EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

EBAU2023 - **JULIO**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Debes responder a un máximo de 4 preguntas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras que haya respondido el estudiante. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro **a**:

$$\left.\begin{array}{l} x+ay+z=1 \\ 2y+az=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \text{(2 puntos)}$$

Resolverlo para a = 3. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Sea S la región del plano delimitado por el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y \geq 2 \\ x-y \leq 4 \\ x \geq 1 \\ y \leq 2 \end{array}\right\}$$

a) Represente la región S y calcule sus vértices. (2 puntos)
b) Determine los puntos de la región factible dónde la función $f(x,y)=4x-5y$ alcanza su valor máximo y mínimo. Calcule dichos valores. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) La función de costes de una empresa $C(q)=q^2-16q+48$, donde q es el nivel de producción. Si la ecuación de demanda viene dada por la expresión $p=12-q$, dónde p es el precio unitario de venta. Determine:

a) La función de beneficios de la empresa en función del nivel de producción. (0,5 puntos).
b) El nivel de producción, *q*, para el que se maximiza la función de beneficios de la empresa. (1 punto)
c) El precio para el que se obtendría el máximo beneficio. (0,5 puntos)
d) El valor del beneficio máximo. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax+5 & si \;\; x \leq -1 \\ bx^2-2x+1 & si \;\; -1 < x \leq 2 \\ \dfrac{3x-1}{(x-1)^2} & si \;\; x > 2 \end{cases}$

a) Calcular el valor de los parámetros *a* y *b* para que la función sea continua en todo su dominio. (1,5 puntos)
b) Determine la derivada *f ´(x)* para *x > 2*. (1 punto)

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x}$, calcule:

a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes coordenados. (0,5 puntos)
b) Las asíntotas verticales y horizontales, si las hay. (0,5 puntos)
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
d) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=3e^{x+2}$:

a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=3e^{x+2}$ en el punto $x = -2$ (1,25 puntos)
b) Calcular el área del recinto limitado por la curva $f(x)=3e^{x+2}$, el eje de abscisa y la recta $x = 1$ (1,25 puntos)

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Representar gráficamente la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=9-x^2$ y $g(x)=3+x$ y calcular su área.

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) Sean A y B dos sucesos, tales que $P(A)=0,3$, $P(B/A)=0,6$ y $P(A/B)=0,3$:
   i. Calcular $P(A\cap B)$. (0,5 puntos)
   ii. Calcular $P(B)$. ¿Son los sucesos A y B independientes?, razone su respuesta (0,5 puntos)
   iii. Calcular $P(A\cup \overline{B})$ (0,5 puntos)

b) Las calificaciones de la asignatura de matemáticas de la población de una región española, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y varianza de 1.69 puntos. Se toma una muestra aleatoria de 324 estudiantes de la región obteniendo una calificación media de 5,84 puntos. Halla un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 99%. (1 punto)

SOLUCIONES

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro **a**:

$$\left.\begin{array}{l} x+ay+z=1 \\ 2y+az=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \text{(2 puntos)}$$

Resolverlo para a = 3. (0,5 puntos)

La matriz de coeficientes A asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

El determinante de A es $|A|=\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2+a^2+0-2-0-a=a^2-a$.

Veamos cuando se anula.

$$|A|=0 \Rightarrow a^2-a=0 \Rightarrow a(a-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq 1 \quad y \quad a \neq 0$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $a=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos su rango y la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Fila\,3^a - Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}}^{A/B} \\ \begin{matrix} 0 & 2 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} \; 0 \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B también es 2, pero es menor que el número de incógnitas (3).
El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones)

CASO 3. $a=0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos su rango usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&2&0&2\\1&1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}Fila\,3^a-Fila\,1^a\\ \begin{array}{cccc}1&1&1&1\\-1&0&-1&-1\\ \hline 0&1&0&0\end{array}\to \text{Nueva Fila }3^a\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&2&0&2\\0&1&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}Fila\,2^a-2\cdot Fila\,3^a\\ \begin{array}{cccc}0&2&0&2\\0&-2&0&0\\ \hline 0&0&0&2\end{array}\to \text{Nueva Fila }3^a\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\overbrace{\underbrace{\begin{matrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&0\end{matrix}}_{A}\begin{matrix}1\\2\\2\end{matrix}}^{A/B}\right)$$

El rango de A es 2, el rango de A/B es 3. Tienen rangos distintos.
El sistema es INCOMPATIBLE (sin solución)

Resumiendo: Para $a\neq 1$ y $a\neq 0$ el sistema tiene una única solución, para $a=1$ el sistema tiene infinitas soluciones y para $a=0$ el sistema no tiene solución.

Lo resolvemos para $a = 3$. Sabemos que es compatible determinado (CASO 1)

$$\left.\begin{array}{r}x+3y+z=1\\2y+3z=2\\x+y+z=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación }3^a - \text{Ecuación }1^a\\ \begin{array}{ccccc}x&+y&+z&=1\\-x&-3y&-z&=-1\\ \hline &-2y&&=0\end{array}\to \text{Nueva ecuación }3^a\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+3y+z=1\\2y+3z=2\\-2y=0\to\boxed{y=0}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+z=1\\3z=2\to\boxed{z=\frac{2}{3}}\end{array}\right\}\Rightarrow x+\frac{2}{3}=1\Rightarrow\boxed{x=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}}$$

La solución es $x=\frac{1}{3};\ y=0;\ z=\frac{2}{3}$.

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Sea S la región del plano delimitado por el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y\geq 2 \\ x-y\leq 4 \\ x\geq 1 \\ y\leq 2 \end{array}\right\}$$

a) Represente la región S y calcule sus vértices. (2 puntos)

b) Determine los puntos de la región factible dónde la función $f(x,y)=4x-5y$ alcanza su valor máximo y mínimo. Calcule dichos valores. (0,5 puntos)

a) Es un problema de programación lineal.
Dibujamos las rectas que delimitan la región S.

$3x+2y=2$

x	$y=\frac{2-3x}{2}$
0	1
2	-2
4	-5

$x-y=4$

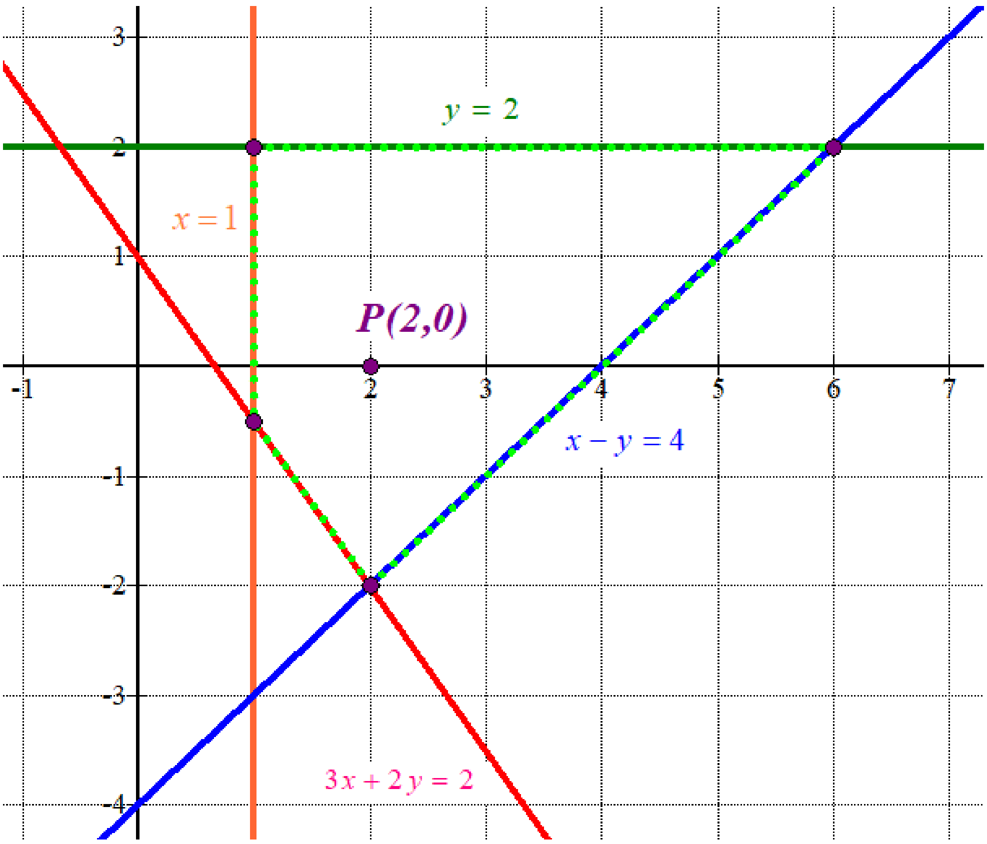
x	$y=x-4$
1	-3
2	-2
6	2

$y=2$

x	$y=2$
1	2
2	2
4	2

$x=1$

$x=1$	y
1	2
1	4
1	6

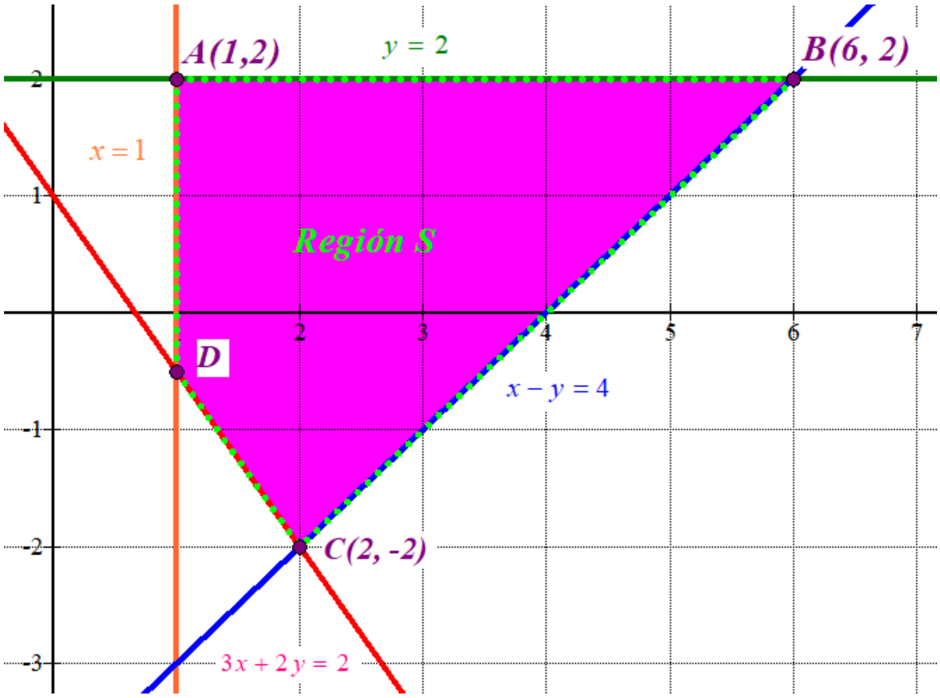


Como las restricciones son: $\left.\begin{array}{l} 3x+2y\geq 2 \\ x-y\leq 4 \\ x\geq 1 \\ y\leq 2 \end{array}\right\}$ entonces la región S es la región del plano situada a la derecha de la recta vertical, por debajo de la recta horizontal **verde** y por encima de las rectas roja y azul.

Comprobamos que el punto P(2, 0) perteneciente a dicha región del plano cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 6+0\geq 2 \\ 2-0\leq 4 \\ 2\geq 1 \\ 0\leq 2 \end{array}\right\} \text{Se cumplen todas y la región S es correcta.}$$

Coloreo de rosa la región S.



Hallamos las coordenadas del punto D.

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+2y=2 \\ x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 3+2y=2 \Rightarrow 2y=-1 \Rightarrow y=\frac{-1}{2}=-0.5 \Rightarrow \boxed{C(1,-0.5)}$$

Las coordenadas de los vértices son: A(1,2), B(6,2), C(2, –2) y D(1, –0.5)

b) Valoramos la función $f(x,y)=4x-5y$ en cada uno de los vértices en busca del mínimo y del máximo valor.

A(1, 2) → $f(1,2)=4-10=-6$ ¡Mínimo!

B(6, 2) → $f(6,2)=24-10=14$

$C(2,-2)$ → $f(2,-2)=8+10=18$ ¡Máximo!

D(1, –0.5) → $f(1,-0.5)=4+2.5=6.5$

El máximo valor de la función es 18 y se obtiene en el vértice C(2, -2).
El mínimo valor de la función es –6 y se obtiene en el vértice A(1, 2).

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) La función de costes de una empresa $C(q)=q^2-16q+48$, donde q es el nivel de producción. Si la ecuación de demanda viene dada por la expresión $p=12-q$, dónde p es el precio unitario de venta. Determine:

a) La función de beneficios de la empresa en función del nivel de producción. (0,5 puntos).
b) El nivel de producción, q, para el que se maximiza la función de beneficios de la empresa. (1 punto)
c) El precio para el que se obtendría el máximo beneficio. (0,5 puntos)
d) El valor del beneficio máximo. (0,5 puntos)

a) La función Beneficio es la diferencia entre los ingresos y los costes.
Como q representa el nivel de producción y su precio de venta es de p euros por unidad tenemos que los ingresos son $I(q)=pq=(12-q)q=12q-q^2$.

$$B(q)=I(q)-C(q)=12q-q^2-\left(q^2-16q+48\right)=-2q^2+28q-48$$

b) Derivamos la función y la igualamos a cero en busca de los candidatos a máximos.

$$B(q)=-2q^2+28q-48 \Rightarrow B'(q)=-4q+28$$

$$B'(q)=0 \Rightarrow -4q+28=0 \Rightarrow -4q=-28 \Rightarrow q=\frac{-28}{-4}=7$$

Comprobamos si es un máximo o mínimo sustituyendo en la segunda derivada.

$$B'(q)=-4q+28 \Rightarrow B''(q)=-4 \Rightarrow B''(7)=-4<0$$

Como la segunda derivada es negativa la función presenta un máximo en $q = 7$.
El beneficio es máximo con un nivel de producción de 7 unidades.

c) El precio sería $p=12-7=5$. El precio sería de 5 por unidad.

d) El beneficio máximo es de $B(7)=-2\cdot 7^2+28\cdot 7-48=50$, que significa un beneficio de 50.

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax+5 & si \;\; x\leq -1 \\ bx^2-2x+1 & si \;\; -1<x\leq 2 \\ \dfrac{3x-1}{(x-1)^2} & si \;\; x>2 \end{cases}$

a) Calcular el valor de los parámetros *a* y *b* para que la función sea continua en todo su dominio. (1,5 puntos)

b) Determine la derivada *f ´(x)* para *x > 2*. (1 punto)

a) Para que sea continua debe serlo en *x = –1*, para ello deben coincidir los límites laterales con el valor de la función.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} ax+5=-a+5 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} bx^2-2x+1=b(-1)^2-2(-1)+1=b+3 \\ f(-1)=-a+5 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=f(-1) \end{array}\right\} \Rightarrow b+3=-a+5 \Rightarrow \boxed{a=2-b}$$

También debe ser continua en *x = 2*.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} bx^2-2x+1=b(2)^2-2(2)+1=4b-3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3x-1}{(x-1)^2}=\dfrac{3(2)-1}{(2-1)^2}=\dfrac{5}{1}=5 \\ f(2)=4b-3 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2) \end{array}\right\} \Rightarrow 4b-3=5 \Rightarrow 4b=8 \Rightarrow \boxed{b=2}$$

Sustituimos el valor de *b* en la primera ecuación → $a=2-2=0$

Los valores buscados son *a = 0, b = 2.*

a) Para *x > 2* la función es $f(x)=\dfrac{3x-1}{(x-1)^2}$.

$$f´(x)=\frac{3(x-1)^2-2(x-1)(3x-1)}{\left((x-1)^2\right)^2}=\frac{3(x-1)^2-2(x-1)(3x-1)}{(x-1)^4}$$

$$f´(x)=\frac{(x-1)\left[3(x-1)-2(3x-1)\right]}{(x-1)^4}=\frac{3(x-1)-2(3x-1)}{(x-1)^3}=\frac{3x-3-6x+2}{(x-1)^3}$$

$$\boxed{f´(x)=\frac{-3x-1}{(x-1)^3}}$$

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x}$, calcule:

a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes coordenados. (0,5 puntos)
b) Las asíntotas verticales y horizontales, si las hay. (0,5 puntos)
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
d) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

a) El denominador de la función se anula para *x = 0*.

El dominio es $\mathbb{R}-\{0\}$.

Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x} \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{No existe } f(0)=\frac{4}{0}\text{. No hay punto de corte con el eje OY.}$$

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2-4x+4}{x}=0 \Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(4)}}{2}=\frac{4\pm 0}{2}=\frac{4}{2}=2 \Rightarrow A(2,0)$$

El único punto de corte con los ejes es el punto A(2, 0).

b)

Asíntota vertical. $x=a$.

¿ $x=0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-4x+4}{x}=\frac{0^2-0+4}{0}=\frac{4}{0}=\infty$$

$x=0$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+4}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\frac{2-\frac{4}{\infty}+\frac{4}{\infty}}{\frac{1}{\infty}}=\frac{2}{0}=\infty$$

No existe asíntota horizontal.

c) Obtenemos su derivada y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$f(x)=\frac{x^2-4x+4}{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{(2x-4)x-1(x^2-4x+4)}{x^2}=\frac{2x^2-4x-x^2+4x-4}{x^2}=\frac{x^2-4}{x^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2-4}{x^2}=0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = -2$ y $x = 2$, añadimos el valor excluido del dominio: $x = 0$.

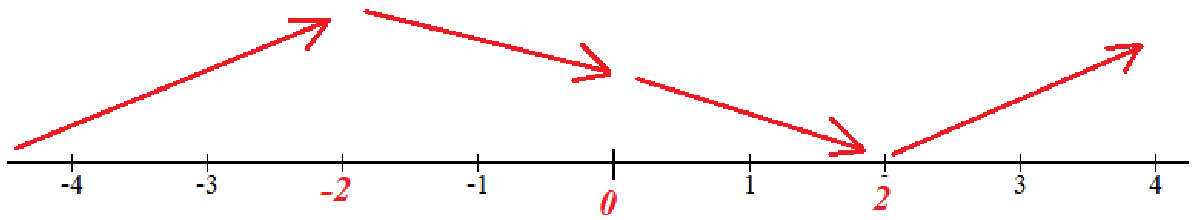
En el intervalo $(-\infty,-2)$ tomo $x = -4$ y la derivada vale $f'(-4)=\frac{(-4)^2-4}{(-4)^2}=\frac{16-4}{16}=\frac{12}{16}>0$. La función crece en $(-\infty,-2)$.

En el intervalo $(-2,0)$ tomo $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1)=\frac{(-1)^2-4}{(-1)^2}=\frac{1-4}{1}=-3<0$. La función decrece en $(-2,0)$.

En el intervalo $(0,2)$ tomo $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=\frac{1^2-4}{1^2}=\frac{1-4}{1}=-3<0$. La función decrece en $(0,2)$.

En el intervalo $(2,+\infty)$ tomo $x = 4$ y la derivada vale $f'(4)=\frac{4^2-4}{4^2}=\frac{16-4}{16}=\frac{12}{16}>0$. La función crece en $(2,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ y decrece en $(-2,0)\cup(0,2)$

d) Atendiendo al esquema superior la función presenta un máximo local en $x = -2$ y un mínimo local en $x = 2$.

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=3e^{x+2}$:

a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=3e^{x+2}$ en el punto *x* = *–2* (1,25 puntos)

b) Calcular el área del recinto limitado por la curva $f(x)=3e^{x+2}$, el eje de abscisa y la recta *x* = *1* (1,25 puntos)

a) La ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=3e^{x+2}$ en el punto *x* = *–2* es $y-f(-2)=f'(-2)(x+2)$.

$$f(x)=3e^{x+2} \Rightarrow f'(x)=3e^{x+2}$$

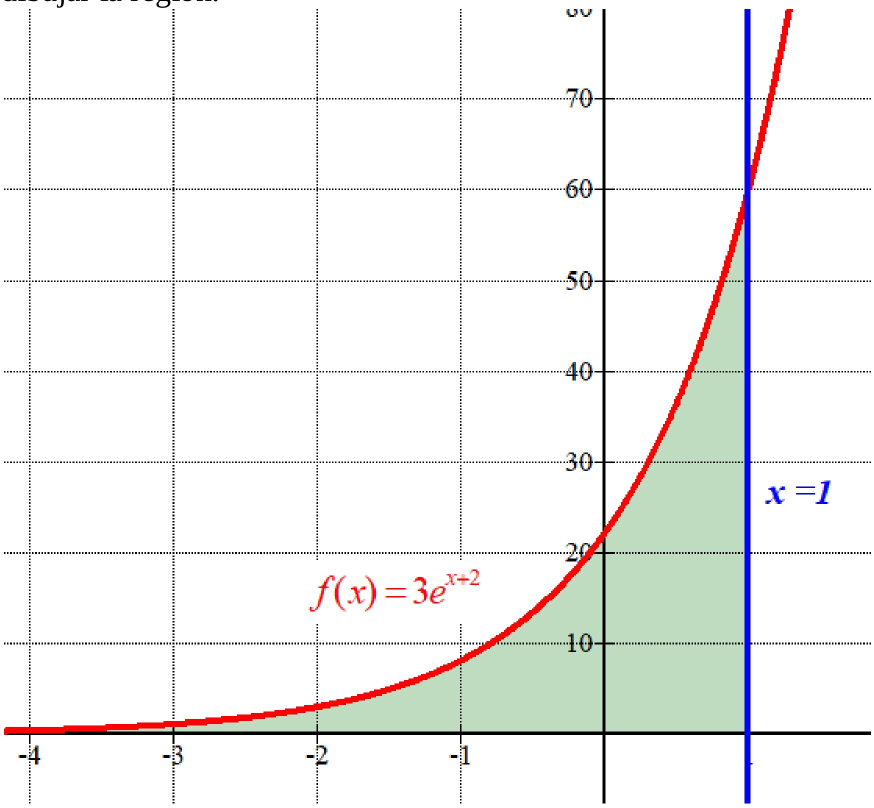
$$\left.\begin{array}{l} f(-2)=3e^{-2+2}=3e^{0}=3 \\ f'(-2)=3e^{-2+2}=3 \\ y-f(-2)=f'(-2)(x+2) \end{array}\right\} \Rightarrow y-3=3(x+2) \Rightarrow y=3+3x+6 \Rightarrow \boxed{y=3x+9}$$

b) Buscamos los puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=3e^{x+2} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3e^{x+2}=0 \Rightarrow \text{No existe}$$

Hacemos una tabla de valores para dibujar la región.

x	$y=3e^{x+2}$
-3	$3e^{-1}\simeq 1.1$
-2	3
0	$3e^{2}\simeq 22$
1	$3e^{3}\simeq 60$
2	$3e^{4}\simeq 163$



El valor del área es el valor de la integral definida entre $-\infty$ y *1* de la función.
Como uno de los límites de integración es –∞ calculamos previamente la integral entre un valor "*a*" y 1, para obtener el valor del área como el límite de la integral cuando *a* tiende a –∞.

$$\int_a^1 f(x)\,dx = \int_a^1 3e^{x+2}dx = \left[3e^{x+2}\right]_a^1 = 3e^{1+2} - 3e^{a+2} = 3e^3 - 3e^{a+2}$$

$$Área = \int_{-\infty}^1 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^1 3e^{x+2}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^1 3e^{x+2}dx = \lim_{a\to-\infty}\left(3e^3 - 3e^{a+2}\right) = 3e^3 - 3e^{-\infty} = \boxed{3e^3 \simeq 60.26u^2}$$

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Representar gráficamente la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=9-x^2$ y $g(x)=3+x$ y calcular su área.

a) Veamos cuando se cortan las gráficas de las funciones.

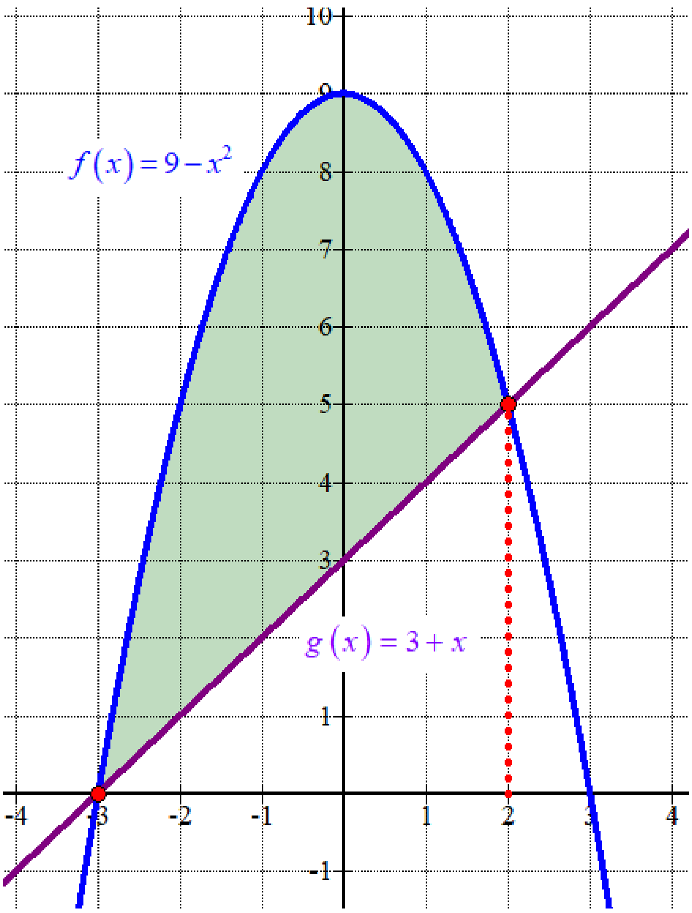
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=9-x^2 \\ g(x)=3+x \end{array}\right\} \Rightarrow 9-x^2=3+x \Rightarrow 0=x^2+x-6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-6)}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}=\begin{cases} \dfrac{-1+5}{2}=2=x \\ \dfrac{-1-5}{2}=-3=x \end{cases}$$

Dibujamos las gráficas de la parábola y la recta entre –3 y 2.

x	$y=9-x^2$
-3	0
0	9
2	5

x	$y=3+x$
-3	0
0	3
2	5



El área de la región limitada por las gráficas de las dos funciones es el valor de la integral definida entre –3 y 2 de la diferencia entre la parábola y la recta.

$$Área = \int_{-3}^{2} 9 - x^2 - (3 + x)\,dx = \int_{-3}^{2} 9 - x^2 - 3 - x\,dx = \int_{-3}^{2} 6 - x^2 - x\,dx =$$

$$= \left[6x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{2} = \left[6(2) - \frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2}\right] - \left[6(-3) - \frac{(-3)^3}{3} - \frac{(-3)^2}{2}\right] =$$

$$= 12 - \frac{8}{3} - 2 + 18 - 9 + \frac{9}{2} = 19 - \frac{8}{3} + \frac{9}{2} = \boxed{\frac{125}{6} \simeq 20.83\ u^2}$$

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) Sean A y B dos sucesos, tales que $P(A)=0,3$, $P(B/A)=0,6$ y $P(A/B)=0,3$:

i. Calcular $P(A\cap B)$. (0,5 puntos)

ii. Calcular $P(B)$. ¿Son los sucesos A y B independientes?, razone su respuesta (0,5 puntos)

iii. Calcular $P\left(A\cup \overline{B}\right)$ (0,5 puntos)

b) Las calificaciones de la asignatura de matemáticas de la población de una región española, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y varianza de 1.69 puntos. Se toma una muestra aleatoria de 324 estudiantes de la región obteniendo una calificación media de 5,84 puntos. Halla un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 99%. (1 punto)

a)

i) Aplicando el teorema de Bayes tenemos:

$$P(B/A)=0,6\Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(A)}=0,6\Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{0,3}=0,6\Rightarrow \boxed{P(A\cap B)=0,6\cdot 0,3=0,18}$$

ii) Aplicando el teorema de Bayes tenemos:

$$P(A/B)=0,3\Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=0,3\Rightarrow \frac{0,18}{P(B)}=0,3\Rightarrow 0,18=0,3\cdot P(B)\Rightarrow \boxed{P(B)=\frac{0,18}{0,3}=0,6}$$

Para que sean independientes los sucesos A y B debe cumplirse $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=0,18 \\ P(A)P(B)=0,3\cdot 0,6=0,18 \end{array}\right\}\Rightarrow P(A\cap B)=0,18=P(A)P(B)$$

Los sucesos A y B son independientes.

iii)

$$P(A)=P\left(A\cap \overline{B}\right)+P(A\cap B)\Rightarrow 0,3=P\left(A\cap \overline{B}\right)+0,18\Rightarrow P\left(A\cap \overline{B}\right)=0,3-0,18=0,12$$

$$P\left(\overline{B}\right)=1-P(B)=1-0,6=0,4$$

$$P\left(A\cup \overline{B}\right)=P(A)+P\left(\overline{B}\right)-P\left(A\cap \overline{B}\right)=0,3+0,4-0,12=\boxed{0,58}$$

b) Sea X = Nota en matemáticas.

Como la varianza es 1.69 tenemos que la desviación típica es $\sigma=\sqrt{Varianza}=\sqrt{1.69}=1.3$
Sabemos que X = N(**μ**, 1.3).

La muestra es de 324 estudiantes → $n = 324$, $\overline{x} = 5.84$ puntos

Para un nivel de confianza del 99%

$1 - \propto = 0{,}99 \rightarrow \propto = 0{,}01 \rightarrow \propto/2 = 0'005 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}995 \rightarrow z_{\alpha/2}$ **= 2,575**

El error del intervalo viene dado por la fórmula:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{1.3}{\sqrt{324}} \simeq 0.186 \; puntos$$

El intervalo de confianza para la media de la calificación en matemáticas de la población es:

$$\left(\overline{x} - Error, \overline{x} + Error\right) = \left(5.84 - 0.186, \;\; 5.84 + 0.186\right) = \left(5.654, \; 6.026\right)$$