Pruebas de Acceso a la Universidad. Mayores de 25 años
Unibertsitatean sartzeko probak 25 hurtes gorakoentzat

CURSO / IKASTURTEA: 2022-2023

ASIGNATURA/ IRAKASGAIA: Matemáticas/ Matcmatika

Responde a dos opciones de las cuatro que se presentan.

Opción A

Al) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro *a* y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x-z=0 \\ 2x+ay=2 \\ 3x+ay+az=a^2+1 \end{cases}$$

(5 puntos)

A2) Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$$\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3+x^2-3x}dx$$

$$\int \cos^2 x sen x dx$$

(5 puntos)

Opción B

B1) Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P \equiv (1,1,2)$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x+2y+z+2=0 \\ -x+y+2z=0 \end{cases}$$

(5 puntos)

B2) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{sen^2 x}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4-2n^3+7}}{2n^2-1}$$

(5 puntos)

Opción C

Cl) Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \ y \ B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcula el determinante de matrices AB y el de $A + B$. (5 puntos)

C2) Calcula la derivada de cada una de las funciones siguientes:

$$f(x)=\frac{sen(x+1)}{\sqrt{x+1}}$$

$$g(x)=\ln\left(tg(x)\right)^2$$

Opción D

Dl) Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P\equiv(1,0,1)$ y contiene a la recta

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+4}{2}$$ (5 puntos)

D2) Calcula el máximo relativo, el mínimo relativo y el punto de inflexión de la curva

$$y=-x^3+3x^2+9x+4$$

(5 puntos)

SOLUCIONES

Opción A

Al) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x-z=0 \\ 2x+ay=2 \\ 3x+ay+az=a^2+1 \end{cases}$$ (5 puntos)

Este sistema tiene asociadas la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & a & 0 \\ 3 & a & a \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ 3 & a & a & a^2+1 \end{pmatrix}$$

Estudiamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & a & 0 \\ 3 & a & a \end{vmatrix}=a^2-2a+3a=a^2+a$$

$$|A|=0 \Rightarrow a^2+a=0 \Rightarrow a(a+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a+1=0 \rightarrow a=-1 \end{cases}$$

Analizamos por separado tres situaciones diferentes.

CASO 1. $a \neq 0 \ y \ a \neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x-z=0 \\ 2x+ay=2 \\ 3x+ay+az=a^2+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z \\ 2x+ay=2 \\ 3x+ay+az=a^2+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z+ay=2 \\ 3z+ay+az=a^2+1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2z+ay=2 \\ ay+(a+3)z=a^2+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z=2-ay \rightarrow z=\dfrac{2-ay}{2}=1-\dfrac{a}{2}y \\ ay+(a+3)z=a^2+1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ay+(a+3)\left(1-\frac{a}{2}y\right)=a^2+1 \Rightarrow ay+a-\frac{a^2}{2}y+3-\frac{3a}{2}y=a^2+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a-\frac{a^2}{2}-\frac{3a}{2}\right)y=a^2-2-a \Rightarrow \frac{2a-a^2-3a}{2}y=a^2-a-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-a^2-a}{2}y=a^2-a-2 \Rightarrow y=\frac{a^2-a-2}{\frac{-a^2-a}{2}}=\frac{2\left(a^2-a-2\right)}{-a^2-a}=\frac{2(a+1)(a-2)}{-a(a+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{a+1\neq 0\} \Rightarrow \boxed{y=\frac{2(a-2)}{-a}=\frac{2(2-a)}{a}} \Rightarrow z=1-\frac{a}{2}y=1-\frac{\cancel{a}}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}(2-a)}{\cancel{a}}$$

$$\boxed{z=1-(2-a)=a-1} \Rightarrow \boxed{x=z=a-1} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=a-1 \\ y=\dfrac{2(2-a)}{a}=\dfrac{4-2a}{a} \\ z=a-1 \end{cases}}$$

CASO 2. $a=0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Estudiamos su rango y el de la ampliada usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2\cdot\text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 2^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3\cdot\text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 3 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2\cdot\text{Fila } 3^a - 3\cdot\text{Fila } 2^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} & & & -4 \end{pmatrix}}^{A/B}$$

El rango de A es 2 y el rango de A/B es 3. Son distintos y el sistema es incompatible.

CASO 3. $a=-1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Estudiamos su rango y el de la ampliada usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 2\\ 3 & -1 & -1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila }2^a - 2\cdot\text{Fila }1^a\\ \;2 \quad -1 \quad 0 \quad 2\\ -2 \quad 0 \quad 2 \quad 0\\ \hline \;0 \quad -1 \quad 2 \quad 2\rightarrow\text{Nueva Fila }2^a\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila }3^a - 3\cdot\text{Fila }1^a\\ \;3 \quad -1 \quad -1 \quad 2\\ -3 \quad 0 \quad 3 \quad 0\\ \hline \;0 \quad -1 \quad 2 \quad 2\rightarrow\text{Nueva Fila }3^a\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 2\\ 0 & -1 & 2 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila }3^a - \text{Fila }2^a\\ 0 \quad -1 \quad 2 \quad 2\\ 0 \quad 1 \quad -2 \quad -2\\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\rightarrow\text{Nueva Fila }3^a\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\overbrace{\begin{matrix}\underbrace{\begin{matrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}0\\ 2\\ 0\end{matrix}\end{matrix}}^{A/B}\right)$$

El rango de A es 2 y el rango de A/B también es 2, siendo el número de incógnitas 3. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Lo resolvemos a partir del sistema equivalente obtenido con el método de Gauss.

$$\left.\begin{array}{r}x-z=0\\ -y+2z=2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=z\\ 2z-2=y\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}x=\lambda\\ y=-2+2\lambda\\ z=\lambda\end{cases}}$$

A2) Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$$\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3+x^2-3x}dx$$

$$\int \cos^2 x senx dx$$

(5 puntos)

Primera integral

$$\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3+x^2-3x}dx = \int \frac{2\left(3x^2+2x-3\right)}{x^3+x^2-3x}dx = 2\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3+x^2-3x}dx = \boxed{2\ln\left|x^3+x^2-3x\right|+K}$$

Segunda integral

$$\int \cos^2 x senx dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \cos x = t \Rightarrow -senx dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{-senx} \end{array} \right\} = \int t^2 \cancel{senx} \frac{dt}{-\cancel{senx}} = -\int t^2 dt = -\frac{t^3}{3} = \boxed{\frac{-\cos^3 x}{3}+K}$$

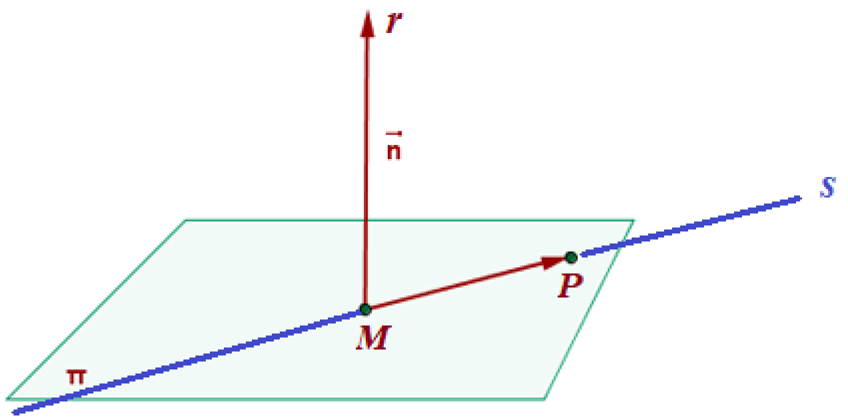
Opción B

B1) Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P \equiv (1,1,2)$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x+2y+z+2=0 \\ -x+y+2z=0 \end{cases}$$

(5 puntos)

Hallamos el plano perpendicular a la recta *r* que pasa por el punto P. El punto M de corte de recta y plano pertenecería a la recta *s* pedida y la podemos obtener a partir de los puntos M y P pertenecientes a la recta.



Hallamos un vector director de la recta *r*.

$$r \equiv \begin{cases} x+2y+z+2=0 \\ -x+y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2y-z-2 \\ -x+y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow 2y+z+2+y+2z=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y+3z+2=0 \Rightarrow 3y=-2-3z \Rightarrow \boxed{y=-\frac{2}{3}-z} \Rightarrow x=-2\left(-\frac{2}{3}-z\right)-z-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{4}{3}+2z-z-2=\frac{-2}{3}+z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\frac{-2}{3}+\lambda \\ y=\frac{-2}{3}-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v_r}=(1,-1,1)$$

El plano perpendicular a la recta *r* tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$\pi : \left. \begin{array}{l} \vec{n}=\vec{v_r}=(1,-1,1) \\ P(1,1,2)\in\pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi : x-y+z+D=0 \\ P(1,1,2)\in\pi \end{array} \right\} \Rightarrow 1-1+2+D=0 \Rightarrow D=-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi : x-y+z-2=0}$$

Hallamos el punto de corte de la recta *r* y el plano π.

$$\left.\begin{array}{l}\pi : x-y+z-2=0 \\ r \equiv \begin{cases} x = \dfrac{-2}{3}+\lambda \\ y = \dfrac{-2}{3}-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-2}{3}+\lambda+\frac{2}{3}+\lambda+\lambda-2=0 \Rightarrow 3\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda=\frac{2}{3} \Rightarrow$$

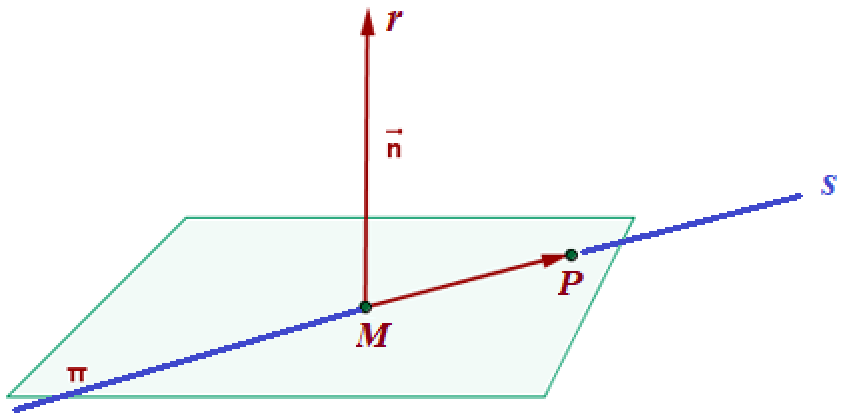
$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-2}{3}+\dfrac{2}{3}=0 \\ y=\dfrac{-2}{3}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{-4}{3} \Rightarrow \boxed{M\left(0,\dfrac{-4}{3},\dfrac{2}{3}\right)} \\ z=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Hallamos la ecuación de la recta *s* pedida que pasa por el punto P y M.

$$\left.\begin{array}{l} M\left(0,\dfrac{-4}{3},\dfrac{2}{3}\right) \\ P(1,1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{MP}=(1,1,2)-\left(0,\dfrac{-4}{3},\dfrac{2}{3}\right)=\left(1,\dfrac{7}{3},\dfrac{4}{3}\right)\rightarrow \overrightarrow{v_s}=(3,7,4) \\ P(1,1,2)\in s \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{s : \frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-2}{4}}$$

OTRA FORMA DE HACERLO



Necesitamos hallar el punto M del dibujo. De él sabemos que pertenece a la recta *r* y que el vector $\overrightarrow{MP}$ es perpendicular al vector director de la recta $\overrightarrow{v_r}=(1,-1,1)$.

$$M(a,b,c) \Rightarrow \overrightarrow{MP}=(1,1,2)-(a,b,c)=(1-a,1-b,2-c)$$

$$\vec{v_r} \perp \overrightarrow{MP} \Rightarrow \vec{v_r} \cdot \overrightarrow{MP} = 0 \Rightarrow (1,-1,1)(1-a,1-b,2-c) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-a-1+b+2-c=0 \Rightarrow \boxed{-a+b-c=-2}$$

$$\left. \begin{array}{l} M(a,b,c) \in r \\ r \equiv \begin{cases} x+2y+z+2=0 \\ -x+y+2z=0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a+2b+c+2=0 \\ -a+b+2c=0 \end{cases}}$$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{r} -a+b-c=-2 \\ a+2b+c=-2 \\ -a+b+2c=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} -a+b-c=-2 \\ a=-2b-c-2 \\ -a+b+2c=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} 2b+c+2+b-c=-2 \\ 2b+c+2+b+2c=0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3b=-4 \to \boxed{b=\frac{-4}{3}} \\ 3b+3c=-2 \end{array} \right\} \Rightarrow 3\frac{-4}{3}+3c=-2 \Rightarrow -4+3c=-2 \Rightarrow 3c=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{c=\frac{2}{3}} \Rightarrow a=-2\frac{-4}{3}-\frac{2}{3}-2=\frac{8}{3}-\frac{2}{3}-2=0 \Rightarrow \boxed{M\left(0,\frac{-4}{3},\frac{2}{3}\right)}$$

Hallamos la ecuación de la recta *s* pedida que pasa por el punto P y M.

$$\left. \begin{array}{l} M\left(0,\frac{-4}{3},\frac{2}{3}\right) \\ P(1,1,2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{MP}=(1,1,2)-\left(0,\frac{-4}{3},\frac{2}{3}\right)=\left(1,\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right) \to \vec{v_s}=(3,7,4) \\ P(1,1,2) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{s: \frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-2}{4}}$$

B2) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{sen^2 x}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4-2n^3+7}}{2n^2-1}$$

(5 puntos)

El primer límite

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{sen^2 x}\right)=\frac{1-1}{0^2}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L´Hôpital)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{0-(-senx)}{2senx\cos x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{senx}}{2\,\cancel{senx}\,\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos x}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

El segundo límite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4-2n^3+7}}{2n^2-1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4}}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}}{2\cancel{n^2}}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

Otra forma de hacerlo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4-2n^3+7}}{2n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{n^4}{n^4}-\frac{2n^3}{n^4}+\frac{7}{n^4}}}{\frac{2n^2}{n^2}-\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{7}{n^4}}}{2-\frac{1}{n^2}}=\frac{\sqrt{1-\frac{2}{\infty}+\frac{7}{\infty^4}}}{2-\frac{1}{\infty^2}}=\frac{\sqrt{1-0+0}}{2-0}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

Opción C

Cl) Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix} \; y \; B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

calcula el determinante de matrices *AB* y el de *A* + *B*. (5 puntos)

Obtenemos la expresión de la matriz AB.

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-3 & -2+1 & -1\\ 3-1+6 & -3-1-2 & 2\\ -6 & 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 8 & -6 & 2\\ -6 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

Hallamos su determinante.

$$|AB|=\begin{vmatrix}-1 & -1 & -1\\ 8 & -6 & 2\\ -6 & 2 & -2\end{vmatrix}=-12+12-16+36-16+4=\boxed{8}$$

Hallamos la expresión de la matriz A + B.

$$A+B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ 4 & 0 & 2\\ 3 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

Hallamos el valor de su determinante.

$$|A+B|=\begin{vmatrix}3 & -1 & -1\\ 4 & 0 & 2\\ 3 & -1 & -1\end{vmatrix}=0-6+4-0-4+6=\boxed{0}$$

C2) Calcula la derivada de cada una de las funciones siguientes:

$$f(x)=\frac{sen(x+1)}{\sqrt{x+1}}$$

$$g(x)=\ln\left(tg(x)\right)^2$$

La primera derivada.

$$f'(x)=\frac{\cos(x+1)\sqrt{x+1}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}sen(x+1)}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2}=\frac{\sqrt{x+1}\cos(x+1)-\frac{sen(x+1)}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}=$$

$$=\frac{\frac{2\left(\sqrt{x+1}\right)^2\cos(x+1)-sen(x+1)}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}=\boxed{\frac{2(x+1)\cos(x+1)-sen(x+1)}{2\sqrt{x+1}(x+1)}}$$

La segunda derivada

$$g'(x)=\frac{2\cancel{tg(x)}\frac{1}{\cos^2 x}}{\left(tg(x)\right)^{\cancel{2}}}=\frac{\frac{2}{\cos^2 x}}{tg(x)}=\frac{\frac{2}{\cos^2 x}}{\frac{senx}{\cos x}}=\frac{2\cancel{\cos x}}{senx\cos^{\cancel{2}} x}=\boxed{\frac{2}{senx\cos x}}$$

Opción D

Dl) Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P \equiv (1,0,1)$ y contiene a la recta

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+4}{2} \qquad \text{(5 puntos)}$$

Obtenemos un punto y un vector director de la recta.

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+4}{2} \Rightarrow \begin{cases} Q(-1,-2,-4) \\ \vec{v}=(2,1,2) \end{cases}$$

Como el plano contiene la recta el punto Q pertenece al plano y el vector director de la recta es un vector director del plano. Nos falta un segundo vector director del plano. Lo obtenemos considerando el vector $\overrightarrow{PQ}$

$$\pi : \begin{cases} P(1,0,1) \in \pi \\ \vec{v}=(2,1,2) \\ \vec{u}=\overrightarrow{PQ}=(-1,-2,-4)-(1,0,1)=(-2,-2,-5) \end{cases} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5(x-1)-4y-4(z-1)+2(z-1)+10y+4(x-1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5x+5-4y-4z+4+2z-2+10y+4x-4=0 \Rightarrow \boxed{\pi : -x+6y-2z+3=0}$$

D2) Calcula el máximo relativo, el mínimo relativo y el punto de inflexión de la curva

$$y = -x^3 + 3x^2 + 9x + 4$$

(5 puntos)

Utilizamos la derivada para hallar los máximos y mínimos.

$$\left.\begin{array}{l} y' = -3x^2 + 6x + 9 \\ y' = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -3x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \dfrac{2+4}{2} = 3 = x \\ \dfrac{2-4}{2} = -1 = x \end{cases}$$

Sustituimos estos valores en la segunda derivada y vemos si son máximos o mínimos.

$$y'' = -6x + 6 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \to y'' = -18 + 6 = -12 < 0 \to Es\ máximo \\ x = -1 \to y'' = 6 + 6 = 12 > 0 \to Es\ mínimo \end{cases}$$

Para obtener el punto de inflexión utilizamos la segunda derivada.

$$\left.\begin{array}{l} y'' = -6x + 6 \\ y'' = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -6x + 6 = 0 \Rightarrow -6x = -6 \Rightarrow x = 1$$

Comprobamos si la derivada tercera es no nula en este valor.

$$y''' = -6 \neq 0$$

La función presenta un mínimo relativo en $x = -1$, un punto de inflexión en $x = 1$ y un máximo relativo en $x = 3$.