CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA
Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade
Convocatoria ordinaria 2023
Código: 20

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas**.

1. Números y Álgebra:
Despeje la matriz X de la ecuación $XA = A + XB$, si A y B son matrices cuadradas tales que $A-B$ es invertible. Luego, calcule X si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \left(A^2 - A - I\right)^{-1}$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

2. Números y Álgebra:
Discuta, según los valores de m, el sistema $\begin{cases} mx + \left(2+m^2\right)y = 1+m \\ my - z = 1 \\ mx + 2y + (2m-4)z = 5 \end{cases}$

3. Análisis
a) Si $f(x) = ae^x + b$, diga qué valores deben tener a y b para que se cumplan $f(0) = 0$ y $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 3$
b) Estudie si la función $f(x) = x + \sin x$ tiene extremos o puntos de inflexión en el intervalo $(0,2\pi)$, diga dónde están en caso de que existan y esboce la gráfica de f en ese intervalo.

4. Análisis:
Calcule el área de la región determinada por las desigualdades $x \geq 1, y \leq x$ e $y \geq f(x)$, con $f(x) = x\ln x$. Haga un esbozo gráfico de la región. **Nota**: $\ln x$ es el logaritmo neperiano de x.

5. Geometría:
a) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $P(2,-1,0)$ y $Q(3,0,0)$ y la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $R(0,4,-2)$ y es paralelo a los vectores $\vec{u}(1,0,-1)$ y $\vec{v}(2,1,-2)$.
b) Calcule el ángulo agudo que forma la recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ con el plano $\pi: x + z + 2 = 0$.

6. Geometría:
a) Calcule el punto simétrico de $P(2,-1,0)$ con respecto al plano $\pi: x + z + 2 = 0$.
b) Estudie la posición relativa de las rectas $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ y $s: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

7. Estadística y Probabilidad:

a) Calcule las cuatro probabilidades $P(A)$, $P(A\cap\overline{B})$, $P(A|B)$ y $P(B|A)$ sabiendo que $P(A\cup B)=0.8$, $P(A\cap B)=0.2$ *y* $P(A)=2P(B)$. **Nota**: $\overline{B}$ es el suceso contrario o complementario de B.

b) En un conocido congreso, el 60% de los científicos inscritos participan *online* y el resto asisten en persona. Además, el 65% de los inscritos son europeos y el 80% de los que asisten en persona también lo son. Si se elige al azar a uno de los inscritos, calcule la probabilidad de que sea europeo y, a la vez, participe *online*; luego, la de que participe *online* si se sabe que es europeo.

8. Estadística y Probabilidad:

a) En un cierto humedal, la probabilidad de que un renacuajo llegue a rana adulta es del 2%. Si se escogen al azar 2500 de esos renacuajos, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 55 de ellos lleguen a ranas adultas?

b) Para conceder becas de estudio, un organismo valora los méritos presentados y asigna a cada candidato una puntuación que indica más méritos cuanto mayor es su valor. Este año, la puntuación sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 20, y se toma la decisión de conceder la beca al 5% mejor del conjunto de solicitantes. ¿Qué puntuación es preciso alcanzar para obtener la beca?

SOLUCIONES

1. Números y Álgebra:
Despeje la matriz X de la ecuación $XA = A + XB$, si A y B son matrices cuadradas tales que $A-B$ es invertible. Luego, calcule X si $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\left(A^2-A-I\right)^{-1}$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

Despejamos la matriz X.

$$XA = A + XB \Rightarrow XA - XB = A \Rightarrow X\left(A-B\right) = A$$

Como la matriz A – B es invertible podemos multiplicar por su inversa para terminar de despejar X.

$$X\left(A-B\right) = A \Rightarrow X = A\left(A-B\right)^{-1}$$

Ahora calculamos la matriz B:

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow A^2-A-I=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\left|A^2-A-I\right|=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

$$B=\left(A^2-A-I\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(A^2-A-I\right)^T\right)}{\left|A^2-A-I\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de la matriz A – B:

$$A-B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left|A-B\right|=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0$$

$$\left(A-B\right)^{-1}=\frac{Adj\left(A-B\right)^T}{\left|A-B\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Calculamos la expresión de la matriz X.

$$X=A\left(A-B\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & -1+2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}1/2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}}$$

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores de *m*, el sistema $\begin{cases} mx + (2+m^2)y = 1+m \\ my - z = 1 \\ mx + 2y + (2m-4)z = 5 \end{cases}$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} m & 2+m^2 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ m & 2 & 2m-4 \end{pmatrix}$.y la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} m & 2+m^2 & 0 & 1+m \\ 0 & m & -1 & 1 \\ m & 2 & 2m-4 & 5 \end{pmatrix}$

Averiguamos cuando se anula su determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 2+m^2 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ m & 2 & 2m-4 \end{vmatrix} = m^2(2m-4) - m(2+m^2) + 0 - 0 - 0 + 2m =$$

$$= 2m^3 - 4m^2 - 2m - m^3 + 2m = m^3 - 4m^2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^3 - 4m^2 = 0 \Rightarrow m^2(m-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m - 4 = 0 \rightarrow m = 4 \end{cases}$$

Analizamos tres casos por separado.

CASO 1. $m \neq 0 \;\; y \;\; m \neq 4$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $m = 0$

El sistema queda tan sencillo que lo resolvemos.

$$\begin{cases} 2y = 1 \\ -z = 1 \\ 2y - 4z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y = \frac{1}{2}} \\ \boxed{z = -1} \\ 2y - 4z = 5 \end{cases} \Rightarrow 1 + 4 = 5 \text{ ¡Se cumple!}$$

$$Soluciones: \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2} \\ z = -1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones)

CASO 3. $m=4$

Estudiamos el rango de A y de A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}4 & 18 & 0 & 5\\ 0 & 4 & -1 & 1\\ 4 & 2 & 4 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}Fila\,3^a - Fila\,1^a\\ \begin{array}{cccc}4 & 2 & 4 & 5\\ -4 & -18 & 0 & -5\\ \hline 0 & -16 & 4 & 0\end{array}\rightarrow Nueva\,Fila\,3^a\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}4 & 18 & 0 & 5\\ 0 & 4 & -1 & 1\\ 0 & -16 & 4 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}Fila\,3^a + 4\cdot Fila\,2^a\\ \begin{array}{cccc}0 & -16 & 4 & 0\\ 0 & 16 & -4 & 4\\ \hline 0 & 0 & 0 & 4\end{array}\rightarrow Nueva\,Fila\,3^a\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hspace{6em}}^{A/B}}\\ 4 & 18 & 0 & 5\\ 0 & 4 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 4\\ \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\hspace{4em}}_{A}} & \end{array}\right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible**.

Resumiendo: Si $m\neq 0\ \ y\ \ m\neq 4$ el sistema es compatible determinado, si $m=0$ el sistema es compatible indeterminado y si $m=4$ el sistema es incompatible.

3. Análisis

a) Si $f(x) = ae^x + b$, diga qué valores deben tener a y b para que se cumplan $f(0) = 0$ y $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 3$

b) Estudie si la función $f(x) = x + \sin x$ tiene extremos o puntos de inflexión en el intervalo $(0,2\pi)$, diga dónde están en caso de que existan y esboce la gráfica de f en ese intervalo.

a) Aplicamos la primera condición: $f(0) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(x) = ae^x + b \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = ae^0 + b \Rightarrow \boxed{0 = a + b}$$

Aplicamos la segunda condición: $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 3$

Calculamos primero el valor del límite.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{ae^x + b}{x} = \frac{a+b}{0} = \ldots$$

Como sabemos que $a + b = 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{ae^x + b}{x} = \frac{a+b}{0} = \frac{0}{0} = Indeterminación\left(L'Hôpital\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{ae^x}{1} = ae^0 = a$$

Como debe cumplirse que $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 3$, entonces debe ser $a = 3$.

Sustituimos este valor en la igualdad $a + b = 0$ y tenemos que $b = -3$.

Los valores buscados son $a = 3$ y $b = -3$.

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 1 + \cos x \\ f'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi \in (0, 2\pi)$$

Calculamos la segunda derivada y sustituimos el valor obtenido para comprobar si es mínimo, máximo o punto de inflexión.

$$f''(x) = -senx \Rightarrow f''(\pi) = -sen\pi = 0$$

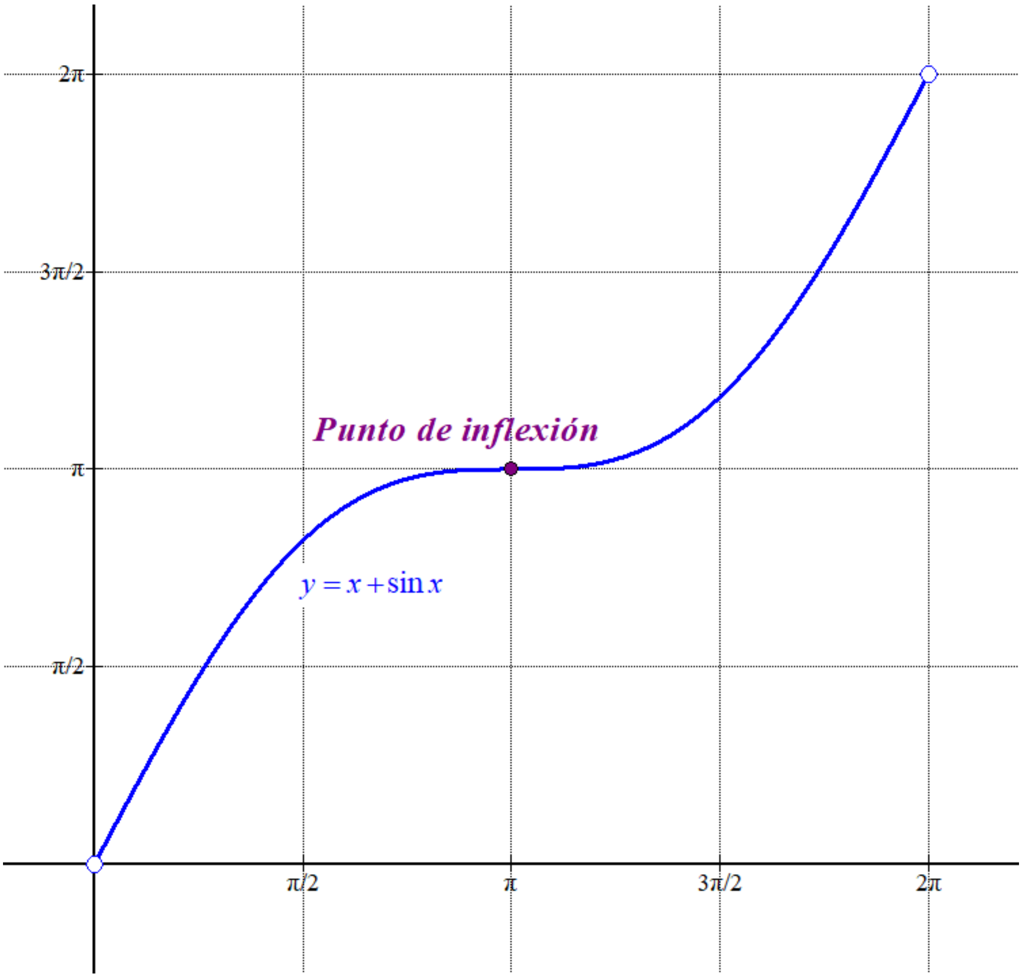
Como es 0 comprobamos el valor de la tercera derivada en $x = \pi$.

$$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(\pi) = -\cos \pi = -1 \neq 0$$

La función no tiene máximos ni mínimos relativos en el intervalo $(0, 2\pi)$. Los máximos o mínimos podrían estar en los extremos del intervalo de definición de la función, pero este intervalo es $(0, 2\pi)$ que no incluye a los extremos. No tiene máximos ni mínimos.
Tiene un punto de inflexión en $x = \pi$.

Para dibujar su gráfica en el intervalo $(0, 2\pi)$ obtenemos una tabla de valores.

x	$y = x + \sin x$
0	0
$\pi/2$	$1+\dfrac{\pi}{2}$
π	π
$3\pi/2$	$\dfrac{3\pi}{2}-1$
2π	2π



4. Análisis:
Calcule el área de la región determinada por las desigualdades $x \geq 1, y \leq x$ e $y \geq f(x)$, con $f(x) = x \ln x$. Haga un esbozo gráfico de la región. **Nota**: ln*x* es el logaritmo neperiano de *x*.

La región de la cual queremos hallar el valor de su área debe cumplir: $x \geq 1, y \leq x$ e $y \geq x \ln x$
Buscamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x \ln x \\ y = x \end{array}\right\} \Rightarrow x \ln x = x \Rightarrow -x + x \ln x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\left(-1 + \ln x\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ -1 + \ln x = 0 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow \boxed{x = e \simeq 2.71} \end{cases}$$

La región del plano de la que piden calcular su área está comprendida entre *x = 1* y *x = e*.

Tomamos *x = 2* y comprobamos que función toma el mayor valor.

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = 2 \ln 2 \simeq 1.38 \\ y = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow f\left(x\right) < x\, en\, el\, \text{int}\, ervalo \left(1, e\right)$$

Calculamos el área como la integral definida de la diferencia de las dos funciones entre 1 y e.

$$Área = \int_1^e x - x \ln x dx = \ldots$$

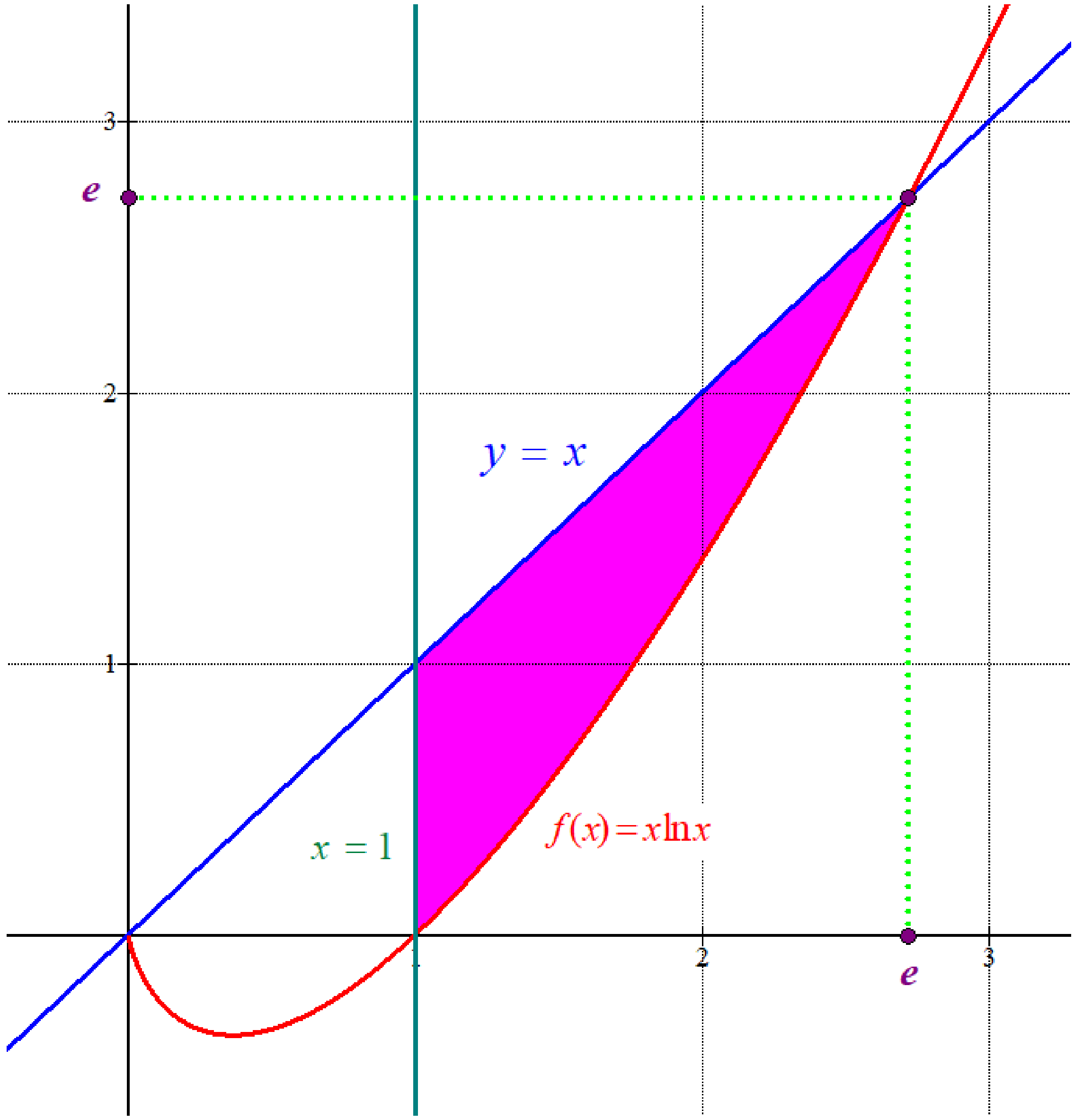
$$\int x - x \ln x dx = \int x dx - \int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} - \int x \ln x dx = \left\{\begin{array}{l} Integración\ por\ partes \\ u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \rightarrow v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \left(\frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx\right) = \frac{x^2}{2} - \left(\frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x}{2} dx\right) = \frac{x^2}{2} - \left(\frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x}{2} dx\right) =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \left(\frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int x dx\right) = \frac{x^2}{2} - \left(\frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2 \ln x}{2} + \frac{x^2}{4} + K$$

$$\ldots = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^2 \ln x}{2} + \frac{x^2}{4}\right]_1^e = \left[\frac{e^2}{2} - \frac{e^2 \ln e}{2} + \frac{e^2}{4}\right] - \left[\frac{1^2}{2} - \frac{1^2 \ln 1}{2} + \frac{1^2}{4}\right] = \boxed{\frac{e^2}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{e^2 - 3}{4} \simeq 1.097 u^2}$$

El valor del área es aproximadamente de 1.097 unidades cuadradas.



3
e
2
y = x
1
x = 1
f(x)=xlnx
2
e
3

5. Geometría:

a) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $P(2,-1,0)$ y $Q(3,0,0)$ y la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $R(0,4,-2)$ y es paralelo a los vectores $\vec{u}(1,0,-1)$ y $\vec{v}(2,1,-2)$.

b) Calcule el ángulo agudo que forma la recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ con el plano $\pi: x+z+2=0$.

a) Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $P(2,-1,0)$ y $Q(3,0,0)$.

$$r: \begin{cases} \vec{v_r} = \overrightarrow{PQ} = (3,0,0)-(2,-1,0) = (1,1,0) \\ Q(3,0,0) \in r \end{cases} \Rightarrow \boxed{r: \begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = \lambda \quad , \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}}$$

Obtenemos la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $R(0,4,-2)$ y es paralelo a los vectores $\vec{u}(1,0,-1)$ y $\vec{v}(2,1,-2)$.

$$\pi: \begin{cases} \vec{u}(1,0,-1) \\ \vec{v}(2,1,-2) \\ R(0,4,-2) \in \pi \end{cases} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-0 & y-4 & z+2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

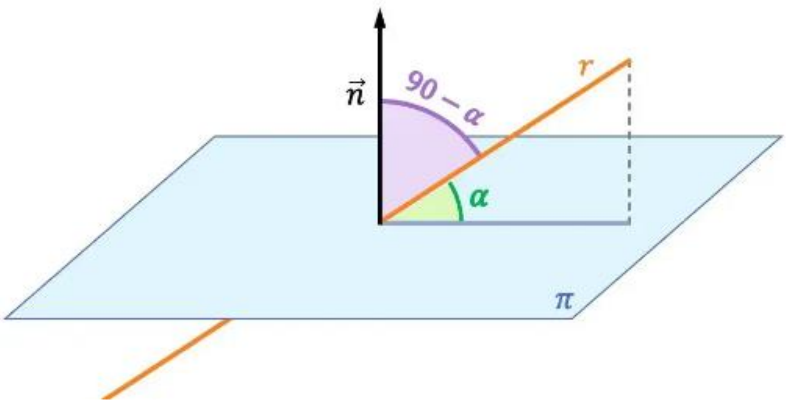
$$\Rightarrow -2(y-4)+(z+2)+2(y-4)+x=0 \Rightarrow -2y+8+z+2+2y-8+x=0 \Rightarrow \boxed{\pi: x+z+2=0}$$

b) Averiguamos el ángulo formado por el vector director de la recta y el normal del plano.

$$\left. \begin{array}{l} r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0} \to \vec{v_r} = (1,1,0) \\ \pi: x+z+2=0 \to \vec{n} = (1,0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\vec{v_r},\vec{n}) = \frac{\vec{v_r}\cdot\vec{n}}{|\vec{v_r}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{(1,1,0)(1,0,1)}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\sqrt{1^2+0^2+1^2}} \Rightarrow$$

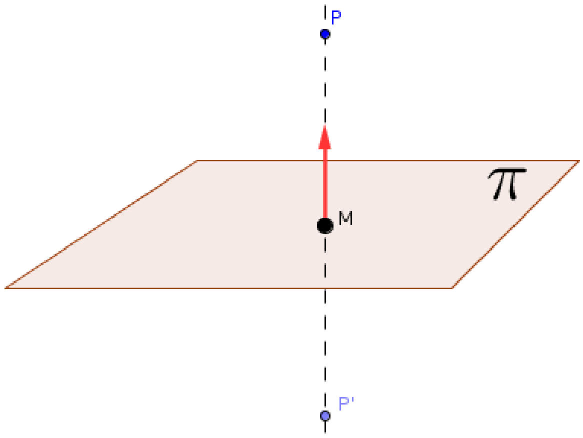
$$\Rightarrow \cos(\vec{v_r},\vec{n}) = \frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{v_r},\vec{n}) = arc\cos\left(\frac{1}{2}\right) = 60º$$

El ángulo formado entre recta y plano es 90º – 60º = 30º.



6. Geometría:
a) Calcule el punto simétrico de $P(2,-1,0)$ con respecto al plano $\pi : x+z+2=0$.
b) Estudie la posición relativa de las rectas $r: \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{0}$ y $s: \frac{x-2}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{-1}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

a) Nos piden hallar las coordenadas del punto P´ del dibujo.



Hallamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto P. Esta recta tendrá como vector director el vector normal del plano.

$$\pi : x+z+2=0 \Rightarrow \vec{n}=(1,0,1) \Rightarrow r: \begin{cases} \vec{v_r}=\vec{n}=(1,0,1) \\ P(2,-1,0)\in r \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=2+t \\ y=-1 \\ z=t \end{cases}$$

El punto M es la intersección de la recta *r* con el plano π.

$$\left.\begin{array}{l} \pi : x+z+2=0 \\ r: \begin{cases} x=2+t \\ y=-1 \\ z=t \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2+t+t+2=0 \Rightarrow 2t=-4 \Rightarrow t=-2 \Rightarrow \begin{cases} x=2-2=0 \\ y=-1 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow M(0,-1,-2)$$

El punto P´ simétrico de P respecto del plano es el resultado de sumar al punto P el vector $\overrightarrow{PM}$.

$$\overrightarrow{PM}=(0,-1,-2)-(2,-1,0)=(-2,0,-2)$$

$$P´=M+\overrightarrow{PM}=(0,-1,-2)+(-2,0,-2)=(-2,-1,-4)$$

El punto simétrico es $P´(-2,-1,-4)$

b) Comparamos sus vectores directores.

$$\left.\begin{array}{l} r: \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{0} \to \vec{v_r}=(1,1,0) \\ s: \frac{x-2}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{-1} \to \vec{u_s}=(2,1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\neq\frac{1}{1}\neq\frac{0}{-1}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas tienen distinta dirección y se cortan o se cruzan.

Estudiamos el valor nulo o no del producto mixto $\left[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right]$.

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0} \rightarrow \begin{cases} P_r(2,-1,0) \\ \overrightarrow{v_r} = (1,1,0) \end{cases}$$

$$s: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1} \rightarrow \begin{cases} Q_s(2,-2,-1) \\ \overrightarrow{u_s} = (2,1,-1) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{P_rQ_s} = (2,-2,-1)-(2,-1,0) = (0,-1,-1)$$

$$\left[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1+0+0-0+2-1 = 0$$

Al ser nulo el producto mixto las rectas son secantes.
Hallamos el punto de corte resolviendo el sistema de ecuaciones siguiente:

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0} \rightarrow \begin{cases} P_r(2,-1,0) \\ \overrightarrow{v_r} = (1,1,0) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

$$s: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1} \rightarrow \begin{cases} Q_s(2,-2,-1) \\ \overrightarrow{u_s} = (2,1,-1) \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 2+2\alpha \\ y = -2+\alpha \\ z = -1-\alpha \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} r: \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = 0 \end{cases} \\ s: \begin{cases} x = 2+2\alpha \\ y = -2+\alpha \\ z = -1-\alpha \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2+2\alpha = 2+\lambda \\ -2+\alpha = -1+\lambda \\ 0 = -1-\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2+2\alpha = 2+\lambda \\ -2+\alpha = -1+\lambda \\ \alpha = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2-2 = 2+\lambda \\ -2-1 = -1+\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0 = 2+\lambda \\ -3 = -1+\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda = -2 \\ \lambda = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 2-2 = 0 \\ y = -1-2 = -3 \Rightarrow \boxed{A(0,-3,0)} \\ z = 0 \end{cases}$$

El punto de corte de *r* y *s* es $A(0,-3,0)$.

7. Estadística y Probabilidad:
a) Calcule las cuatro probabilidades $P(A)$, $P(A\cap\overline{B})$, $P(A|B)$ y $P(B|A)$ sabiendo que $P(A\cup B)=0.8$, $P(A\cap B)=0.2$ y $P(A)=2P(B)$. **Nota**: $\overline{B}$ es el suceso contrario o complementario de B.
b) En un conocido congreso, el 60% de los científicos inscritos participan *online* y el resto asisten en persona. Además, el 65% de los inscritos son europeos y el 80% de los que asisten en persona también lo son. Si se elige al azar a uno de los inscritos, calcule la probabilidad de que sea europeo y, a la vez, participe *online*; luego, la de que participe *online* si se sabe que es europeo.

a)
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow 0.8=2P(B)+P(B)-0.2\Rightarrow$$

$$1=3P(B)\Rightarrow P(B)=\frac{1}{3}$$

$$\boxed{P(A)=2P(B)=2\frac{1}{3}=\frac{2}{3}}$$

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})\Rightarrow\frac{2}{3}=0.2+P(A\cap\overline{B})\Rightarrow\boxed{P(A\cap\overline{B})=\frac{2}{3}-0.2=\frac{7}{15}}$$

$$\boxed{P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.2}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{5}}$$

$$\boxed{P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{0.2}{\frac{2}{3}}=0.3}$$

b) Realizamos una tabla de contingencia para ordenar toda la información proporcionada y obtener el resto de datos.
En persona asisten el 100 – 60 = 40 %. El 80% de los que asisten en persona (40%) son europeos → $\frac{80\cdot 40}{100}=32\%$ del total son europeos que participan en persona.

	Online	En persona	
Europeos		32	65
No europeos			
	60		100

Completamos la tabla.

	Online	En persona	
Europeos	**33**	32	65
No europeos	**27**	**8**	**35**
	60	**40**	100

Nos piden calcular P(Europeo que participa online) que por la regla de Laplace vale:

$$\mathrm{P}\left(\text{Europeo que participa online}\right)=\boxed{\frac{33}{100}=0.33}$$

También nos piden P(participe *online* si se sabe que es europeo). Sabemos que hay un 65% de participantes europeos y de ese 65% el 33% participa online y el restante 32 % participa en persona.

$$P(\textit{participe online si se sabe que es europeo})=\boxed{\frac{33}{65}\simeq 0.508}$$

8. Estadística y Probabilidad:
a) En un cierto humedal, la probabilidad de que un renacuajo llegue a rana adulta es del 2%. Si se escogen al azar 2500 de esos renacuajos, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 55 de ellos lleguen a ranas adultas?
b) Para conceder becas de estudio, un organismo valora los méritos presentados y asigna a cada candidato una puntuación que indica más méritos cuanto mayor es su valor. Este año, la puntuación sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 20, y se toma la decisión de conceder la beca al 5% mejor del conjunto de solicitantes. ¿Qué puntuación es preciso alcanzar para obtener la beca?

a) Es una distribución binomial. Éxito = "El renacuajo llega a adulto". Se hacen 2500 repeticiones independientes entre sí → *n = 2500. p =P(Éxito) = 0.02.*

X es el número de renacuajos que llegan a adultos de 2500.

X = B(2500, 0.02)

Nos piden calcular $P(X \geq 55)$. Esta probabilidad es muy costosa calcularla usando la binomial.

Utilizamos la aproximación a una normal de media $np = 2500 \cdot 0.02 = 50$ y de desviación típica $= \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{2500 \cdot 0.02 \cdot 0.98} = 7$. Como *np = 50 >5* y *nq = 2450 >5* la aproximación será buena.

El valor de las probabilidades de X se aproxima por una normal Y = N(50, 7)

$$P(X \geq 55) = \{Corrección\,de\,Yates\} = P(Y \geq 54.5) = \{Tipificamos\} =$$

$$= P\left(\frac{Y-50}{7} \geq \frac{54.5-50}{7}\right) = P(Z \geq 0.64) = 1 - P(Z \leq 0.64) =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = 1 - 0.7389 = \boxed{0.2611}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5[illegible]60	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5[illegible]57	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5[illegible]48	0.5
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6[illegible]31	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6[illegible]00	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7[illegible]54	0.7
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.735[illegible]	0.7389	0.7

b) X es la variable que da la puntuación.

X = N(100, 20)

Nos piden hallar "a" tal que $P(X \geq a) = 0.05$.

$$P(X \geq a) = 0.05 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(\frac{X-100}{20} \geq \frac{a-100}{20}\right) = 0.05 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \geq \frac{a-100}{20}\right) = 0.05 \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{a-100}{20}\right) = 0.05 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a-100}{20}\right) = 0.95 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Buscamos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a-100}{20} = 1.645 \Rightarrow \boxed{a = 1.645 \cdot 20 + 100 = 132.9}$$

La puntuación debería ser superior a 132.9 puntos.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599