EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

--206-MATEMÁTICAS II--

EBAU2023 - **JUNIO**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1: Una papelería vende bolígrafos, rotuladores y libretas. Una libreta cuesta el doble que un bolígrafo y un rotulador juntos, un bolígrafo cuesta la sexta parte que una libreta, y un rotulador cuesta el doble que un bolígrafo.

a) **[0,75 p.]** Denotando por x el precio de cada bolígrafo, por y el de cada rotulador y por z el de cada libreta, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente los datos del ejercicio.

b) **[0,25 p.]** Justifique que, con estos datos, no se puede conocer el precio de cada uno de los tres productos.

c) **[1 p.]** Calcule el conjunto de todas las posibles soluciones del sistema.

d) **[0,5 p.]** Sabiendo que una libreta cuesta 18 euros, calcule el precio de cada producto.

2: Considere las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} a & a \\ -1 & a \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) **[0,5 p.]** Determine para qué valores del parámetro a la matriz A es regular (o invertible).

Se sabe que cuando $a = -2$ la matriz A es regular (o invertible). Para ese valor de a:

b) **[1 p.]** Calcule la inversa de A y compruebe que $A \cdot A^{-1} = I$, con I la matriz identidad de orden 2.

c) **[1 p.]** Resuelva la ecuación matricial $AXA^{-1} + B = C^T$, donde C^T denota la matriz traspuesta de C.

3: Calcule los siguientes límites:

a) **[1,25 p.]** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(2x)-1}{x\,sen(x)}$

b) **[1,25 p.]** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{3x}$

4: Considere la función $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$, definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

a) **[0,5 p.]** Calcule $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

b) **[0,5 p.]** Calcule la derivada de *f(x)* y determine los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función.

c) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida de la función *f(x)*.

d) **[0,5 p.]** Determine la primitiva de *f(x)* que pasa por el punto (1, 1).

5: Considere las siguientes rectas:

$$r:\begin{cases} x-2y=5 \\ y+z=0 \end{cases} \quad y \quad s:\frac{x-8}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-3}{-1}.$$

a) **[1 p.]** Compruebe que ambas rectas son paralelas.

b) **[1 p.]** Compruebe que el punto $P=(7,1,-1)$ está en la recta *r* y calcule su proyección ortogonal sobre la recta *s*.

c) **[0,5 p.]** Calcule la distancia entre ambas rectas.

6: Considere el plano π de ecuación $\pi: 3x-y-2z=5$ y la recta *r* dada por

$$r:\frac{x-a}{1}=\frac{y-3+a}{1}=\frac{z}{1}.$$

a) **[1,25 p.]** Estudie la posición relativa del plano π y de la recta *r* en función del parámetro a.

Se sabe que cuando $a=0$ la recta *r* es paralela al plano π. Para ese valor de a:

b) **[0,75 p.]** Calcule la distancia de la recta *r* al plano π.

c) **[0,5 p.]** Calcule la ecuación general (o implícita) del plano que contiene a la recta r y es paralelo al plano π.

7: Dos urnas A y B contienen bolas de colores con la siguiente composición: La urna A contiene 3 bolas verdes, 3 bolas rojas y 4 bolas negras, y la urna B contiene 1 bola verde, 3 bolas rojas y 5 bolas negras. Se saca al azar una bola de la urna A y se mete en la urna B. A continuación, se saca al azar una bola de la urna B. Calcule:

a) **[0,5 p.]** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea negra, sabiendo que la bola que se sacó de la urna A era verde.

b) **[1 p.]** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea negra.

c) **[1 p.]** La probabilidad de que la bola que se sacó de la urna A fuera verde, sabiendo que la bola se ha sacado de la urna B ha sido negra.

8: En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

Se lanza una moneda al aire 100 veces y se anota el resultado del lanzamiento, que puede ser cara o cruz con la misma probabilidad. Determine:

a) **[0,5 p.]** Qué distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de veces que sale cara.

b) **[0,5 p.]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

c) **[0,5 p.]** Cuál es la probabilidad de que salga cara 60 veces.

d) **[1 p.]** Cuál es la probabilidad de que el número de veces que sale cara sea mayor o igual que 55.

SOLUCIONES

1: Una papelería vende bolígrafos, rotuladores y libretas. Una libreta cuesta el doble que un bolígrafo y un rotulador juntos, un bolígrafo cuesta la sexta parte que una libreta, y un rotulador cuesta el doble que un bolígrafo.

a) **[0,75 p.]** Denotando por *x* el precio de cada bolígrafo, por *y* el de cada rotulador y por *z* el de cada libreta, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente los datos del ejercicio.

b) **[0,25 p.]** Justifique que, con estos datos, no se puede conocer el precio de cada uno de los tres productos.

c) **[1 p.]** Calcule el conjunto de todas las posibles soluciones del sistema.

d) **[0,5 p.]** Sabiendo que una libreta cuesta 18 euros, calcule el precio de cada producto.

Llamamos "x" al precio de un bolígrafo, "y" al precio de un rotulador, "z" al precio de una libreta.

"*Una libreta cuesta el doble que un bolígrafo y un rotulador juntos*" → $z = 2(x+y)$

"*Un bolígrafo cuesta la sexta parte que una libreta*" → $x = \frac{z}{6}$

"*Un rotulador cuesta el doble que un bolígrafo*" → $y = 2x$

a) El sistema de ecuaciones queda:

$$\left.\begin{array}{l} z = 2(x+y) \\ x = \dfrac{z}{6} \\ y = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z = 2x+2y \\ 6x = z \\ y = 2x \end{array}\right\}$$

b) Lo intentamos resolver.

$$\left.\begin{array}{l} z = 2x+2y \\ 6x = z \\ y = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow 6x = 2x + 2\cdot 2x \Rightarrow 6x = 6x \Rightarrow \boxed{0=0}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

También lo podemos justificar con el método de Gauss.

$$\left.\begin{array}{l} z = 2x+2y \\ 6x = z \\ y = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rrrr} -2x & -2y & +z & =0 \\ 6x & & -z & =0 \\ -2x & +y & & =0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} + 3\cdot\text{Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrrr} 6x & & -z & =0 \\ -6x & -6y & +3z & =0 \\ \hline & -6y & +2z & =0 \end{array} \to \text{Nueva Ecuación 2ª} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrrr} -2x & +y & & =0 \\ 2x & +2y & -z & =0 \\ \hline & 3y & -z & =0 \end{array} \to \text{Nueva Ecuación 3ª} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x-2y+z=0 \\ -6y+2z=0 \\ 3y-z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2\cdot\text{Ecuación } 3^{\text{a}} + \text{Ecuación } 2^{\text{a}} \\ \quad 6y \quad -2z \quad = 0 \\ \quad -6y \quad +2z \quad = 0 \\ \hline \qquad\qquad 0 \quad = 0 \to \text{Nueva Ecuación } 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x-2y+z=0 \\ -6y+2z=0 \\ 0=0 \end{array}\right\}$$

El sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones. No se puede determinar de forma única el valor de cada articulo con la información proporcionada.

c) Terminamos de resolver el sistema a partir del sistema triangular obtenido en el apartado anterior.

$$\left.\begin{array}{r} -2x-2y+z=0 \\ -6y+2z=0 \\ 0=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x-2y+z=0 \\ -3y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x-2y+z=0 \\ z=3y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x-2y+3y=0 \Rightarrow -2x+y=0 \Rightarrow -2x=-y \Rightarrow x=\frac{y}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{\lambda}{2} \\ y=\lambda \ \ , \lambda\in\mathbb{R} \\ z=3\lambda \end{array}\right.}$$

d) Si tomamos $z = 18$ obtenemos el resto de precios.

$$\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{\lambda}{2} \\ y=\lambda \\ z=3\lambda=18 \to \lambda=6 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{6}{2}=3 \\ y=6 \end{array}\right.$$

El bolígrafo cuesta 3 euros, el rotulador 6 euros y la libreta 18 euros.

2: Considere las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} a & a \\ -1 & a \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\ y\ C=\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) **[0,5 p.]** Determine para qué valores del parámetro a la matriz A es regular (o invertible).
Se sabe que cuando $a = -2$ la matriz A es regular (o invertible). Para ese valor de a:
b) **[1 p.]** Calcule la inversa de A y compruebe que $A\cdot A^{-1}=I$, con I la matriz identidad de orden 2.
c) **[1 p.]** Resuelva la ecuación matricial $AXA^{-1}+B=C^T$, donde C^T denota la matriz traspuesta de C.

a) Para que sea invertible su determinante debe ser no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & a \\ -1 & a \end{vmatrix}=a^2+a$$

$$|A|=0 \Rightarrow a^2+a=0 \Rightarrow a(a+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a+1=0 \rightarrow a=-1 \end{cases}$$

La matriz A es invertible para cualquier valor de a distinto de 0 y de –1.

b) Para $a = -2$ la matriz A es regular, calculamos su inversa.

$$A=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=4-2=2\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}}$$

Comprobamos que $A\cdot A^{-1}=I$.

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-1 & -2+2 \\ 1-1 & -1+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

c) Despejamos X de la ecuación $AXA^{-1}+B=C^T$.

$$AXA^{-1}=C^T-B \Rightarrow A^{-1}AXA^{-1}=A^{-1}\left(C^T-B\right) \Rightarrow XA^{-1}=A^{-1}\left(C^T-B\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow XA^{-1}A=A^{-1}\left(C^T-B\right)A \Rightarrow X=A^{-1}\left(C^T-B\right)A$$

Calculamos la expresión de la matriz X.

$$C^T - B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}\left(C^T - B\right)A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6-8 & -2 \\ 3+8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -2 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28+2 & 28+4 \\ -22-1 & -22-2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 30 & 32 \\ -23 & -24 \end{pmatrix}}$$

3: Calcule los siguientes límites:

a) **[1,25 p.]** $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-1}{xsen(x)}$

b) **[1,25 p.]** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{3x}$

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-1}{xsen(x)}=\frac{\cos(0)-1}{0\cdot sen(0)}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L\acute{}Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cdot sen(2x)}{sen(x)+x\cos(x)}=\frac{-2\cdot sen(0)}{sen(0)+0\cdot\cos(0)}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L\acute{}Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-4\cos(2x)}{\cos(x)+\cos(x)+x(-sen(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{-4\cos(2x)}{2\cos(x)-xsen(x)}=\frac{-4\cos(0)}{2\cos(0)-0\cdot sen(0)}=$$

$$=\frac{-4}{2}=\boxed{-2}$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{3x}=\frac{\sqrt{9}-\sqrt{9}}{0}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L\acute{}Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{9+x}}-\frac{-1}{2\sqrt{9-x}}}{3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{9+x}}+\frac{1}{2\sqrt{9-x}}}{3}=\frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}{3}=\frac{\frac{2}{6}}{3}=\frac{2}{18}=\boxed{\frac{1}{9}}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{3x}=\frac{\sqrt{9}-\sqrt{9}}{0}=\frac{0}{0}=Indeterminación(Conjugado)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}\right)\left(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}\right)}{3x\left(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{9+x}\right)^2-\left(\sqrt{9-x}\right)^2}{3x\left(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{9+x-(9-x)}{3x\left(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{9+x-9+x}{3x\left(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cancel{x}}{3\cancel{x}\left(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{3\left(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}\right)}=\frac{2}{3(3+3)}=\frac{2}{18}=\boxed{\frac{1}{9}}$$

4: Considere la función $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$, definida para todo valor de $x\in\mathbb{R}$.

a) **[0,5 p.]** Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) **[0,5 p.]** Calcule la derivada de *f(x)* y determine los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función.

c) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida de la función *f(x)*.

d) **[0,5 p.]** Determine la primitiva de *f(x)* que pasa por el punto (1, 1).

a) $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}=\frac{1}{\frac{1}{\infty}+1}=\frac{1}{0+1}=\boxed{1}$$

b) Calculamos la función derivada.

$$f'(x)=\frac{2x\left(1+x^2\right)-2x\cdot x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2x+2x^3-2x^3}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Determinamos sus puntos críticos.

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}=0\Rightarrow x=0$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor. Como el dominio es todo $\mathbb{R}$ no añadimos ningún otro valor a este estudio.

En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos *x = –1* y la derivada vale $f'(-1)=\dfrac{2(-1)}{\left(1+(-1)^2\right)^2}=\dfrac{-2}{4}<0$. La función decrece en $(-\infty,0)$.

En el intervalo $(0,+\infty)$ tomamos *x = 1* y la derivada vale $f'(1)=\dfrac{2(1)}{\left(1+1^2\right)^2}=\dfrac{2}{4}>0$. La función crece en $(0,+\infty)$.

Resumiendo: La función decrece en $(-\infty,0)$ y crece en $(0,+\infty)$.

c)

$$F(x)=\int f(x)dx=\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=\int\frac{x^2+1}{1+x^2}dx-\int\frac{1}{1+x^2}dx=$$

$$=\int dx-\int\frac{1}{1+x^2}dx=\boxed{x-arctg(x)+K}$$

d) Para hallar el valor de *K* hacemos que *F(1) = 1*.

$$\left.\begin{array}{l} F(x) = x - arctg(x) + K \\ F(1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = 1 - arctg(1) + K \Rightarrow 1 = 1 - \frac{\pi}{4} + K \Rightarrow K = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x) = x - arctg(x) + \frac{\pi}{4}}$$

5: Considere las siguientes rectas:

$$r:\begin{cases} x-2y=5 \\ y+z=0 \end{cases} \ y \ s:\frac{x-8}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-3}{-1}.$$

a) **[1 p.]** Compruebe que ambas rectas son paralelas.

b) **[1 p.]** Compruebe que el punto $P=(7,1,-1)$ está en la recta r y calcule su proyección ortogonal sobre la recta s.

c) **[0,5 p.]** Calcule la distancia entre ambas rectas.

a) Hallamos un vector director de cada recta y comprobamos si tienen coordenadas proporcionales y por tanto indican la misma dirección, siendo las rectas paralelas.

$$r:\begin{cases} x-2y=5 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y+5 \\ z=-y \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=5+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(5,0,0) \\ \overrightarrow{u_r}=(2,1,-1) \end{cases}$$

$$s:\frac{x-8}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-3}{-1} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(8,-3,3) \\ \overrightarrow{v_s}=(2,1,-1) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(2,1,-1) \\ \overrightarrow{v_s}=(2,1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{2}=\frac{1}{1}=\frac{-1}{-1}$$

Las rectas son paralelas o coincidentes al tener el mismo vector director.
Comprobamos si la recta s pasa por el punto $P_r(5,0,0)$ de la recta r.

$$\left.\begin{array}{l} ¿P_r(5,0,0)\in s? \\ s:\frac{x-8}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-3}{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow ¿\frac{5-8}{2}=\frac{0+3}{1}=\frac{0-3}{-1}? \Rightarrow \frac{-3}{2}\neq\frac{3}{1}=\frac{-3}{-1}$$

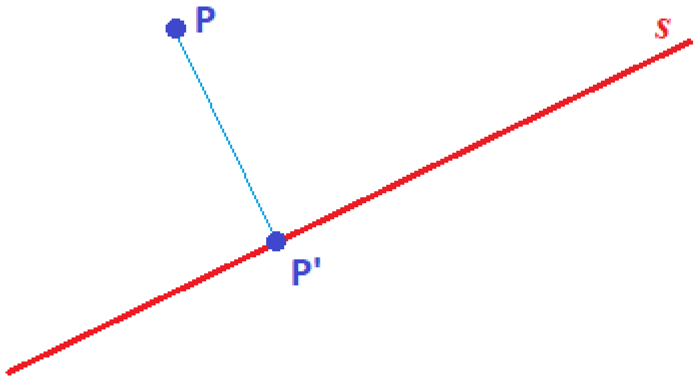
La recta s no pasa por el punto P_r y las rectas son paralelas.

b) Sustituimos las coordenadas del punto P en las ecuaciones de la recta r y comprobamos si las satisface.

$$\left.\begin{array}{l} P=(7,1,-1) \\ r:\begin{cases} x-2y=5 \\ y+z=0 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow ¿\begin{cases} 7-2\cdot 1=5 \\ 1+(-1)=0 \end{cases}?$$

Se cumplen las dos ecuaciones y el punto P pertenece a la recta r.

c) Nos piden hallar las coordenadas del punto P´ del dibujo.



Hallamos el plano perpendicular a la recta que pasa por P. El punto P´ será el punto de corte de recta y plano.

El plano perpendicular a la recta *s* tendrá como vector normal el vector director de la recta.

$$s:\frac{x-8}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-3}{-1}\Rightarrow \vec{v_s}=(2,1,-1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=\vec{v_s}=(2,1,-1)\\ P(7,1,-1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\pi:2x+y-z+D=0\\ P(7,1,-1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow 14+1-(-1)+D=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=-16\Rightarrow \pi:2x+y-z-16=0$$

Hallamos el punto P´ de corte de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l}s:\begin{cases}x=8+2\lambda\\ y=-3+\lambda\\ z=3-\lambda\end{cases}\\ \pi:2x+y-z-16=0\end{array}\right\}\Rightarrow 2(8+2\lambda)+(-3+\lambda)-(3-\lambda)-16=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16+4\lambda-3+\lambda-3+\lambda-16=0\Rightarrow 6\lambda-6=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda=1\Rightarrow\begin{cases}x=8+2=10\\ y=-3+1=-2\\ z=3-1=2\end{cases}\Rightarrow \boxed{P´(10,-2,2)}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

El punto P´ es un punto de la recta *s* que debe de cumplir que el vector $\overrightarrow{PP´}$ sea perpendicular al vector director de la recta y por lo tanto su producto escalar debe ser 0.

$$\left.\begin{array}{l} P' \in s \\ s:\begin{cases} x = 8+2\lambda \\ y = -3+\lambda \\ z = 3-\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow P'(8+2\lambda, -3+\lambda, 3-\lambda)$$

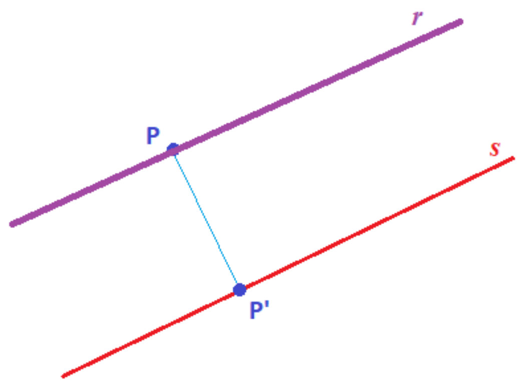
$$\overrightarrow{PP'} = (8+2\lambda, -3+\lambda, 3-\lambda) - (7,1,-1) = (1+2\lambda, -4+\lambda, 4-\lambda)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PP'} = (1+2\lambda, -4+\lambda, 4-\lambda) \\ \vec{v}_s = (2,1,-1) \\ \overrightarrow{PP'} \perp \vec{v}_s \to \overrightarrow{PP'} \cdot \vec{v}_s = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (1+2\lambda, -4+\lambda, 4-\lambda)(2,1,-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(1+2\lambda) + (-4+\lambda) - (4-\lambda) = 0 \Rightarrow 2+4\lambda-4+\lambda-4+\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\lambda - 6 = 0 \Rightarrow 6\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow P'(8+2, -3+1, 3-1) \Rightarrow \boxed{P'(10,-2,2)}$$

d) Como el punto P está en la recta r y el punto P' es la proyección ortogonal del punto P en la recta s que es paralela a r la distancia entre las rectas es la distancia entre P y P' o lo que es lo mismo el módulo del vector $\overrightarrow{PP'}$.



$$\overrightarrow{PP'} = (10,-2,2) - (7,1,-1) = (3,-3,3)$$

$$d(r,s) = d(P,P') = \left|\overrightarrow{PP'}\right| = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{27} = \boxed{3\sqrt{3} \simeq 5.196\, u}$$

6: Considere el plano π de ecuación $\pi: 3x - y - 2z = 5$ y la recta r dada por

$$r: \frac{x-a}{1} = \frac{y-3+a}{1} = \frac{z}{1}.$$

a) **[1,25 p.]** Estudie la posición relativa del plano π y de la recta r en función del parámetro a.

Se sabe que cuando $a = 0$ la recta r es paralela al plano π. Para ese valor de a:

b) **[0,75 p.]** Calcule la distancia de la recta r al plano π.

c) **[0,5 p.]** Calcule la ecuación general (o implícita) del plano que contiene a la recta r y es paralelo al plano π.

a) La recta puede estar contenida en el plano, ser paralela al plano (no coincidir en ningún punto) o ser secantes (cortar al plano en un único punto).

$$\pi: 3x - y - 2z = 5 \Rightarrow \vec{n} = (3, -1, -2)$$

$$r: \frac{x-a}{1} = \frac{y-(3-a)}{1} = \frac{z}{1} \Rightarrow r: \begin{cases} P_r(a, 3-a, 0) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,1,1) \end{cases}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{u_r} = (3,-1,-2)(1,1,1) = 3 - 1 - 2 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{u_r}$$

Al ser el vector normal del plano y el director de la recta perpendiculares la recta y el plano o son paralelos o la recta está contenida en el plano. Dependerá de que el punto P_r esté en el plano o no.

$$\left.\begin{array}{l} \pi: 3x - y - 2z = 5 \\ P_r(a, 3-a, 0) \\ ¿P_r \in \pi? \end{array}\right\} \Rightarrow 3a - (3-a) - 2 \cdot 0 = 5 \Rightarrow 3a - 3 + a = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = \frac{8}{4} = 2$$

Si $a = 2$ el punto P_r pertenece al plano y la recta está contenida en el plano.
Si $a \neq 2$ el punto P_r no pertenece al plano y la recta es paralela al plano.

b) . Para $a = 0$ la recta queda $r: \frac{x}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1} \Rightarrow r: \begin{cases} P_r(0,3,0) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,1,1) \end{cases}$ y la recta y el plano son paralelos.

La distancia de r al plano π será la distancia del punto P_r al plano $\pi: 3x - y - 2z = 5$.

$$\left.\begin{array}{l} \pi: 3x - y - 2z - 5 = 0 \\ P_r(0,3,0) \end{array}\right\} \Rightarrow d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|3 \cdot 0 - 3 - 2 \cdot 0 - 5|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{|-8|}{\sqrt{14}} = \boxed{\frac{8}{\sqrt{14}} \simeq 2.138u}$$

c) El plano π´ que contiene a la recta r y es paralelo al plano π tiene el mismo vector normal y contiene el punto P_r.

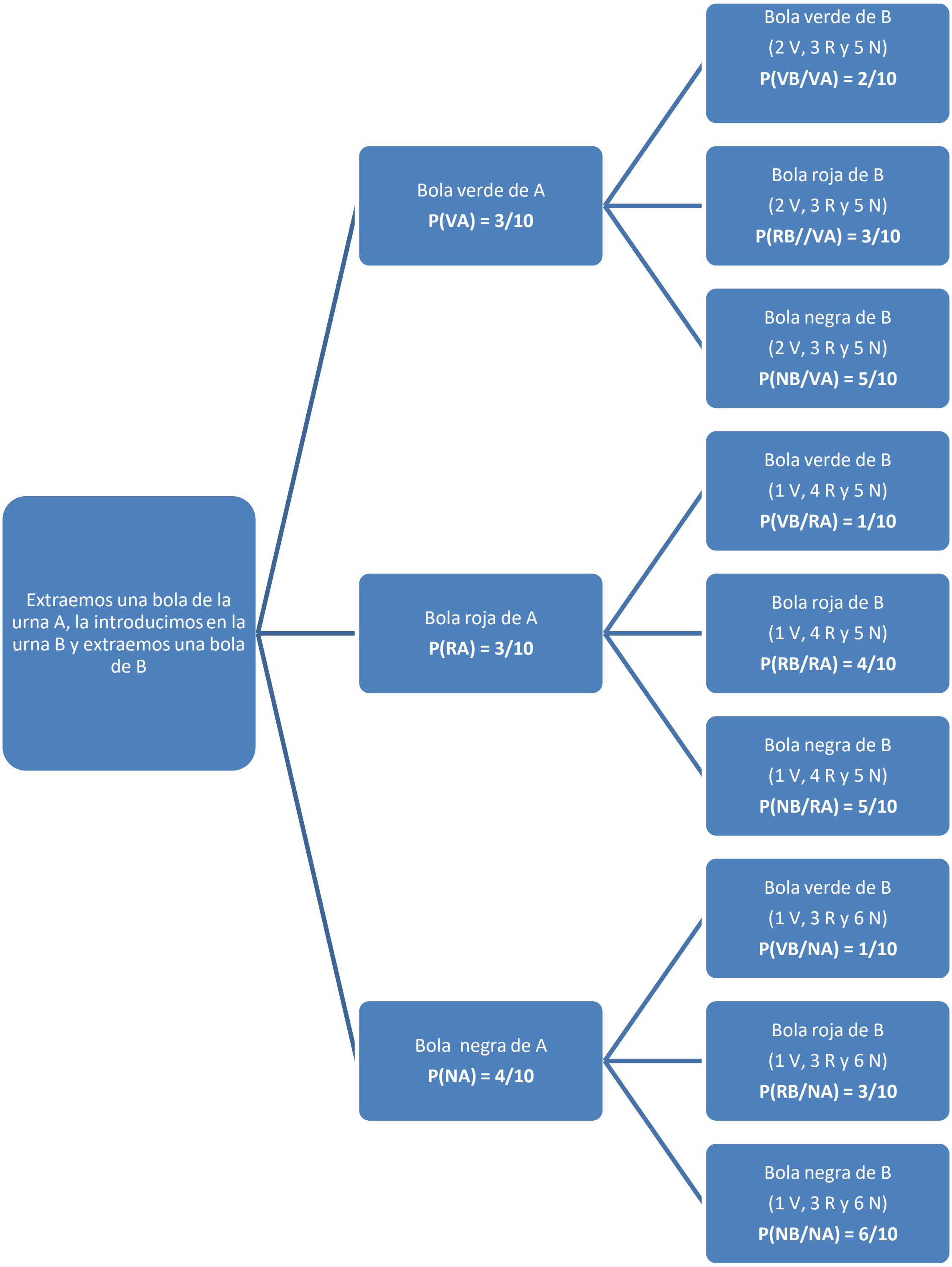
$$\pi : 3x - y - 2z - 5 = 0 \Rightarrow \pi' : 3x - y - 2z + D = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi' : 3x - y - 2z + D = 0 \\ P_r(0,3,0) \in \pi' \end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot 0 - 3 - 2\cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi' : 3x - y - 2z + 3 = 0}$$

7: Dos urnas A y B contienen bolas de colores con la siguiente composición: La urna A contiene 3 bolas verdes, 3 bolas rojas y 4 bolas negras, y la urna B contiene 1 bola verde, 3 bolas rojas y 5 bolas negras. Se saca al azar una bola de la urna A y se mete en la urna B. A continuación, se saca al azar una bola de la urna B. Calcule:
a) **[0,5 p.]** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea negra, sabiendo que la bola que se sacó de la urna A era verde.
b) **[1 p.]** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea negra.
c) **[1 p.]** La probabilidad de que la bola que se sacó de la urna A fuera verde, sabiendo que la bola se ha sacado de la urna B ha sido negra.

Realizamos un diagrama de árbol para establecer las probabilidades de los distintos sucesos del experimento.



Llamamos *VA* al suceso "Sacar Verde en urna A", *NA* al suceso "Sacar Negra en urna A, *RA* a "Sacar Roja en urna A", de la misma manera llamamos *VB* a "Sacar verde en urna B", *NB* a "Sacar Negra en urna B" y *RB* a "Sacar Roja en urna B".

a) Si sacamos una bola verde de la urna A y la introducimos en la urna B, tendremos en dicha urna 9 +1 = 10 bolas, siendo 5 de ellas de color negro. Aplicando la regla de Laplace tenemos que:

$$P(NB/VA)=\frac{5}{10}=\boxed{0.5}$$

b)

$$P(NB)=P(VA)\cdot P(NB/VA)+P(RA)\cdot P(NB/RA)+P(NA)\cdot P(NB/NA)=$$

$$=\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{10}+\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{10}+\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{10}=\frac{54}{100}=\boxed{0.54}$$

c) Es una probabilidad a posteriori, utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(VA/NB)=\frac{P(VA\cap NB)}{P(NB)}=\frac{P(VA)P(NB/VA)}{P(NB)}=\frac{\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{10}}{0.54}=\boxed{\frac{5}{18}\simeq 0.27778}$$

8: En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

Se lanza una moneda al aire 100 veces y se anota el resultado del lanzamiento, que puede ser cara o cruz con la misma probabilidad. Determine:
a) **[0,5 p.]** Qué distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de veces que sale cara.
b) **[0,5 p.]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.
c) **[0,5 p.]** Cuál es la probabilidad de que salga cara 60 veces.
d) **[1 p.]** Cuál es la probabilidad de que el número de veces que sale cara sea mayor o igual que 55.

a) X = "número de veces que sale cara en 100 lanzamientos de una moneda"

Es una variable binomial, pues las repeticiones son independientes entre si y la realización de cada tirada solo tiene dos opciones: Éxito = "sacar cara" y Fracaso = "sacar cruz".

El número de repeticiones es $n = 100$ y $p = P(\text{sacar cara al lanzar una moneda}) = 1/2 = 0.5$.

X = B(100, 0.5)

b) Media = $\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0.5 = 50$ y la desviación típica es $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{100 \cdot 0.5 \cdot 0.5} = 5$

c) Nos piden calcular $P(X = 60)$.

$$P(X = 60) = \binom{100}{60} \cdot 0.5^{60} \cdot 0.5^{40} \simeq 0.1084$$

d) Esta probabilidad usando la binomial es muy costosa de calcular pues es:

$$P(X \geq 55) = P(X = 55) + P(X = 56) + ... + P(X = 100).$$

La calculamos usando la aproximación a la distribución normal.

Como $\left.\begin{array}{l} n \cdot p = 100 \cdot 0.5 = 50 \geq 5 \\ n \cdot \text{q} = 100 \cdot 0.5 = 50 \geq 5 \end{array}\right\}$ la aproximación es buena.

Se aproxima a una normal de media 50 y desviación típica 5.

$$X = B(100, 0.5) \rightarrow Y = N(50, 5)$$

$$P(X \geq 55) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 54.5) =$$

$$= \{Tipificamos\} = P\left(\frac{Y - 50}{5} \geq \frac{54.5 - 50}{5}\right) = P(Z \geq 0.9) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.9) = \{\text{Miramos en la tabla N(0,1)}\} =$$

$$= 1 - 0.8159 = \boxed{0.1841}$$

z	0.00	0.0
0.0	0.5000	0.50
0.1	0.5398	0.54
0.2	0.5793	0.58
0.3	0.6179	0.62
0.4	0.6554	0.65
0.5	0.6915	0.69
0.6	0.7257	0.72
0.7	0.7580	0.76
0.8	0.7881	0.79
0.9	0.8159	0.81