ 4 & -4\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 1\\ -4 & -4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-4 & 1\\ 4 & -4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 4 & -4\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-4 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-4 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{D^{-1}=\frac{-1}{4}\begin{pmatrix}0 & -4 & 4\\ 4 & 12 & -8\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & -3 & 2\\ 0 & 1/4 & -1/2\end{pmatrix}}$$

b) Despejamos X en la ecuación matricial $CX = A^T \cdot B$.

$$CX = A^T \cdot B \Rightarrow X = C^{-1} \cdot A^T \cdot B$$

Determinamos la expresión de la matriz X.

$$C^{-1} = \frac{Adj\left(C^T\right)}{|C|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}{-3} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = C^{-1} \cdot A^T \cdot B = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2+2-2 & 0+2+0 \\ 1+0+2 & 0+0+0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -8/3 & 2/3 \end{pmatrix}}$$

6) Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -x & & +mz & = & 0 \\ & my & +2z & = & 2+m^2 \\ x & +y & & = & 2m \end{cases}$$

a) (1,2 puntos) Discute según los valores de $m \in \mathbb{R}$, qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado o indeterminado, incompatible).
b) (0,8 puntos) Resuelve el sistema para el valor *m = 2*.

a) La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & m \\ 0 & m & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & m & 0 \\ 0 & m & 2 & 2+m^2 \\ 1 & 1 & 0 & 2m \end{pmatrix}$$

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & m \\ 0 & m & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+0+0-m^2-0+2 = -m^2+2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -m^2+2=0 \Rightarrow m^2=2 \Rightarrow m=\pm\sqrt{2}$$

Estudiamos tres casos distintos.

CASO 1. $m \neq \pm\sqrt{2}$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B e igual que el número de incógnitas.
El sistema es compatible determinado (única solución)

CASO 2. $m = +\sqrt{2}$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Las matrices quedan $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A/B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de ambas utilizando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^{a} + \text{Fila } 1^{a} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 2\sqrt{2} \\ -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \hline 0 & 1 & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^{a} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 & 4 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2}\cdot \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad \sqrt{2} \quad 2 \quad 4 \\ 0 \quad -\sqrt{2} \quad -2 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\overbrace{\begin{array}{cccc} -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 & 4 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} & & & 0 \end{array}}^{A/B} \right)$$

La matriz A tiene rango 2, al igual que la matriz A/B, siendo menor que el número de incógnitas. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $m = -\sqrt{2}$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Las matrices quedan $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A/B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de ambas utilizando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 0 \quad -2\sqrt{2} \\ -1 \quad 0 \quad -\sqrt{2} \quad 0 \\ \hline 0 \quad 1 \quad -\sqrt{2} \quad -2\sqrt{2} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2}\cdot \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad \sqrt{2} \quad -2 \quad -4 \\ 0 \quad -\sqrt{2} \quad 2 \quad 4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\overbrace{\begin{array}{cccc} -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 & 4 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} & & & 0 \end{array}}^{A/B} \right)$$

La matriz A tiene rango 2, al igual que la matriz A/B, siendo menor que el número de incógnitas. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para $m = 2$ el sistema es compatible determinado (CASO 1).
Lo resolvemos.

$$\begin{cases} -x & & +2z & = & 0 \\ & 2y & +2z & = & 6 \\ x & +y & & = & 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x & & +2z & = & 0 \\ & y & +z & = & 3 \\ x & +y & & = & 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 1ª + Ecuación 3ª} \\ \begin{array}{cccl} -x & & +2z & = 0 \\ x & +y & & = 4 \\ \hline & y & +2z & = 4 \end{array} \to \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x & & +2z & = & 0 \\ & y & +z & = & 3 \\ & y & +2z & = & 4 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{cccc} y & +2z & = & 4 \\ -y & -z & = & -3 \\ \hline & z & = & 1 \end{array} \to \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x+2z=0 \\ y+z=3 \\ \boxed{z=1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+2=0 \to \boxed{x=2} \\ y+1=3 \to \boxed{y=2} \end{cases}$$

La solución es $x = 2, y = 2, z = 1$.

7) Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Calcula la matriz A^n para $n \in \mathbb{N}$.

b) (1 punto) Resuelve la ecuación $(A+2I)X = B$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

a) Calculamos las potencias sucesivas de la matriz A, en busca de alguna regularidad.

$$A^2=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4}-1 & \frac{1}{2}-2 \\ -\frac{1}{2}+2 & -1+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-3}{4} & \frac{-3}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{(-3)^{2-1}}{2^2} & \frac{(-3)^{2-1}}{2^{2-1}} \\ \frac{-(-3)^{2-1}}{2^{2-1}} & \frac{-(-3)^{2-1}}{2^{2-2}} \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} \frac{-3}{4} & \frac{-3}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-3}{8}+\frac{3}{2} & \frac{-3}{4}+3 \\ \frac{3}{4}-3 & \frac{3}{2}-6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{9}{8} & \frac{9}{4} \\ \frac{-9}{4} & \frac{-9}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{(-3)^{3-1}}{2^3} & \frac{(-3)^{3-1}}{2^{3-1}} \\ \frac{-(-3)^{3-1}}{2^{3-1}} & \frac{-(-3)^{3-1}}{2^{3-2}} \end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix} \frac{9}{8} & \frac{9}{4} \\ \frac{-9}{4} & \frac{-9}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{9}{16}-\frac{9}{4} & \frac{9}{8}-\frac{9}{2} \\ \frac{-9}{8}+\frac{9}{2} & \frac{-9}{4}+9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-27}{16} & \frac{-27}{8} \\ \frac{27}{8} & \frac{27}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{(-3)^{4-1}}{2^4} & \frac{(-3)^{4-1}}{2^{4-1}} \\ \frac{-(-3)^{4-1}}{2^{4-1}} & \frac{-(-3)^{4-1}}{2^{4-2}} \end{pmatrix}$$

....

$$A^n=\begin{pmatrix} \frac{(-3)^{n-1}}{2^n} & \frac{(-3)^{n-1}}{2^{n-1}} \\ \frac{-(-3)^{n-1}}{2^{n-1}} & \frac{-(-3)^{n-1}}{2^{n-2}} \end{pmatrix}$$

OTRA FORMA DE OBTENERLO

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot 2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}=\left(\frac{1}{2}\right)^2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2\begin{pmatrix} 1-4 & 2-8 \\ -2+8 & -4+16 \end{pmatrix}=\left(\frac{1}{2}\right)^2\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}=\left(\frac{1}{2}\right)^2(-3)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}=\frac{-3}{2^2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \frac{-3}{2^2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \frac{-3}{2^3}\begin{pmatrix} 1-4 & 2-8 \\ -2+8 & -4+16 \end{pmatrix} = \frac{-3}{2^3}\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-3}{2^3}(-3)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \frac{(-3)^2}{2^3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

...

$$\boxed{A^n = \frac{(-3)^{n-1}}{2^n}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}}$$

b) Despejamos la matriz X de la ecuación $(A+2I)X = B$.

$$(A+2I)X = B \Rightarrow X = (A+2I)^{-1}B$$

Comprobamos que A + 2I tiene inversa y la calculamos.

$$A+2I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A+2I| = \begin{vmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$(A+2I)^{-1} = \frac{Adj(A+2I)^T}{|A+2I|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de X.

$$X = (A+2I)^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3+5 & 5+\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 15/2 \end{pmatrix}}$$

8) El plano $\pi \equiv 2x+by-2z+4=0$, $b \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0$, corta a los ejes de coordenadas en tres puntos *A*, *B* y *C*. Calcula los valores de $b \in \mathbb{R}$ tal que el área del triángulo que determinan estos tres puntos *A*, *B* y *C* sea 6 u^2.

Hallamos los puntos de corte con cada uno de los ejes de coordenadas.

$$A \to \begin{cases} \pi \equiv 2x+by-2z+4=0 \\ OX: \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow 2x+4=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow A(-2,0,0)$$

$$B \to \begin{cases} \pi \equiv 2x+by-2z+4=0 \\ OY: \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow by+4=0 \Rightarrow y=\frac{-4}{b} \Rightarrow B\left(0,\frac{-4}{b},0\right)$$

$$C \to \begin{cases} \pi \equiv 2x+by-2z+4=0 \\ OZ: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow -2z+4=0 \Rightarrow z=2 \Rightarrow C(0,0,2)$$

El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = \left(0,\frac{-4}{b},0\right)-(-2,0,0)=\left(2,\frac{-4}{b},0\right) \\ \overrightarrow{AC}=(0,0,2)-(-2,0,0)=(2,0,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & \frac{-4}{b} & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$=\frac{-8}{b}i+\frac{8}{b}k-4j=\left(-\frac{8}{b},-4,\frac{8}{b}\right)$$

$$Área = \frac{\sqrt{\left(-\frac{8}{b}\right)^2+(-4)^2+\left(\frac{8}{b}\right)^2}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{64}{b^2}+16+\frac{64}{b^2}}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{128}{b^2}+16}}{2}$$

Igualamos el valor del área a 6 y obtenemos el valor de *b*.

$$Área = 6 \Rightarrow \frac{\sqrt{\frac{128}{b^2}+16}}{2}=6 \Rightarrow \sqrt{\frac{128}{b^2}+16}=12 \Rightarrow \frac{128}{b^2}+16=12^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{128}{b^2}=128 \Rightarrow b^2=1 \Rightarrow \boxed{b=\sqrt{1}=\pm 1}$$

Los valores de *b* buscados son –1 y +1.

9) Si los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son linealmente independientes,

a) (1 punto) Comprueba si los vectores $\{\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo

$$\vec{r}=2\vec{u}+\vec{w}, \quad \vec{s}=\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}, \quad \vec{t}=-3\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}$$

b) (1 punto) Si además, los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son ortogonales y unitarios, calcula razonadamente $\vec{u}\cdot\vec{r}+\vec{v}\cdot\vec{s}+\vec{w}\cdot\vec{t}$ donde $\cdot$ representa el producto escalar de dos vectores.

a) Comprobamos si el producto mixto de los vectores en nulo o no.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{r}=2\vec{u}+\vec{w}\Rightarrow \vec{r}=(2,0,1) \\ \vec{s}=\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}\Rightarrow \vec{s}=(1,1,-1) \\ \vec{t}=-3\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}\Rightarrow \vec{t}=(-3,-1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}\right]=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2+0-1+3+0-2=2\neq 0$$

Los vectores $\{\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}\}$ son linealmente independientes.

b)

$$\vec{u}\cdot\left(2\vec{u}+\vec{w}\right)+\vec{v}\cdot\left(\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}\right)+\vec{w}\cdot\left(-3\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}\right)=$$

$$=2\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{w}-3\vec{w}\cdot\vec{u}-\vec{w}\cdot\vec{v}+\vec{w}\cdot\vec{w}=$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Por ser unitarios} \\ \vec{u}\cdot\vec{u}=1 \\ \vec{v}\cdot\vec{v}=1 \\ \vec{w}\cdot\vec{w}=1 \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l} \text{Por ser ortogonales} \\ \vec{u}\cdot\vec{w}=0 \\ \vec{v}\cdot\vec{u}=0 \\ \vec{w}\cdot\vec{v}=0 \end{array}\right\}=2+0+0+1-0-0-0+1=\boxed{4}$$

10) El contenido total en sulfitos (medido en mg/l) del vino que se produce en una bodega, sigue una distribución normal de media 150 mg/l y desviación típica 30 mg/l. La bodega se compromete a vender solamente vinos con un contenido total en sulfitos inferior a 200 mg/l, por lo que se desechan para la venta aquellos que superen esta cantidad. Se pide,
a) (1 punto) ¿Cuál es probabilidad de que un vino producido en la bodega se deseche por la elevada cantidad total de sulfitos?
b) (1 punto) ¿Qué porcentaje de los vinos producidos en esta bodega tienen un contenido total en sulfitos entre 110 y 150 mg/l?

X = El contenido total en sulfitos (medido en mg/l) del vino.
X = N(150, 30)

a) Nos piden determinar $P(X \geq 200)$

$$P(X \geq 200) = \left\{ \begin{array}{l} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X-150}{30} \end{array} \right\} = P\left(Z \geq \frac{200-150}{30} \right) = P(Z \geq 1.67) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.67) = \{\text{Miramos en la tabla N}(0,1)\} = 1 - 0.9525 = \boxed{0.0475}$$

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616

b)

$$P(110 \leq X \leq 150) = \left\{ \begin{array}{l} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X-150}{30} \end{array} \right\} = P\left(\frac{110-150}{30} \leq \frac{X-150}{30} \leq \frac{150-150}{30} \right) =$$

$$= P(-1.33 \leq Z \leq 0) = P(Z \leq 0) - P(Z \leq -1.33) =$$

$$= 0.5 - P(Z \geq 1.33) = 0.5 - [1 - P(Z \leq 1.33)] =$$

$$= \{\text{Miramos en la tabla N}(0,1)\} = 0.5 - [1 - 0.9082] = \boxed{0.4082}$$

El porcentaje de los vinos producidos en esta bodega que tienen un contenido total en sulfitos entre 110 y 150 mg/l es del 40.82 %.

k	0.00	0.01	0.02	0.03
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236