Universidad Carlos III de Madrid	**UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID** EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2022-2023** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos..
TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
En una obra, para transportar la tierra extraída para la construcción de los cimientos de un edificio, se usan tres tipos de camiones diferentes: A, B y C. Los camiones de tipo A tienen una capacidad de 14 toneladas, los de tipo B, de 24 toneladas y los de tipo C, de 28 toneladas. Habría que traer un camión más de tipo A para igualar al número de camiones restantes. El 10% de la capacidad de todos los camiones tipo B supone un séptimo de la de los de mayor tonelaje. Hoy, realizando un único viaje cada camión a máxima capacidad, se han extraído de la obra 302 toneladas de tierra. ¿Cuánta tierra ha sido transportada hoy por los camiones de cada tipo?

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dada la función $f(x)=\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$, se pide:

a) (0.25 puntos) Estudiar si es par o impar.
b) (0.75 puntos) Estudiar su derivabilidad en el punto $x = 1$.
c) (1.5 puntos) Estudiar sus extremos relativos y absolutos.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sean los puntos A(1,−2, 3), B(0, 2,−1) y C(2, 1, 0). Se pide:
a) (1.25 puntos) Comprobar que forman un triángulo T y hallar una ecuación del plano que los contiene.
b) (0.75 puntos) Calcular el corte de la recta que pasa por los puntos A y B con el plano $z = 1$.
c) (0.5 puntos) Determinar el perímetro del triángulo T.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Se tiene un suceso A de probabilidad P(A) = 0.3.
a) (0.75 puntos) Un suceso B de probabilidad P(B) = 0.5 es independiente de A. Calcule $P(A \cup B)$.
b) (0.75 puntos) Otro suceso C cumple $P(C\mid A)=0.5$. Determine $P\left(A\cap\overline{C}\right)$.
c) (1 punto) Si se tiene un suceso D tal que $P\left(\overline{A}\mid D\right)=0.2$ y $P(D\mid A)=0.5$, calcule P(D).

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el sistema $\begin{cases}(a+1)x+4y = 0 \\ (a-1)y+z=3 \\ 4x+2ay+z=3\end{cases}$. se pide:

a) (1.25 puntos) Discutirlo en función del parámetro a.
b) (0.5 puntos) Resolverlo para $a = 3$.
c) (0.75 puntos) Resolverlo para $a = 5$.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función real de variable real definida sobre su dominio como $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2+x^2} & si \quad x\leq -1 \\ \dfrac{2x^2}{3-3x} & si \quad x>-1\end{cases}$, se pide:

a) (0.75 puntos) Estudiar la continuidad de la función en R.

b) (1 punto) Calcular el siguiente límite: $\lim_{x\to-\infty} f(x)^{2x^2-1}$.

c) (0.75 puntos) Calcular la siguiente integral: $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$, el plano $\pi: x-z=2$ y el punto A(1, 1, 1), se pide:

a) (0.75 puntos) Estudiar la posición relativa de r y π y calcular su intersección, si existe.
b) (0.75 puntos) Calcular la proyección ortogonal del punto A sobre el plano π.
c) (1 punto) Calcular el punto simétrico del punto A con respecto a la recta r.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

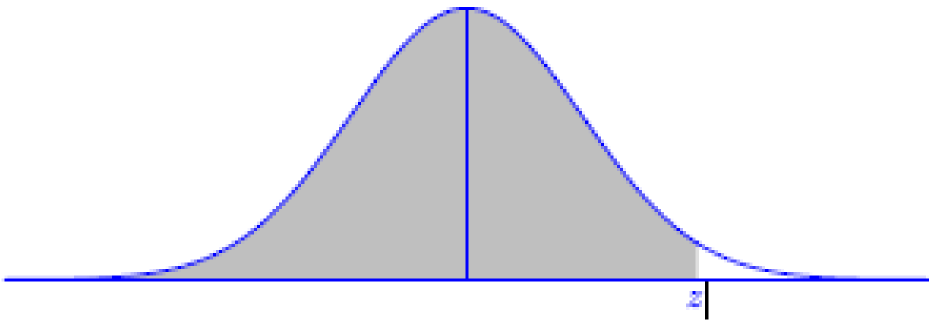
La longitud de la sardina del Pacífico (*Sardinops sagax*) se puede considerar que es una variable aleatoria con distribución normal de media 175 mm y desviación típica 25.75 mm.

a) (1 punto) Una empresa envasadora de esta variedad de sardinas solo admite como sardinas de calidad aquellas con una longitud superior a 16 cm. ¿Qué porcentaje de las sardinas capturadas por un buque pesquero serán de la calidad que espera la empresa envasadora?

b) (0.5 puntos) Hallar una longitud t < 175 mm tal que entre t y 175 mm estén el 18% de las sardinas capturadas.

c) (1 punto) En altamar se procesan las sardinas en lotes de 10. Posteriormente se devuelven al mar las sardinas de cada lote que son menores de 15 cm por considerarlas pequeñas. ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote haya al menos una sardina devuelta por pequeña?

DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0,1)$, $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
En una obra, para transportar la tierra extraída para la construcción de los cimientos de un edificio, se usan tres tipos de camiones diferentes: A, B y C. Los camiones de tipo A tienen una capacidad de 14 toneladas, los de tipo B, de 24 toneladas y los de tipo C, de 28 toneladas. Habría que traer un camión más de tipo A para igualar al número de camiones restantes. El 10% de la capacidad de todos los camiones tipo B supone un séptimo de la de los de mayor tonelaje. Hoy, realizando un único viaje cada camión a máxima capacidad, se han extraído de la obra 302 toneladas de tierra. ¿Cuanta tierra ha sido transportada hoy por los camiones de cada tipo?

Llamamos "x" al número de camiones A, "y" al número de camiones B y "z" al de camiones C.

"*Los camiones de tipo A tienen una capacidad de 14 toneladas, los de tipo B, de 24 toneladas y los de tipo C, de 28 toneladas. Se han extraído de la obra 302 toneladas de tierra*" → $14x+24y+28z=302$

"*Habría que traer un camión más de tipo A para igualar al número de camiones restantes*" → $x+1=y+z$.

"*El 10% de la capacidad de todos los camiones tipo B supone un séptimo de la de los de mayor tonelaje (C)*" → $0.10\cdot 24y=\frac{1}{7}\cdot 28z$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l}14x+24y+28z=302\\ x+1=y+z\\ 0.10\cdot 24y=\frac{1}{7}\cdot 28z\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}14x+24y+28z=302\\ x=y+z-1\\ 2.4y=4z\to y=\frac{4}{2.4}z=\frac{5}{3}z\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}14x+24\frac{5}{3}z+28z=302\\ x=\frac{5}{3}z+z-1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}14x+40z+28z=302\\ x=\frac{8}{3}z-1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}14x+68z=302\\ x=\frac{8}{3}z-1\end{array}\right\}\Rightarrow 14\left(\frac{8}{3}z-1\right)+68z=302\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{112}{3}z-14+68z=302\Rightarrow 112z-42+204z=906\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 316z=948\Rightarrow\boxed{z=\frac{948}{316}=3}\Rightarrow\boxed{x=\frac{8}{3}\cdot 3-1=7}\Rightarrow 7=y+3-1\Rightarrow\boxed{y=5}$$

Se han usado 7 camiones del tipo A, 5 del B y 3 del C. Los camiones del tipo A han transportado $7\cdot 14=98$ toneladas de tierra, los del tipo B han transportado $5\cdot 24=120$ toneladas y los del tipo C han transportado $3\cdot 28=84$ toneladas de tierra.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x)=\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$, se pide:

a) (0.25 puntos) Estudiar si es par o impar.
b) (0.75 puntos) Estudiar su derivabilidad en el punto *x = 1*.
c) (1.5 puntos) Estudiar sus extremos relativos y absolutos.

a) Averiguamos la expresión de $f(-x)$ y la comparamos con la expresión de *f(x)*.

$$f(-x)=\sqrt[3]{\left((-x)^2-1\right)^2}=\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}=f(x)$$

La función es par.

b) La derivada de la función es:

$$f(x)=\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}=\left(x^2-1\right)^{2/3}\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3}\left(x^2-1\right)^{2/3-1}(2x)=\frac{4x}{3}\left(x^2-1\right)^{-1/3}=\frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$$

Esta expresión de la derivada es válida para cualquier valor de *x* distinto de –1 y +1, pero no para *x = 1*.
La función no es derivable en *x = 1*.

Lo comprobamos también calculando la derivada en *x = 1* con la definición.

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}-\sqrt[3]{\left(1^2-1\right)^2}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}-0}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^2}}{x-1}=\lim_{x\to1}\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2(x+1)^2}{(x-1)^3}}=\lim_{x\to1}\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{(x-1)}}=\sqrt[3]{\frac{(1+1)^2}{(1-1)}}=\sqrt[3]{\frac{4}{0}}=\infty$$

No es derivable en *x = 1*.

c) La derivada de la función es $f'(x)=\frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$. La derivada se anula en *x = 0* y no existe la derivada para *x = 1* y *x = –1*. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomamos *x = –2* y la derivada vale

$f'(-2)=\frac{4(-2)}{3\sqrt[3]{(-2)^2-1}}=\frac{-8}{3\sqrt[3]{3}}<0$. La función decrece en $(-\infty,-1)$.

En el intervalo $(-1,0)$ tomamos *x = –0.5* y la derivada vale

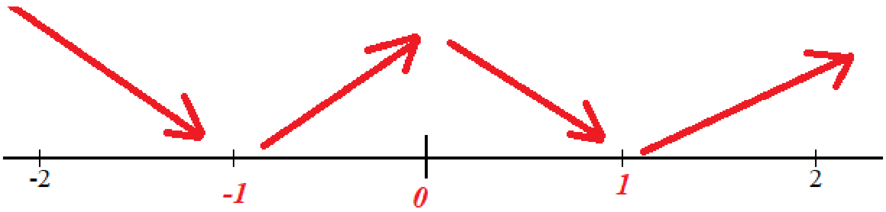
$f'(-0.5)=\frac{4(-0.5)}{3\sqrt[3]{(-0.5)^2-1}}=\frac{-2}{3\sqrt[3]{-0.75}}>0$. La función crece en $(-1,0)$.

En el intervalo $(0,1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale

$f'(0.5) = \frac{4 \cdot 0.5}{3\sqrt[3]{0.5^2 - 1}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{-0.75}} < 0$. La función decrece en $(0,1)$.

En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{4 \cdot 2}{3\sqrt[3]{2^2 - 1}} = \frac{8}{3\sqrt[3]{3}} > 0$. La función crece en $(1,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función presenta un máximo relativo en $x = 0$ y dos mínimos relativos en $x = -1$ y $x = 1$.

Para obtener el máximo absoluto valoramos la función en $x = 0$ y también valoramos la función cuando x va más allá de 1 y antes de –1.

$$x = 0 \rightarrow f(0) = \sqrt[3]{(0^2 - 1)^2} = 1$$

$$x = 10 \rightarrow f(10) = \sqrt[3]{(10^2 - 1)^2} = \sqrt[3]{99^2} > 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2} = +\infty$$

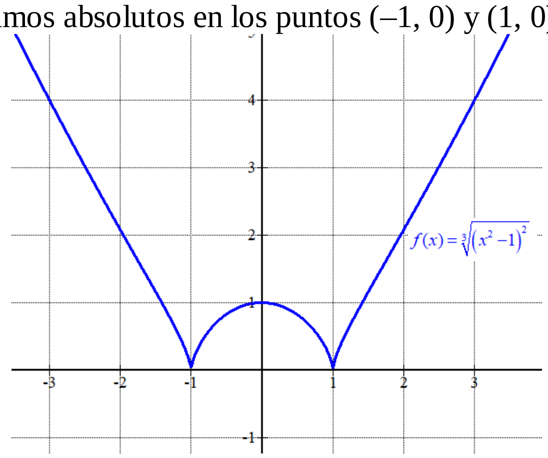
La función no tiene máximo absoluto.

Para obtener el mínimo absoluto valoramos la función en $x = -1$ y en $x = 1$.

$$x = -1 \rightarrow f(-1) = \sqrt[3]{((-1)^2 - 1)^2} = 0$$

$$x = 1 \rightarrow f(1) = \sqrt[3]{(1^2 - 1)^2} = 0$$

La función tiene dos mínimos absolutos en los puntos (–1, 0) y (1, 0).



A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sean los puntos A(1,−2, 3), B(0, 2,−1) y C(2, 1, 0). Se pide:
a) (1.25 puntos) Comprobar que forman un triángulo *T* y hallar una ecuación del plano que los contiene.
b) (0.75 puntos) Calcular el corte de la recta que pasa por los puntos A y B con el plano *z* = *1*.
c) (0.5 puntos) Determinar el perímetro del triángulo T.

a) Para que formen un triángulo no deben estar alineados. Y para ello los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ no deben indicar la misma dirección, es decir, no deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(0,2,-1)-(1,-2,3)=(-1,4,-4)\\ \overrightarrow{AC}=(2,1,0)-(1,-2,3)=(1,3,-3)\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{-1}{1}\neq\frac{4}{3}=\frac{-4}{-3}$$

Los puntos ABC forman un triángulo T.
Hallamos la ecuación del plano π que los contiene.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(-1,4,-4)\\ \vec{v}=\overrightarrow{AC}=(1,3,-3)\\ C(2,1,0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix}x-2 & y-1 & z-0\\ -1 & 4 & -4\\ 1 & 3 & -3\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{-12(x-2)}-4(y-1)-3z-4z-3(y-1)+\cancel{12(x-2)}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4y+4-3z-4z-3y+3=0\Rightarrow -7y-7z+7=0\Rightarrow \boxed{\pi: y+z-1=0}$$

b) Hallamos la ecuación de la recta *r* que pasa por los puntos A y B.

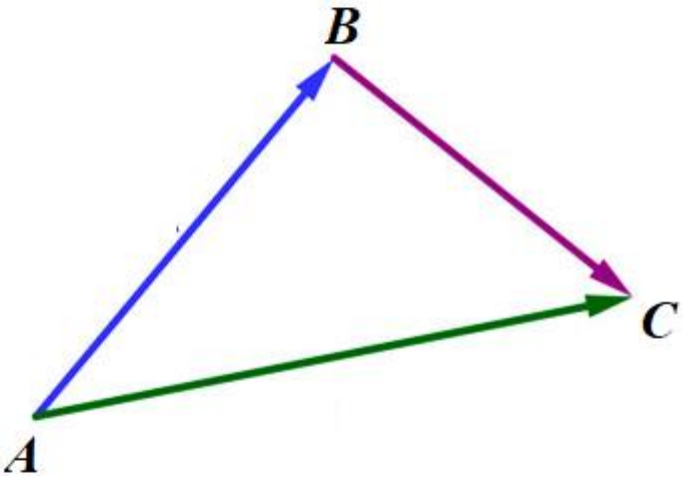
$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_r}=\overrightarrow{AB}=(-1,4,-4)\\ A(1,-2,3)\in r\end{array}\right\}\Rightarrow r:\begin{cases}x=1-\lambda\\ y=-2+4\lambda\\ z=3-4\lambda\end{cases}$$

Hallo el punto de corte de la recta con el plano *z* = *1*.

$$\left.\begin{array}{r}r:\begin{cases}x=1-\lambda\\ y=-2+4\lambda\\ z=3-4\lambda\end{cases}\\ z=1\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}x=1-\lambda\\ y=-2+4\lambda\\ 1=3-4\lambda\rightarrow -2=-4\lambda\rightarrow\lambda=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\\ y=-2+4\frac{1}{2}=0\\ 1=3-4\lambda\rightarrow -2=-4\lambda\rightarrow\lambda=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\boxed{P\left(\frac{1}{2},0,1\right)}$$

c) El perímetro del triángulo ABC es la suma de la longitud de sus tres lados. Es la suma de los módulos de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$.



$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(0,2,-1)-(1,-2,3)=(-1,4,-4)\\ \overrightarrow{AC}=(2,1,0)-(1,-2,3)=(1,3,-3)\\ \overrightarrow{BC}=(2,1,0)-(0,2,-1)=(2,-1,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-1)^2+4^2+(-4)^2}=\sqrt{33}\\ \left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{1^2+3^2+(-3)^2}=\sqrt{19}\\ \left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{6}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{Perímetro=\sqrt{33}+\sqrt{19}+\sqrt{6}\simeq 12.55\ u}$$

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Se tiene un suceso A de probabilidad P(A) = 0.3.
a) (0.75 puntos) Un suceso B de probabilidad P(B) = 0.5 es independiente de A. Calcule $P(A\cup B)$.
b) (0.75 puntos) Otro suceso C cumple P(C |A) = 0.5. Determine $P\left(A\cap\overline{C}\right)$.
c) (1 punto) Si se tiene un suceso D tal que $P\left(\overline{A}\mid D\right)=0.2$ y $P(D\mid A)=0.5$, calcule P(D).

a) Si los sucesos A y B son independientes tenemos que $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.3+0.5-0.3\cdot 0.5=\boxed{0.65}$$

b)

$$P(C\mid A)=0.5\Rightarrow \frac{P(C\cap A)}{P(A)}=0.5\Rightarrow \frac{P(C\cap A)}{0.3}=0.5\Rightarrow P(C\cap A)=0.15$$

$$P(A)=P\left(A\cap\overline{C}\right)+P(A\cap C)\Rightarrow 0.3=P\left(A\cap\overline{C}\right)+0.15\Rightarrow 0.3-0.15=P\left(A\cap\overline{C}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P\left(A\cap\overline{C}\right)=0.15}$$

c)

$$P(D\mid A)=0.5\Rightarrow \frac{P(A\cap D)}{P(A)}=0.5\Rightarrow \frac{P(A\cap D)}{0.3}=0.5\Rightarrow P(A\cap D)=0.3\cdot 0.5=0.15$$

$$P(D)=P(A\cap D)+P\left(\overline{A}\cap D\right)\Rightarrow P(D)=0.15+P\left(\overline{A}\cap D\right)\Rightarrow P\left(\overline{A}\cap D\right)=P(D)-0.15$$

$$P\left(\overline{A}\mid D\right)=0.2\Rightarrow \frac{P\left(\overline{A}\cap D\right)}{P(D)}=0.2\Rightarrow \frac{P(D)-0.15}{P(D)}=0.2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(D)-0.15=0.2P(D)\Rightarrow P(D)-0.2P(D)=0.15\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.8P(D)=0.15\Rightarrow P(D)=\frac{0.15}{0.8}\Rightarrow \boxed{P(D)=0.1875}$$

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el sistema $\begin{cases}(a+1)x+4y & =0\\ \quad (a-1)y+z=3\\ 4x+2ay+z=3\end{cases}$. se pide:

a) (1.25 puntos) Discutirlo en función del parámetro *a*.
b) (0.5 puntos) Resolverlo para *a = 3*.
c) (0.75 puntos) Resolverlo para *a = 5*.

a) Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$A=\begin{pmatrix}a+1 & 4 & 0\\ 0 & a-1 & 1\\ 4 & 2a & 1\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}a+1 & 4 & 0\\ 0 & a-1 & 1\\ 4 & 2a & 1\end{vmatrix}=(a+1)(a-1)+16-2a(a+1)=$$

$$=a^2-1+16-2a^2-2a=-a^2-2a+15$$

$$|A|=0\Rightarrow -a^2-2a+15=0\Rightarrow a=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot(-1)(15)}}{-2}=\frac{2\pm 8}{-2}=\begin{cases}\dfrac{2+8}{-2}=\boxed{-5=a}\\ \dfrac{2-8}{-2}=\boxed{3=a}\end{cases}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a\neq -5$ **y** $a\neq 3$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $a=-5$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}-4 & 4 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 1 & 3\\ 4 & -10 & 1 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 3^a+\text{Fila } 1^a\\ \begin{array}{cccc}4 & -10 & 1 & 3\\ -4 & 4 & 0 & 0\\ \hline 0 & -6 & 1 & 3\end{array}\rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a\end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}-4 & 4 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 1 & 3\\ 0 & -6 & 1 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 3^a-\text{Fila } 2^a\\ \begin{array}{cccc}0 & -6 & 1 & 3\\ 0 & 6 & -1 & -3\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}\overbrace{\begin{array}{ccc}-4 & 4 & 0\end{array}}^{A/B} & 0\\ \begin{array}{ccc}0 & -6 & 1\end{array} & 3\\ \underbrace{\begin{array}{ccc}0 & 0 & 0\end{array}}_{A} & 0\end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2 al igual que el de la matriz A/B, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

CASO 3. $a=3$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}4&4&0&0\\0&2&1&3\\4&6&1&3\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila }3^a - \text{Fila }1^a\\ \begin{array}{cccc}4&6&1&3\\-4&-4&0&0\\\hline 0&2&1&3\end{array}\to\text{Nueva Fila }3^a\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}4&4&0&0\\0&2&1&3\\0&2&1&3\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila }3^a - \text{Fila }2^a\\ \begin{array}{cccc}0&2&1&3\\0&-2&-1&-3\\\hline 0&0&0&0\end{array}\to\text{Nueva Fila }3^a\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}4&4&0&0\\0&2&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2 al igual que el de la matriz A/B, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $a\neq-5$ y $a\neq3$ el sistema es **compatible determinado** y para $a=3$ y $a=-5$ el sistema es **compatible indeterminado**.

b) Si $a=3$ el sistema es compatible indeterminado.
Obtenemos la solución a partir del sistema equivalente que hemos obtenido en el apartado a).

$$\begin{pmatrix}4&4&0&0\\0&2&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}4x+4y=0\\2y+z=3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+y=0\\z=3-2y\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=-y\\z=3-2y\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{\left\{\begin{array}{l}x=-\lambda\\y=\lambda\\z=3-2\lambda\end{array}\right.,\lambda\in\mathbb{R}}$$

Las soluciones del sistema son $x=-\lambda;\ y=\lambda;\ z=3-2\lambda,$ siendo $\lambda\in\mathbb{R}$.

c) Si $a=5$ el sistema es compatible determinado.

$$\left\{\begin{array}{l}6x+4y\quad=0\\ \quad 4y+z=3\\4x+10y+z=3\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}6x+4y\quad=0\\ \quad z=3-4y\\4x+10y+z=3\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}3x+2y\quad=0\\4x+10y+3-4y=3\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}3x+2y=0\\4x+6y=0\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}-9x-6y=0\\4x+6y=0\\\hline -5x\quad=0\end{array}\right.\to\boxed{x=0}\Rightarrow0+2y=0\Rightarrow\boxed{y=0}\Rightarrow\boxed{z=3-0=3}$$

La solución del sistema es *x = 0; y = 0; z = 3.*

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función real de variable real definida sobre su dominio como $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2+x^2} & si \quad x\le -1\\ \dfrac{2x^2}{3-3x} & si \quad x>-1\end{cases}$, se pide:

a) (0.75 puntos) Estudiar la continuidad de la función en R.

b) (1 punto) Calcular el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)^{2x^2-1}$.

c) (0.75 puntos) Calcular la siguiente integral: $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

a) En el intervalo $(-\infty,-1)$ la función es $\dfrac{x^2}{2+x^2}$ que es continua pues el denominador no se anula.

En el intervalo $(-1,+\infty)$ la función es $\dfrac{2x^2}{3-3x}$ cuyo denominador se anula en $x = 1$. La función no es continua en $x = 1$.

Estudiamos la continuidad en $x = -1$ viendo si coinciden los límites laterales con el valor de la función.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=\dfrac{(-1)^2}{2+(-1)^2}=\dfrac{1}{3} \\ \lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x^2}{2+x^2}=\dfrac{1}{3} \\ \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{2x^2}{3-3x}=\dfrac{2\cdot(-1)^2}{3-3(-1)}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow f(-1)=\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\frac{1}{3}$$

La función es continua en $x = -1$.

Resumiendo: La función es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$.

b)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)^{2x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{2+x^2}\right)^{2x^2-1}=1^\infty=Indeterminación(n^o\,e)=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2-1)\left(\frac{x^2}{2+x^2}-1\right)}=\ldots$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2-1)\left(\dfrac{x^2}{2+x^2}-1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2-1)\left(\dfrac{x^2-2-x^2}{2+x^2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-2(2x^2-1)}{2+x^2}\right)= \\ =\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4x^2+2}{2+x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{-4\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}+\frac{2}{x^2}}{\frac{2}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4+\frac{2}{x^2}}{\frac{2}{x^2}+1}=\dfrac{-4+\frac{2}{\infty}}{\frac{2}{\infty}+1}=\dfrac{-4}{1}=-4\end{array}}$$

$$\ldots=e^{-4}=\boxed{\frac{1}{e^4}}$$

c) En el intervalo (–1, 0) la función es $\dfrac{2x^2}{3-3x}$

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{2x^2}{3-3x}dx = \frac{2}{3}\int_{-1}^{0} \frac{x^2}{1-x}dx = \ldots$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 1-x \\ \hline -x^2+x & -x-1 \\ \hline \quad x & \\ \quad -x+1 & \\ \hline \qquad 1 & \end{array}$$

Tenemos que $\dfrac{x^2}{1-x} = -x-1+\dfrac{1}{1-x}$

$$\ldots = \frac{2}{3}\int_{-1}^{0} -x-1+\frac{1}{1-x}dx = \frac{2}{3}\left(\int_{-1}^{0} -x-1dx + \int_{-1}^{0}\frac{1}{1-x}dx\right) = \frac{2}{3}\left[-\frac{x^2}{2}-x-\ln|1-x|\right]_{-1}^{0} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\left[-\frac{0^2}{2}-0-\ln|1-0|\right]-\left[-\frac{(-1)^2}{2}-(-1)-\ln|1-(-1)|\right]\right) = \frac{2}{3}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{2}{3}\ln 2-\frac{1}{3}}$$

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, el plano $\pi : x - z = 2$ y el punto A(1, 1, 1), se pide:
a) (0.75 puntos) Estudiar la posición relativa de *r* y π y calcular su intersección, si existe.
b) (0.75 puntos) Calcular la proyección ortogonal del punto A sobre el plano π.
c) (1 punto) Calcular el punto simétrico del punto A con respecto a la recta *r*.

a) Pasamos la recta a las ecuaciones paramétricas.

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P_r(1,0,-1) \\ \overrightarrow{v_r} = (2,1,-2) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1-2\lambda \end{cases}$$

Planteamos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y la ecuación del plano y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1-2\lambda \end{cases} \\ \pi : x - z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 1+2\lambda - (-1-2\lambda) = 2 \Rightarrow 1+2\lambda+1+2\lambda = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1+2\cdot 0 = 1 \\ y = 0 \\ z = -1-2\cdot 0 = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(1,0,-1)}$$

Plano y recta son secantes y se cortan en el punto $P(1,0,-1)$.

b) Hallamos la recta *s* perpendicular al plano que pasa por el punto A. La proyección ortogonal de A sobre el plano es el punto de corte de esta recta y el plano.

La recta *s* perpendicular tendrá como vector director el vector normal del plano.

$$\pi : x - z = 2 \Rightarrow \vec{n} = (1,0,-1)$$

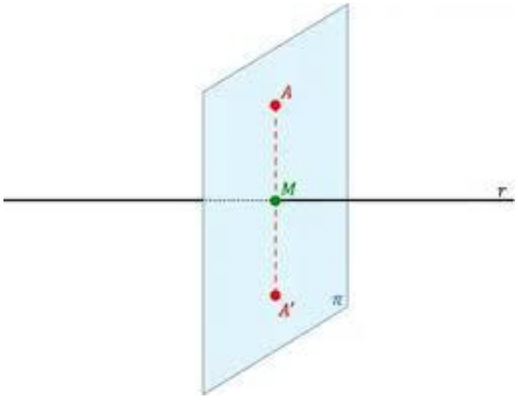
$$s : \begin{cases} \overrightarrow{v_s} = \vec{n} = (1,0,-1) \\ A(1,1,1) \in s \end{cases} \Rightarrow s : \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1 \\ z = 1-\lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto de corte de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x - z = 2 \\ s : \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1 \\ z = 1-\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 1+\lambda-(1-\lambda) = 2 \Rightarrow 2\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1+1 = 2 \\ y = 1 \\ z = 1-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A'(2,1,0)}$$

La proyección ortogonal del punto A sobre el plano π es el punto $A'(2,1,0)$.

c) Nos piden hallar el punto A´ del dibujo. Hallamos el punto M del dibujo que es la proyección ortogonal de A sobre la recta r.



Hallamos la ecuación del plano π´ perpendicular a la recta r que pasa por A.

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2} \Rightarrow \vec{v_r} = (2,1,-2) \Rightarrow \pi' : \begin{cases} \vec{n'} = \vec{v_r} = (2,1,-2) \\ A(1,1,1) \in \pi' \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi' : 2x + y - 2z + D = 0 \\ A(1,1,1) \in \pi' \end{cases} \Rightarrow 2+1-2+D=0 \Rightarrow D=-1 \Rightarrow \pi' : 2x+y-2z-1=0$$

Hallamos las coordenadas del punto M (intersección de r y π´)

$$\left. \begin{array}{l} \pi' : 2x+y-2z-1=0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1-2\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2(1+2\lambda)+\lambda-2(-1-2\lambda)-1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2+4\lambda+\lambda+2+4\lambda-1=0 \Rightarrow 9\lambda=-3 \Rightarrow \lambda = \frac{-3}{9} = \frac{-1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1+2\frac{-1}{3} = \frac{1}{3} \\ y = \frac{-1}{3} \\ z = -1-2\frac{-1}{3} = \frac{-1}{3} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$$

El punto A´ resulta de sumar al punto M el vector $\overrightarrow{AM}$.

$$\overrightarrow{AM} = \left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}\right) - (1,1,1) = \left(\frac{-2}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{-4}{3}\right)$$

$$A' = M + \overrightarrow{AM} = \left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}\right) + \left(\frac{-2}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{-4}{3}\right) = \left(\frac{-1}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{-5}{3}\right)$$

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
La longitud de la sardina del Pacífico (*Sardinops sagax*) se puede considerar que es una variable aleatoria con distribución normal de media 175 mm y desviación típica 25.75 mm.
a) (1 punto) Una empresa envasadora de esta variedad de sardinas solo admite como sardinas de calidad aquellas con una longitud superior a 16 cm. ¿Qué porcentaje de las sardinas capturadas por un buque pesquero serán de la calidad que espera la empresa envasadora?
b) (0.5 puntos) Hallar una longitud t < 175 mm tal que entre t y 175 mm estén el 18% de las sardinas capturadas.
c) (1 punto) En altamar se procesan las sardinas en lotes de 10. Posteriormente se devuelven al mar las sardinas de cada lote que son menores de 15 cm por considerarlas pequeñas. ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote haya al menos una sardina devuelta por pequeña?

X = La longitud de la sardina del Pacífico. X = N(175, 25.75).

a) Debemos calcular $P(X > 160)$.

$$P(X > 160) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{X-175}{25.75} > \frac{160-175}{25.75}\right) = P(Z > -0.58) = P(Z \leq 0.58) =$$

$$= \left\{\begin{matrix} Buscamos \\ en\, la\, tabla\, N(0,1) \end{matrix}\right\} = \boxed{0.719}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,53
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,57
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,61
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,65
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	[illegible]	0,68
0,5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,7190	0,72

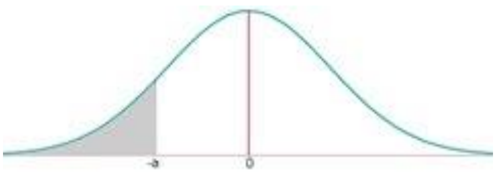
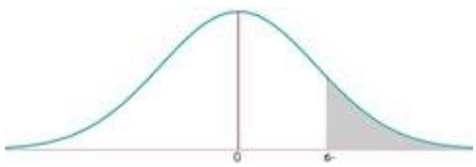
Habrá un 71.9 % de sardinas de la calidad deseada.

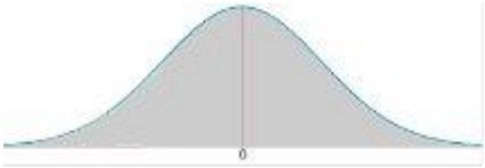
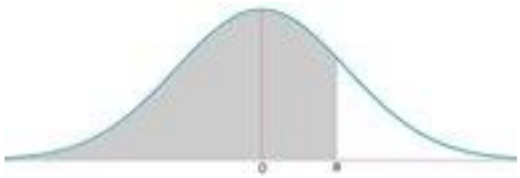
b) Debemos hallar *t* para que $P(t \leq X \leq 175) = 0.18$

$$P(t \leq X \leq 175) = 0.18 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(\frac{t-175}{25.75} \leq \frac{X-175}{25.75} \leq \frac{175-175}{25.75}\right) = 0.18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{t-175}{25.75} \leq Z \leq 0\right) = 0.18 \Rightarrow P(Z < 0) - P\left(Z < \frac{t-175}{25.75}\right) = 0.18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.5 - P\left(Z \leq \frac{t-175}{25.75}\right) = 0.18 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{t-175}{25.75}\right) = 0.32 \Rightarrow$$


=

=

$=$  $-$  $-$

$$P\left(Z\geq -\frac{t-175}{25.75}\right)=0.32\Rightarrow 1-P\left(Z\leq -\frac{t-175}{25.75}\right)=0.32\Rightarrow P\left(Z\leq -\frac{t-175}{25.75}\right)=0.68\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Mirando en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{array}\right\}\Rightarrow -\frac{t-175}{25.75}=0.47\Rightarrow -t+175=25.75\cdot 0.47\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{t=175-25.75\cdot 0.47=162.9\,mm}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6
0,4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,6808	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7

c) Es una variable binomial Y = Nº de sardinas que miden menos de 150 mm en un lote de 10.

$$p=P(X<150)=\{Tipificamos\}=P\left(Z<\frac{150-175}{25.75}\right)=P(Z<-0.97)=$$

$$=P(Z>0.97)=1-P(Z<0.97)=\left\{\begin{array}{l}\text{Buscamos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{array}\right\}=1-0.834=0.166$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8
0,9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,8340	0,8
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	[illegible]	0,8

Y = B(10, 0.166)

Nos piden calcular $P(Y\geq 1)$

$$P(Y\geq 1)=1-P(Y<1)=1-P(Y=0)=1-\binom{10}{0}\cdot 0.166^{0}\cdot 0.834^{10}=\boxed{0.8372}$$