Universidad de Cantabria

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – JUNIO 2023

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES

1. Debe escogerse sólo cuatro ejercicios elegidos entre los ocho de que consta el examen.
2. Si realizan más de cuatro ejercicios sólo se corregirán los cuatro primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
3. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
4. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
5. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x+3y+z=-1 \\ x-y+z=a \\ -x+y-2z=-3 \end{cases}$$

dado en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

1) [1,25 PUNTOS] Determine para qué valores de a el sistema es incompatible.
2) [1,25 PUNTOS] Dado $a = 4$, resuelva el sistema anterior si es posible.

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x}$.

1) [0,5 PUNTOS] Determine el conjunto de puntos de discontinuidad de $f(x)$.
2) [1 PUNTO] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
3) [1 PUNTO] Determine si $f(x)$ tiene asíntota(s). En caso afirmativo, calcúlela(s).

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Calcule las ecuaciones de las rectas de los lados de un triángulo que tiene como vértices a los puntos $A=(0,0,1)$, $B=(4,1,2)$ y $C=(3,4,3)$.

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

En cierta región, el 72% de las mujeres vive al menos 71 años y el 52% vive al menos 80 años. Si una mujer determinada de esa región tiene 71 años, ¿cuál es la probabilidad de que vaya a vivir al menos hasta los 80 años?

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considere la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & a\\ 2 & 0 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$.

1) [0,5 PUNTOS] Calcule el determinante de A en función del parámetro a.
2) [0,75 PUNTOS] Calcule el rango de A en función del parámetro a.
3) [0,5 PUNTOS] Determine para qué valores de a la matriz A tiene inversa.
4) [0,75 PUNTOS] Sea B el conjunto de los $a \in \mathrm{R}$ tales que A tiene inversa. Calcule la inversa de A para los diferentes valores del parámetro $a \in B$.

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x)=x^3+1$.

1) [0,5 PUNTOS] Calcule una primitiva de $f(x)$.
2) [1 PUNTO] Calcule los puntos de inflexión de $f(x)$ si los hubiera.
3) [1 PUNTO] Calcule el área del recinto limitado por $f(x)$, el eje OX de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considere los planos

$$\pi_1 : 2x-3y+5z=a$$

$$\pi_2 : bx+3y-5z=4$$

en función de los parámetros a, $b \in \mathrm{R}$. Determine si es posible asignar algún valor a los parámetros a y b para que los planos π_1 y π_2:
1) [0,5 PUNTOS] Sean coincidentes. En caso afirmativo de un valor para a y b.
2) [1 PUNTO] Sean paralelos. En caso afirmativo de un valor para a y b.
3) [1 PUNTO] Se corten en una recta. En caso afirmativo de un valor para a y b.

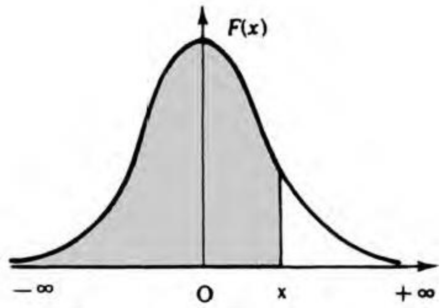
Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

Sean A y B dos sucesos independientes asociados a un experimento aleatorio con $P(A)=0,5$ y $P(B)=0,25$.

1) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(A \cup B)$.
2) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(A^c)$ y $P(B^c)$, donde A^c y B^c denotan el suceso contrario de A y de B respectivamente.
3) [1 PUNTO] Razone si A^c y B^c son independientes.
4) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(A^c \cup B^c)$.

Distribución normal

$$F(x) = p(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

SOLUCIONES

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x+3y+z=-1 \\ x-y+z=a \\ -x+y-2z=-3 \end{cases}$$

dado en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

1) [1,25 PUNTOS] Determine para qué valores de a el sistema es incompatible.
2) [1,25 PUNTOS] Dado $a = 4$, resuelva el sistema anterior si es posible.

1)

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & a \\ -1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Estudiamos el rango de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=4-3+1-1+6-2=5\neq 0$$

El rango de la matriz A es 3.
Por lo que el rango de la matriz ampliada también es 3, al igual que el número de incógnitas.
El sistema es compatible determinado para cualquier valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$.
No existe ningún valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para el que el sistema es incompatible.

2) Para $a = 4$ el sistema es compatible determinado. Hallamos su solución.

$$\begin{cases} 2x+3y+z=-1 \\ x-y+z=4 \\ -x+y-2z=-3 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^{\text{a}} + \text{Ecuación 2}^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrr} -x & +y & -2z & =-3 \\ x & -y & +z & =4 \\ \hline & & -z & =1 \end{array} \to \text{Nueva ecuación 3}^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+3y+z=-1 \\ x-y+z=4 \\ \quad -z=1 \to \boxed{z=-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y-1=-1 \\ x-y-1=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y=0 \\ x-y=5 \to x=5+y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(5+y)+3y=0 \Rightarrow 10+2y+3y=0 \Rightarrow 5y=-10 \Rightarrow \boxed{y=-2} \Rightarrow \boxed{x=5-2=3}$$

La solución es $x = 3$; $y = -2$; $z = -1$.

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x}$.

1) [0,5 PUNTOS] Determine el conjunto de puntos de discontinuidad de *f(x)*.
2) [1 PUNTO] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*(*x*).
3) [1 PUNTO] Determine si *f*(*x*) tiene asíntota(s). En caso afirmativo, calcúlela(s).

1) El denominador se anula en $x = 0$. El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{0\}$.

La función es discontinua en $x = 0$.

2) Utilizamos la derivada.

$$f(x)=\frac{x^2-x+2}{x}=\frac{x^2}{x}-\frac{x}{x}+\frac{2}{x}=x-1+\frac{2}{x}\Rightarrow f'(x)=1-\frac{2}{x^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=1-\dfrac{2}{x^2} \\ f'(x)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow 1-\frac{2}{x^2}=0\Rightarrow\frac{2}{x^2}=1\Rightarrow 2=x^2\Rightarrow\boxed{x=\pm\sqrt{2}}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores (incluimos $x=0$).

En el intervalo $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2)=1-\dfrac{2}{(-2)^2}=\dfrac{1}{2}>0$. La función crece en $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)$.

En el intervalo $\left(-\sqrt{2},0\right)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1)=1-\dfrac{2}{(-1)^2}=-1<0$. La función decrece en $\left(-\sqrt{2},0\right)$.

En el intervalo $\left(0,\sqrt{2}\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=1-\dfrac{2}{1^2}=-1<0$. La función decrece en $\left(0,\sqrt{2}\right)$.

En el intervalo $\left(\sqrt{2},+\infty\right)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2)=1-\dfrac{2}{2^2}=\dfrac{1}{2}>0$. La función crece en $\left(\sqrt{2},+\infty\right)$.

La función crece en $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$ y decrece en $\left(-\sqrt{2},0\right)\cup\left(0,\sqrt{2}\right)$.

3)

Asíntota vertical. $x=a$

¿$x=0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x + 2}{x} = \frac{2}{0} = \infty$$

$x = 0$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$.

$$b = \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x} = \lim_{x\to +\infty} x - 1 + \frac{2}{x} = +\infty - 1 + \frac{2}{\infty} = +\infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x - 1 + \frac{2}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x} - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = \lim_{x\to\infty} 1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = 1 - 0 + 0 = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - mx \right) = \lim_{x\to\infty} \left(x - 1 + \frac{2}{x} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \left(-1 + \frac{2}{x} \right) = -1 + \frac{2}{\infty} = -1$$

La asíntota oblicua tiene ecuación $y = x - 1$.

La función tiene una asíntota vertical $x = 0$ y una asíntota oblicua $y = x - 1$.

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]
Calcule las ecuaciones de las rectas de los lados de un triángulo que tiene como vértices a los puntos $A=(0,0,1)$, $B=(4,1,2)$ y $C=(3,4,3)$.

Recta que pasa por A y B.

$$\left.\begin{array}{l} A=(0,0,1) \\ B=(4,1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{v_r}=\overrightarrow{AB}=(4,1,2)-(0,0,1)=(4,1,1) \\ B=(4,1,2)\in r \end{array}\right\} \Rightarrow r:\begin{cases} x=4+4\lambda \\ y=1+\lambda \quad , \lambda\in\mathbb{R} \\ z=2+\lambda \end{cases}$$

Recta que pasa por A y C.

$$\left.\begin{array}{l} A=(0,0,1) \\ C=(3,4,3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{u_s}=\overrightarrow{AC}=(3,4,3)-(0,0,1)=(3,4,2) \\ A=(0,0,1)\in s \end{array}\right\} \Rightarrow s:\begin{cases} x=3\alpha \\ y=4\alpha \quad , \alpha\in\mathbb{R} \\ z=1+2a \end{cases}$$

Recta que pasa por B y C.

$$\left.\begin{array}{l} C=(3,4,3) \\ B=(4,1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{w_t}=\overrightarrow{BC}=(3,4,3)-(4,1,2)=(-1,3,1) \\ B=(4,1,2)\in t \end{array}\right\} \Rightarrow t:\begin{cases} x=4-\beta \\ y=1+3\beta , \ \beta\in\mathbb{R} \\ z=2+\beta \end{cases}$$

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

En cierta región, el 72% de las mujeres vive al menos 71 años y el 52% vive al menos 80 años. Si una mujer determinada de esa región tiene 71 años, ¿cuál es la probabilidad de que vaya a vivir al menos hasta los 80 años?

Llamamos A al suceso "Una mujer vive al menos 71 años" y B al suceso "Una mujer vive al menos 80 años.

Nos piden calcular $P(B/A)$.

Como sabemos que el suceso intersección de A y B es:

$$A \cap B = \{\text{Vive al menos 71 y vive al menos 80 años}\} = \{\text{Vive al menos 80 años}\} = B$$

Aplicamos el teorema de Bayes y tenemos:

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{0.52}{0.72} = \boxed{\frac{13}{18} \simeq 0.7223}$$

OTRA FORMA DE RAZONARLO.

Supongamos que hay 100 mujeres. De ellas hay 72 que viven al menos 71 años y 28 que viven menos de 71 años. De las 72 que viven al menos 71 años hay 52 que viven al menos 80 años.

Si hemos elegido una de las 72 que viven al menos 71 años la probabilidad de que vaya a vivir al menos hasta los 80 años es el cociente entre 52 (casos favorables) y 72 (casos posibles).

$$P(\text{Una mujer de 71 años viva al menos 80 años}) = \frac{52}{72} = \boxed{\frac{13}{18} \simeq 0.7223}$$

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considere la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & a\\ 2 & 0 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

1) [0,5 PUNTOS] Calcule el determinante de A en función del parámetro a.
2) [0,75 PUNTOS] Calcule el rango de A en función del parámetro a.
3) [0,5 PUNTOS] Determine para qué valores de a la matriz A tiene inversa.
4) [0,75 PUNTOS] Sea B el conjunto de los $a \in$ R tales que A tiene inversa. Calcule la inversa de A para los diferentes valores del parámetro $a \in B$.

1)

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & a\\ 2 & 0 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=0-6+2a-0-2-3=\boxed{2a-11}$$

2) El rango de A puede ser 3, 2 o 1.
Para que el rango sea 3 su determinante debe ser no nulo.

$$\left.\begin{array}{l}|A|=2a-11\\ |A|=0\end{array}\right\}\Rightarrow 2a-11=0\Rightarrow 2a=11\Rightarrow a=\frac{11}{2}$$

Si $a\neq\frac{11}{2}$ el determinante es no nulo y su rango es 3.

Si $a=\frac{11}{2}$ el determinante es nulo y su rango no es 3.

Su rango puede ser 2. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de eliminar la fila y columna 3ª y comprobamos el valor nulo o no de su determinante.

$$\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=2\neq 0$$

El rango de A es 2.

Resumiendo: Si $a\neq\frac{11}{2}$ el rango de A es 3. Si $a=\frac{11}{2}$ el rango es 2.

3) La matriz A tiene inversa para $a\neq\frac{11}{2}$. Visto en el apartado 2) que el determinante se anula para $a=\frac{11}{2}$.

4) Calculamos la inversa para los valores $a\neq\frac{11}{2}$.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & a\\ 2 & 0 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=2a-11$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^{T}\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ a & 3 & -1\end{pmatrix}}{2a-11}=\frac{1}{2a-11}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix}0 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 1\\ a & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 0\\ a & 3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ a & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ a & 3\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}2 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{2a-11}\begin{pmatrix}-3 & a-1 & -3\\ 8 & -1-2a & -3+2a\\ 2 & -3 & 2\end{pmatrix}}$$

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x)=x^3+1$.

1) [0,5 PUNTOS] Calcule una primitiva de $f(x)$.

2) [1 PUNTO] Calcule los puntos de inflexión de $f(x)$ si los hubiera.

3) [1 PUNTO] Calcule el área del recinto limitado por $f(x)$, el eje OX de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

1)

$$F(x)=\int f(x)dx=\int x^3+1dx=\frac{x^4}{4}+x+K$$

Una primitiva puede ser con $k = 0$ → $F(x)=\frac{x^4}{4}+x$

2) Utilizamos la segunda derivada.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2 \Rightarrow f''(x)=6x \\ f''(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 6x=0 \Rightarrow x=0$$

Como $f'''(x)=6 \Rightarrow f'''(0)=6\neq 0$ la función tiene un punto de inflexión en $x = 0$.

3) Averiguamos los puntos de corte de la función con el eje OX.

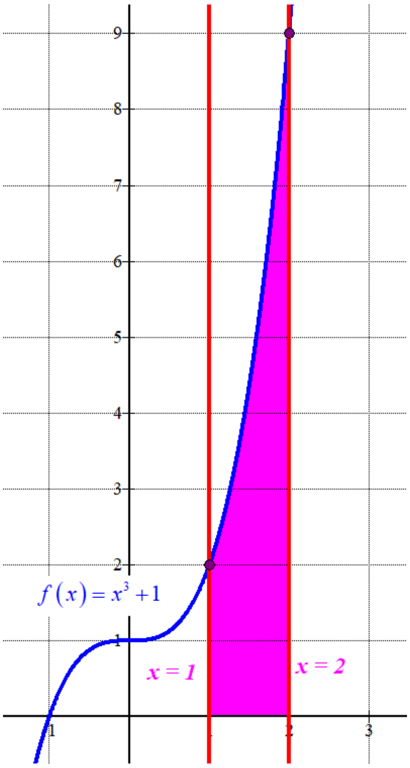
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3+1 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3+1=0 \Rightarrow x^3=-1 \Rightarrow x=\sqrt[3]{-1}=-1\notin(1,2)$$

El área del recinto será el valor absoluto de la integral definida de la función entre 1 y 2.

$$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 x^3+1dx=\left[\frac{x^4}{4}+x\right]_1^2=$$

$$=\left[\frac{2^4}{4}+2\right]-\left[\frac{1^4}{4}+1\right]=4+2-\frac{1}{4}-1=\frac{19}{4}$$

$$\boxed{Área=\frac{19}{4}=4.75\ u^2}$$



Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considere los planos

$$\pi_1 : 2x-3y+5z=a$$

$$\pi_2 : bx+3y-5z=4$$

en función de los parámetros *a*, *b* $\in$ R. Determine si es posible asignar algún valor a los parámetros *a* y *b* para que los planos π_1 y π_2:

1) [0,5 PUNTOS] Sean coincidentes. En caso afirmativo de un valor para *a* y *b*.
2) [1 PUNTO] Sean paralelos. En caso afirmativo de un valor para *a* y *b*.
3) [1 PUNTO] Se corten en una recta. En caso afirmativo de un valor para *a* y *b*.

1) Para que sean coincidentes los vectores normales deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 : 2x-3y+5z=a \Rightarrow \overrightarrow{n_1}=(2,-3,5) \\ \pi_2 : bx+3y-5z=4 \Rightarrow \overrightarrow{n_2}=(b,3,-5) \\ \pi_1 \parallel \pi_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{b}=\frac{-3}{3}=\frac{5}{-5} \Rightarrow \frac{2}{b}=-1 \Rightarrow \boxed{b=-2}$$

Además, un punto cualquiera de uno de los planos debe de pertenecer al otro.

$$\left.\begin{array}{l} \pi_2 : -2x+3y-5z=4 \\ y=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2x=4 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow P(-2,0,0) \in \pi_2$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 : 2x-3y+5z=a \\ P(-2,0,0) \in \pi_1 \end{array}\right\} \Rightarrow -4-0+0=a \Rightarrow \boxed{a=-4}$$

Si $a=-4; b=-2$ los planos $\pi_1 : 2x-3y+5z=-4; \pi_2 : -2x+3y-5z=4$ son coincidentes.

2) Para que sean paralelos los vectores normales deben tener coordenadas proporcionales. Visto en el apartado 1) → $b=-2$.
Pero los puntos de un plano no pueden pertenecer al otro → $a \neq -4$.

Si $a \neq -4; b=-2$ los planos $\pi_1 : 2x-3y+5z=a; \pi_2 : -2x+3y-5z=4$ son paralelos.

3) Para que sean secantes los vectores normales no deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 : 2x-3y+5z=a \Rightarrow \overrightarrow{n_1}=(2,-3,5) \\ \pi_2 : bx+3y-5z=4 \Rightarrow \overrightarrow{n_2}=(b,3,-5) \\ \pi_1 \ y \ \pi_2 \text{ secantes} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{b} \neq \frac{-3}{3}=\frac{5}{-5} \Rightarrow \frac{2}{b} \neq -1 \Rightarrow \boxed{b \neq -2}$$

Si $b \neq -2$ y siendo "*a*" cualquier valor los planos son secantes.

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

Sean A y B dos sucesos independientes asociados a un experimento aleatorio con $P(A)=0,5$ y $P(B)=0,25$.

1) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(A \cup B)$.
2) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(A^c)$ y $P(B^c)$, donde A^c y B^c denotan el suceso contrario de A y de B respectivamente.
3) [1 PUNTO] Razone si A^c y B^c son independientes.
4) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(A^c \cup B^c)$.

Si A y B son dos sucesos independientes entonces $P(A\cap B)=P(A)P(B)=0.5\cdot 0.25=0.125$.

1)

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.5+0.25-0.125=\boxed{0.625}$$

2)

$$P(A^c)=1-P(A)=1-0.5=\boxed{0.5}$$

$$P(B^c)=1-P(B)=1-0.25=\boxed{0.75}$$

3) Para que A^c y B^c sean dos sucesos independientes debe ser $P(A^C\cap B^C)=P(A^C)P(B^C)$.

$$P(A^C\cap B^C)=P\left((A\cup B)^C\right)=1-P(A\cup B)=1-0.625=0.375$$

$$P(A^C)P(B^C)=0.5\cdot 0.75=0.375$$

$$\boxed{P(A^C\cap B^C)=0.375=P(A^C)P(B^C)}$$

Los sucesos A^c y B^c son independientes.

4)

$$P(A^c\cup B^c)=P\left((A\cap B)^C\right)=1-P(A\cap B)=1-0.125=\boxed{0.875}$$