



Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades. Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4.

Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic, o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

P1. — Considera la matriu M i el vector \mathbf{b} ,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ a+1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

respectivament.

- (a) [3 punts] Indica per a quins valors de a la matriu M és invertible.
- (b) [3 punts] Calcula, per a tots els valors de a que sigui possible, la inversa de M .
- (c) [4 punts] Calcula, per al cas $a = 0$, el vector \mathbf{x} tal que $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

P2. — Considera les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

i sigui O la matriu nul·la d'ordre 2×2 .

- (a) [4 punts] Calcula totes les matrius X tals que $AX - X = B$.
- (b) [3 punts] Troba una matriu Y diferent de O tal que $(A - B)Y = O$.
- (c) [3 punts] Indica totes les matrius Z que compleixen la igualtat $AZ = O$.

P3. — Considera el pla $\pi : 2x + 3y + z - 6 = 0$.

- (a) [3 punts] Determina els vèrtexs del triangle que ve determinat per la intersecció del pla amb els eixos de coordenades.
- (b) [3 punts] Calcula l'àrea del triangle anterior.
- (c) [4 punts] Sigui A el vèrtex del triangle sobre l'eix d'abscisses (eix OX). Calcula la recta perpendicular al pla que passa per A .



P4. — Siguin a i b dues constants reals no nul·les.

Considerem el pla $\pi : x + ay - 2z = 3$ i la recta

$$r : \begin{cases} x + bz = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

- (a) [4 punts] Per a quins valors de a i b la recta r és perpendicular al pla π ? Per a aquests casos concrets, calcula el punt de tall entre r i π , i calcula o justifica quina és la distància de la recta al pla.
- (b) [3 punts] Per a quins valors de a i b la recta r és paral·lela al pla π ?
- (c) [3 punts] Existeixen alguns valors de a i b per als quals la recta r està continguda en el pla π ?

P5. — La quantitat de tones d'aigua infectada per un bacteri s'espera que segueixi la funció $f(x) = e^{-x} + 0.15x + 1$ sent $x \geq 0$ els dies d'infecció i $f(x)$ les tones d'aigua infectada.

- (a) [4 punts] Quantes tones d'aigua hi havia inicialment infectades pel bacteri? Cap a quin valor tendeix la quantitat d'aigua infectada? Interpreta els resultats.
- (b) [4 punts] En quin moment hi ha menys quantitat d'aigua infectada? Quantes tones hi ha en aquell moment?
- (c) [2 punts] Hi ha algun moment en què l'aigua no estigui infectada? Justifica la resposta.

P6. — [10 punts] Representa la regió compresa entre la corba $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, l'eix d'abscisses (eix OX) i les rectes $x = 0$ i $x = 7$. Calcula'n l'àrea.

P7. — Un espai mostral conté dos successos A i B . Sabent que $P(A \cap B) = 0.3$, $P(A/B) = P(B/A)$ i $P(A^c) = 0.4$ (sent A^c el succés complementari), calcula:

- (a) [2 punts] $P(B/A)$.
- (b) [3 punts] $P(B)$.
- (c) [3 punts] $P(A^c \cap B^c)$.
- (d) [2 punts] Són A i B successos independents?

P8. — El pes dels nadons segueix una distribució normal de mitjana $\mu = 3.1$ kg i desviació típica σ desconeguda. Se sap que només el 30.5% dels nadons pesa més de 3.8 kg. Calcula, arrodonint els resultats a 4 decimals,

- (a) [4 punts] Quina és la desviació típica?
- (b) [3 punts] Suposant que $\sigma = 1.3725$, quina és la probabilitat que un nadó pesi menys de 2.7 kg?
- (c) [3 punts] Suposant que $\sigma = 1.3725$, quina és la probabilitat que un nadó pesi entre 2.7 i 3.5 kg?

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0, 1)$.