



Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4.

Solo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático, o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo.

Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

P1. — Sea el sistema

$$\begin{cases} mx + y - z = 1 \\ 2x + my = 1 \\ x + mz = 0 \end{cases}$$

- (a) [7 puntos] Discute el número de soluciones que tiene el sistema según el parámetro m .
(b) [3 puntos] Resuelve el sistema en el caso $m = 1$.

P2. — Sea A una matriz invertible $n \times n$ con coeficientes reales que satisface la igualdad $A^2 + A = I$. Entonces,

- (a) [3 puntos] ¿Satisface la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

las condiciones del enunciado? Es decir, ¿cumple M la igualdad del enunciado y, además, es invertible?

Volviendo a considerar que A es una matriz cualquiera que satisface las condiciones del enunciado,

- (b) [3 puntos] Calcula la inversa de A .
(c) [4 puntos] Comprueba que se cumple la igualdad $A(B+A) - I = A(B-I)$, siendo B una matriz cuadrada cualquiera $n \times n$ con coeficientes reales.

P3. — Sean los puntos $A = (1, 2, 0)$, $B = (-1, 0, 1)$, $C = (0, 0, 1)$ y $D = (3, 1, 2)$.

- (a) [4 puntos] Determina la recta r que pasa por D y es perpendicular al plano que contiene los puntos A , B y C .
(b) [4 puntos] Determina si los puntos A , B , C y D son coplanarios o no.
(c) [2 puntos] ¿Es D el punto de corte de la recta con el plano del apartado (a)? Justifica la respuesta.

P4. — Sea el plano $\pi: 3x + y + z = 2$ y los puntos $P = (0, 1, 1)$ y $Q = (2, -1, -3)$.

- (a) [2 puntos] ¿Son P y Q puntos del plano π ? Justifica la respuesta.
(b) [4 puntos] Calcula el punto S situado sobre la recta PQ que se encuentra a $3/4$ partes de P y a $1/4$ parte de Q .
(c) [4 puntos] Determina la ecuación implícita (también llamada cartesiana) de la recta que pasa por P y es perpendicular al plano π .



P5. — La reproducción de un insecto a lo largo del tiempo sigue la función $f(x) = e^{-x}(2x + 1)$ siendo $x \geq 0$ el tiempo en meses y $f(x)$ el número de insectos en millones.

- (a) [4 puntos] ¿Cuántos millones de insectos había en el instante inicial? ¿Hacia dónde tiende la cantidad de insectos a lo largo de los años? Interpreta los resultados.
- (b) [4 puntos] ¿Cuál es el máximo número de insectos que puede llegar a haber? ¿En que instante de tiempo se consigue este valor?
- (c) [2 puntos] ¿Hay algún momento en que la población supere los 2 millones de insectos? Justifica la respuesta.

P6. — [10 puntos] Calcula la integral de la función $f(x) = \frac{x^4 + 2x - 6}{x^2 + x - 2}$.

P7. — En una clase donde todos los alumnos practican algún deporte, el 60% de los alumnos juega a fútbol o básquet y el 10% practica los dos. Por otra parte, se sabe que hay un 60% de alumnos que no juega a fútbol.

- (a) [3 puntos] Sea F = 'juega a fútbol' y sea B = 'juega a básquet', escribe, en términos de uniones, intersecciones y complementarios de estos dos sucesos, las tres probabilidades que indica el enunciado.
- (b) Calcula la probabilidad de que, escogiendo al azar un alumno de la clase,
 - (b.1) [1 punto] Juegue a fútbol.
 - (b.2) [2 puntos] Juegue a básquet.
 - (b.3) [2 puntos] Juegue a básquet y no a fútbol (es decir, solo juega a básquet).
 - (b.4) [2 puntos] No juegue ni a fútbol ni a básquet.

P8. — (a) [5 puntos] En un examen de tecnología, ¿cuál es la probabilidad de sacar una nota entre 5 y 7 si se sabe que las notas siguen una distribución normal de media 6 y desviación típica 2?

- (b) [5 puntos] En un examen de filosofía, el 35% de los alumnos presentados obtuvieron una nota mayor que 6 mientras que el 51% la obtuvo menor que 4. Suponiendo que las notas siguen una distribución normal, determina cuál es su media μ y su desviación típica σ .