EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
FASE GENERAL
CURSO 2022–2023

MATERIA: MATEMÁTICAS II	(1)
	Convocatoria:

Instrucciones:
- Debe responder sólo una pregunta de cada bloque de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque, se considerará sólo la primera pregunta respondida.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

Bloque 1.- Análisis (seleccione solo una pregunta)

1A. Las ventas de un determinado producto vienen dadas por el siguiente modelo:

$$V(t)=\frac{5t^2}{8+t^2},\quad t\geq 0$$

Donde $V(t)$ son las ventas en miles; t mide el tiempo desde que se inicia la venta del producto, en meses.

a) Calcular las tasas de variación media del primero y segundo semestre. Comparar e interpretar los resultados. 0.75 ptos

b) Se afirma que este modelo es creciente en su dominio. Justificar si esta afirmación es correcta. 0.75 ptos

c) ¿En qué momento las ventas alcanzan 4000 unidades? 0.5 ptos

d) Si el producto se vende a 2€ la unidad y los ingresos de esta empresa se modelizan teniendo en cuenta las ventas mensuales. ¿Hacia dónde tienden los ingresos con el paso del tiempo? Justificar la respuesta. 0.5 ptos

1B. Resolver los siguientes apartados:

a) Averiguar el valor de k para que sea cierta la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to -2}\frac{kx^2-4k}{x^2+6x+8}=\frac{3}{2}$$ 1 ptos

b) Resolver la siguiente integral indefinida: $\int x\sqrt{2x-1}\,dx$ 1.5 ptos

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Dado el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases}-x+ky+2z=k\\ 2x+ky-z=2\\ kx-y+2z=k\end{cases}$,

a) Discutir la compatibilidad del sistema según los diversos valores de k. 1.5 ptos

b) Resolver el sistema para $k=2$. 1 ptos

2B. Resolver la ecuación matricial: $AX + B^t = A^2$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$ 2.5 ptos

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. En el espacio tridimensional tenemos un punto y la recta siguientes:

$$P(1,-2,0) \; ; \quad r: \begin{cases} x-2y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$$

a) Hallar la ecuación del plano tal que, la recta perpendicular al mismo y que pasa por el origen de coordenadas corta al plano buscado en el punto P. 1.75 ptos
Averiguar el ángulo que forma el plano encontrado con la recta r.

b) Hallar el punto de intersección de la recta r y $s: x-5 = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-9}{3}$ 0.75 ptos

3B. En el espacio tridimensional tenemos las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r: \begin{cases} 8x+2y-3z+12=0 \\ -7x-y+3z=9 \end{cases} \quad ; \quad s: x = y+1 = \frac{z-2}{2}$$

a) Comprobar que r y s están contenidas en un mismo plano π y hallar la ecuación de dicho plano. 1.25 ptos

b) Averiguar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(0,-1,2)$ y corta perpendicularmente a la recta r. 1.25 ptos

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. Aythami tiene un sobre donde guarda el dinero que ha podido reunir, el sobre contiene: 4 billetes de 5€, 6 billetes de 10€ y 2 billetes de 50€. Quiere comprar algunas cosas y decide dejar al azar cuánto dinero va a coger del sobre. Para ello, saca aleatoriamente, sin reemplazamiento y de forma consecutiva, dos billetes del sobre.

a) Expresar el espacio muestral del experimento que va a realizar Aythami. 0.5 ptos

b) Si se quiere comprar un videojuego que cuesta 57€, ¿qué probabilidad hay de que pueda hacerlo con los billetes que saca del sobre? 1 ptos

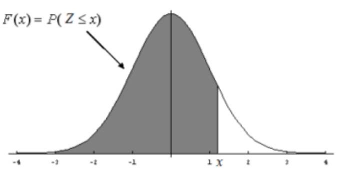
c) Si al final obtiene, con este experimento, 60€ del sobre ¿qué probabilidad hay de que el primer billete fuera de 10€? 1 ptos

4B. La probabilidad de que un coche de carreras sufra un reventón en un neumático durante una competición es de 0.04. En una competición en la que participan 10 coches:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se produzcan 2 reventones? 0.5 ptos

b) Se afirma que existe como mucho un 1% de posibilidades de que ocurran más de 2 reventones durante la carrera. ¿Es cierta esta afirmación? Justifícalo. 1 ptos

c) Estudiamos las competiciones realizadas en una temporada con un total de 250 coches ¿qué probabilidad hay de que se produzcan más de 12 reventones en total? (Suponiendo la independencia de los sucesos) 1 ptos



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389

SOLUCIONES

Bloque 1.- Análisis (seleccione solo una pregunta)

1A. Las ventas de un determinado producto vienen dadas por el siguiente modelo:

$$V(t)=\frac{5t^2}{8+t^2},\quad t\geq 0$$

Donde $V(t)$ son las ventas en miles; t mide el tiempo desde que se inicia la venta del producto, en meses.

a) Calcular las tasas de variación media del primero y segundo semestre. Comparar e interpretar los resultados. 0.75 ptos

b) Se afirma que este modelo es creciente en su dominio. Justificar si esta afirmación es correcta. 0.75 ptos

c) ¿En qué momento las ventas alcanzan 4000 unidades? 0.5 ptos

d) Si el producto se vende a 2€ la unidad y los ingresos de esta empresa se modelizan teniendo en cuenta las ventas mensuales. ¿Hacia dónde tienden los ingresos con el paso del tiempo? Justificar la respuesta. 0.5 ptos

a) Tasa de variación media del primer semestre (del mes 0 al mes 6).

$$\left.\begin{array}{l} V(0)=\dfrac{5\cdot 0^2}{8+0^2}=0 \\ V(6)=\dfrac{5\cdot 6^2}{8+6^2}=\dfrac{45}{11} \end{array}\right\} \Rightarrow TVM(0,6)=\frac{V(6)-V(0)}{6-0}=\frac{\frac{45}{11}-0}{6}=\frac{45}{66}=\frac{15}{22}\simeq 0.68182$$

Tasa de variación media del segundo semestre (del mes 6 al mes 12).

$$\left.\begin{array}{l} V(12)=\dfrac{5\cdot 12^2}{8+12^2}=\dfrac{90}{19} \\ V(6)=\dfrac{5\cdot 6^2}{8+6^2}=\dfrac{45}{11} \end{array}\right\} \Rightarrow TVM(6,12)=\frac{V(12)-V(6)}{12-6}=\frac{\frac{90}{19}-\frac{45}{11}}{6}=\frac{45}{418}\simeq 0.10766$$

Al ser la tasa de variación media positiva en ambos semestres las ventas han aumentado durante los dos semestres. Aunque en el segundo semestre las ventas han aumentado más lentas que en el primero: en el primero a razón de 681 unidades por mes y en el segundo a razón de 107 unidades por mes.

b) Estudiamos el signo de la derivada en $t\geq 0$.

$$V'(t)=\frac{10t\left(8+t^2\right)-5t^2(2t)}{\left(8+t^2\right)^2}=\frac{80t+10t^3-10t^3}{\left(8+t^2\right)^2}=\frac{80t}{\left(8+t^2\right)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} t\geq 0\Rightarrow 80t\geq 0 \\ \left(8+t^2\right)^2\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow V'(t)=\frac{80t}{\left(8+t^2\right)^2}\geq 0 \text{ siendo } t\geq 0$$

La derivada es positiva para valores $t > 0$, luego la función crece en todo su dominio.

c) Resolvemos la igualdad $V(t) = 4$.

$$\left.\begin{array}{l} V(t)=\dfrac{5t^2}{8+t^2},\quad t\geq 0 \\ V(t)=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{5t^2}{8+t^2}=4 \Rightarrow 5t^2=32+4t^2 \Rightarrow t^2=32 \Rightarrow t=\sqrt{32}\simeq 5.66$$

Las ventas alcanzan las 4000 unidades entre el 5º y el 6º mes.

d) Los ingresos siguen el modelo $I(t)=2\cdot V(t)=2\dfrac{5t^2}{8+t^2}=\dfrac{10t^2}{8+t^2}, \qquad t\geq 0$

Nos piden calcular $\lim\limits_{t\to+\infty} I(t)$.

$$\lim_{t\to+\infty} I(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{10t^2}{8+t^2}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{10t^2}{t^2}}{\frac{8}{t^2}+\frac{t^2}{t^2}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{10}{\frac{8}{t^2}+1}=\frac{10}{\frac{8}{\infty}+1}=\frac{10}{0+1}=\boxed{10}$$

Los ingresos con el paso del tiempo tienden a tener un valor de 10000 €.

1B. Resolver los siguientes apartados:

a) Averiguar el valor de k para que sea cierta la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to -2}\frac{kx^2-4k}{x^2+6x+8}=\frac{3}{2} \qquad \text{1 ptos}$$

b) Resolver la siguiente integral indefinida: $\int x\sqrt{2x-1}dx$ 1.5 ptos

a) Calculamos primero el valor del límite.

$$\lim_{x\to -2}\frac{kx^2-4k}{x^2+6x+8}=\lim_{x\to -2}\frac{k\left(x^2-4\right)}{x^2+6x+8}=\ldots$$

$$x^2-4=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2\Rightarrow x^2-4=(x-2)(x+2)$$

$$x^2+6x+8=0\Rightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4(1)(8)}}{2}=\frac{-6\pm 2}{2}=\begin{cases}\dfrac{-6+2}{2}=-2\\ \dfrac{-6-2}{2}=-4\end{cases}\Rightarrow x^2+6x+8=(x+2)(x+4)$$

$$\ldots=\lim_{x\to -2}\frac{k(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x+4)}=\lim_{x\to -2}\frac{k(x-2)}{x+4}=\frac{k(-2-2)}{-2+4}=\boxed{-2k}$$

Buscamos el valor de k tal que $\lim_{x\to -2}\frac{kx^2-4k}{x^2+6x+8}=\frac{3}{2}$.

$$-2k=\frac{3}{2}\Rightarrow \boxed{k=-\frac{3}{4}}$$

El valor buscado es $k=-\frac{3}{4}$.

b) Utilizamos el método de cambio de variable.

$$\int x\sqrt{2x-1}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ \sqrt{2x-1}=t\rightarrow 2x-1=t^2\\ 2x=1+t^2\rightarrow x=\frac{1}{2}\left(1+t^2\right)\\ \rightarrow dx=tdt\end{array}\right\}=\int\frac{1}{2}\left(1+t^2\right)t\cdot tdt=$$

$$=\frac{1}{2}\int t^2+t^4dt=\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\left(\sqrt{2x-1}\right)^3}{3}+\frac{\left(\sqrt{2x-1}\right)^5}{5}\right)=$$

$$=\boxed{\frac{\sqrt{(2x-1)^3}}{6}+\frac{\sqrt{(2x-1)^5}}{10}+K}$$

$O\,bien$

$$\ldots=\frac{1}{2}\left(\frac{\left(\sqrt{2x-1}\right)^3}{3}+\frac{\left(\sqrt{2x-1}\right)^5}{5}\right)=\frac{\sqrt{2x-1}}{2}\left(\frac{\left(\sqrt{2x-1}\right)^2}{3}+\frac{\left(\sqrt{2x-1}\right)^4}{5}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2x-1}}{2}\left(\frac{2x-1}{3}+\frac{\left(2x-1\right)^2}{5}\right)=\frac{\sqrt{2x-1}}{2}\left(\frac{2x-1}{3}+\frac{4x^2-4x+1}{5}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2x-1}}{2}\left(\frac{10x-5+12x^2-12x+3}{15}\right)=\frac{\sqrt{2x-1}}{2}\left(\frac{12x^2-2x-2}{15}\right)=$$

$$=\boxed{\frac{\left(6x^2-x-1\right)\sqrt{2x-1}}{15}+K}$$

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Dado el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} -x+ky+2z=k \\ 2x+ky-z=2 \\ kx-y+2z=k \end{cases}$,

a) Discutir la compatibilidad del sistema según los diversos valores de k. 1.5 ptos
b) Resolver el sistema para $k = 2$. 1 ptos

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} -1 & k & 2 \\ 2 & k & -1 \\ k & -1 & 2 \end{pmatrix}$.y la matriz ampliada es

$$A/B=\begin{pmatrix} -1 & k & 2 & k \\ 2 & k & -1 & 2 \\ k & -1 & 2 & k \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula su determinante de la matriz A.

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & k & 2 \\ 2 & k & -1 \\ k & -1 & 2 \end{vmatrix}=-2k-k^2-4-2k^2-4k+1=-3k^2-6k-3$$

$$|A|=0 \Rightarrow -3k^2-6k-3=0 \Rightarrow k^2+2k+1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(1)(1)}}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

Analizamos dos casos por separado.

CASO 1. $k \neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $k=-1$

El determinante de A es nulo. Estudiamos el rango de A y de A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 4 & -2 \\ \hline 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hphantom{-1 \quad -1 \quad 2 \quad -1}}^{A/B}} \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\hphantom{-1 \quad -1 \quad 2}}_{A}} & \end{array} \right)$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3), por lo que el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones)

Resumiendo: Si $k \neq -1$ el sistema es **compatible determinado** y si $k = -1$ el sistema es **compatible indeterminado**.

b) Para *k* = *2* el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} -x+2y+2z=2 \\ 2x+2y-z=2 \\ 2x-y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y+2z-2=x \\ 2x+2y-z=2 \\ 2x-y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(2y+2z-2)+2y-z=2 \\ 2(2y+2z-2)-y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4y+4z-4+2y-z=2 \\ 4y+4z-4-y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6y+3z=6 \\ 3y+6z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y+z=2 \\ y+2z=2 \to y=2-2z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(2-2z)+z=2 \Rightarrow 4-4z+z=2 \Rightarrow -3z=-2 \Rightarrow \boxed{z=\frac{2}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=2-2\frac{2}{3}=\frac{2}{3}} \Rightarrow \boxed{x=2\frac{2}{3}+2\frac{2}{3}-2=\frac{2}{3}}$$

La solución del sistema es $x=y=z=\frac{2}{3}$.

2B. Resolver la ecuación matricial: $AX + B^t = A^2$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2.5 ptos

Despejamos X en la ecuación matricial.

$$AX + B^t = A^2 \Rightarrow AX = A^2 - B^t \Rightarrow X = A^{-1}\left(A^2 - B^t\right) = A^{-1}A^2 - A^{-1}B^t = IA - A^{-1}B^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = A - A^{-1}B^t$$

Comprobamos que la matriz A es invertible y calculamos su inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 1 - 0 = -1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = -\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = A - A^{-1}B^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = X}$$

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

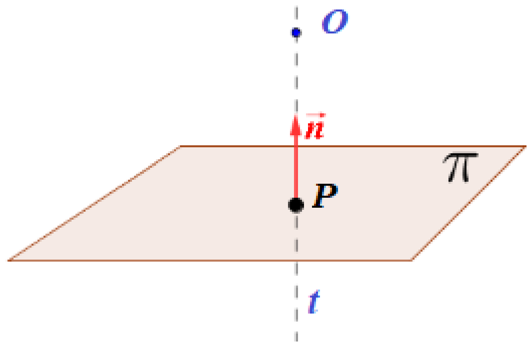
3A. En el espacio tridimensional tenemos un punto y la recta siguientes:

$$P(1,-2,0) \ ; \quad r:\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$$

a) Hallar la ecuación del plano tal que, la recta perpendicular al mismo y que pasa por el origen de coordenadas corta al plano buscado en el punto *P*. 1.75 ptos
Averiguar el ángulo que forma el plano encontrado con la recta *r*.

b) Hallar el punto de intersección de la recta *r* y $s: x-5=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-9}{3}$ 0.75 ptos

a) Debemos hallar la ecuación del plano π del dibujo.



El vector normal del plano es el vector $\overrightarrow{OP}$. Además, el plano π contiene al punto P.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}=\overrightarrow{OP}=(1,-2,0)-(0,0,0)=(1,-2,0) \\ P(1,-2,0)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi: x-2y+D=0 \\ P(1,-2,0)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-2(-2)+D=0 \Rightarrow D=-5 \Rightarrow \boxed{\pi: x-2y-5=0}$$

Para averiguar el ángulo que forma el plano encontrado con la recta *r* primero obtenemos el vector director de la recta y el vector normal del plano.

$$r:\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+z=0 \\ \boxed{x=z} \end{cases} \Rightarrow z-2y+z=0 \Rightarrow 2z=2y \Rightarrow \boxed{y=z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} \vec{u_r}=(1,1,1) \\ P_r(0,0,0) \end{cases}$$

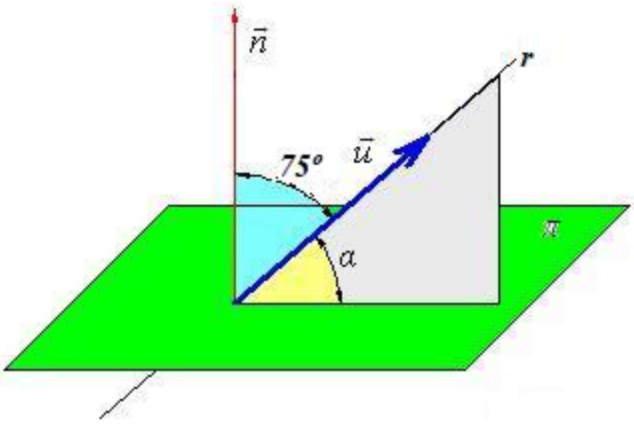
$$\pi: x-2y-5=0 \Rightarrow \vec{n}=(1,-2,0)$$

Averiguamos el ángulo formado por el vector normal del plano y el vector director de la recta.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,1,1)\\ \vec{n}=(1,-2,0)\end{array}\right\}\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{u_r},\vec{n}\right)=\frac{\left|\overrightarrow{u_r}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{u_r}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|(1,1,1)(1,-2,0)\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+0^2}}=\frac{|1-2|}{\sqrt{3}\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{15}}$$

$$\left(\overrightarrow{u_r},\vec{n}\right)=arc\cos\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right)\simeq 75^{\circ}$$

El ángulo que forma el plano con la recta es de 90º – 75º = 15º



b) Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta *s*.

$$s:\frac{x-5}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-9}{3}\Rightarrow s:\begin{cases}\overrightarrow{v_s}=(1,-2,3)\\ Q_s(5,-1,9)\end{cases}\Rightarrow s:\begin{cases}x=5+\lambda\\ y=-1-2\lambda\\ z=9+3\lambda\end{cases}$$

Hallamos el punto A de corte de las rectas *r* y *s*.

$$\left.\begin{array}{l}r:\begin{cases}x-2y+z=0\\ x-z=0\end{cases}\\ s:\begin{cases}x=5+\lambda\\ y=-1-2\lambda\\ z=9+3\lambda\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}5+\lambda-2(-1-2\lambda)+9+3\lambda=0\\ 5+\lambda-(9+3\lambda)=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}5+\lambda+2+4\lambda+9+3\lambda=0\\ 5+\lambda-9-3\lambda=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}8\lambda=-16\to\lambda=-2\\ -2\lambda=4\to\lambda=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=5-2=3\\ y=-1-2(-2)=3\Rightarrow\boxed{A(3,3,3)}\\ z=9+3(-2)=3\end{cases}$$

El punto de corte de las rectas *r* y *s* es A(3, 3, 3).

3B. En el espacio tridimensional tenemos las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r:\begin{cases}8x+2y-3z+12=0\\-7x-y+3z=9\end{cases} \quad ; \quad s: x=y+1=\frac{z-2}{2}$$

a) Comprobar que r y s están contenidas en un mismo plano π y hallar la ecuación de dicho plano. 1.25 ptos

b) Averiguar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(0,-1,2)$ y corta perpendicularmente a la recta r. 1.25 ptos

a) Obtenemos los vectores directores de cada recta, así como un punto de cada una de ellas.

$$r:\begin{cases}8x+2y-3z+12=0\\-7x-y+3z=9\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r}=(8,2,-3)\times(-7,-1,3)=\begin{vmatrix}i & j & k\\8 & 2 & -3\\-7 & -1 & 3\end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_r}=6i+21j-8k+14k-24j-3i=3i-3j+6k=(3,-3,6)$$

$$x=0\Rightarrow\begin{cases}2y-3z+12=0\\-y+3z=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2y-3z+12=0\\3z-9=y\end{cases}\Rightarrow 2(3z-9)-3z+12=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6z-18-3z+12=0\Rightarrow 3z=6\Rightarrow z=2\Rightarrow y=6-9=-3\Rightarrow P_r(0,-3,2)$$

$$r:\begin{cases}\overrightarrow{w_r}=(1,-1,2)\\P_r(0,-3,2)\end{cases}$$

$$s: x=y+1=\frac{z-2}{2}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{u_s}=(1,1,2)\\Q_s(0,-1,2)\end{cases}$$

Estudiamos la posición relativa de las rectas.
Las coordenadas de los vectores directores no son proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{w_r}=(1,-1,2)\\\overrightarrow{u_s}=(1,1,2)\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1}{1}\neq\frac{-1}{1}\neq\frac{2}{2}$$

Las rectas no son ni paralelas ni coincidentes. Las rectas se cortan o se cruzan.
Calculamos el producto mixto $\left[\overrightarrow{w_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]$ y vemos si es nulo o no.

$$\left.\begin{array}{l}P_r(0,-3,2)\\Q_s(0,-1,2)\end{array}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{P_rQ_s}=(0,-3,2)-(0,-1,2)=(0,-2,0)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{w_r}=(1,-1,2)\\\overrightarrow{u_s}=(1,1,2)\\\overrightarrow{P_rQ_s}=(0,-2,0)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{w_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\1 & 1 & 2\\0 & -2 & 0\end{vmatrix}=0+0-4-0-0+4=0$$

Al ser nulo el producto mixto las rectas r y s se cortan. Esto significa que son coplanarias.

Hallamos la ecuación del plano que las contiene.

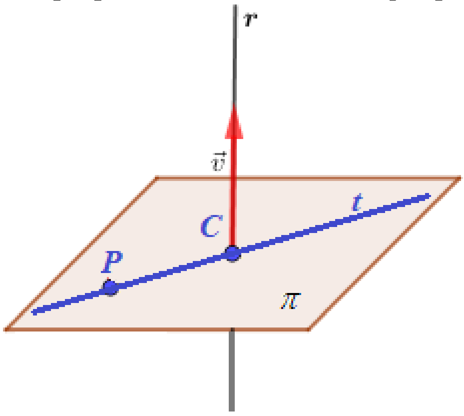
$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{w_r}=(1,-1,2)\\ \vec{v}=\overrightarrow{u_s}=(1,1,2)\\ Q_s(0,-1,2)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix}x & y+1 & z-2\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x+2(y+1)+z-2+z-2-2(y+1)-2x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x+\cancel{2y}+\cancel{2}+z-\cancel{2}+z-2-\cancel{2y}-2-2x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x+2z-4=0\Rightarrow \boxed{\pi:2x-z+2=0}$$

b) Hallamos la ecuación del plano π perpendicular a la recta *r* que pasa por P(0, –1, 12).



$$\pi:\begin{cases}\vec{n}=\overrightarrow{w_r}=(1,-1,2)\\ P(0,-1,2)\in\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\pi:x-y+2z+D=0\\ P(0,-1,2)\in\pi\end{cases}\Rightarrow 0+1+4+D=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=-5\Rightarrow\boxed{\pi:x-y+2z-5=0}$$

Hallamos el punto C de corte de la recta *r* y el plano π.

$$\left.\begin{array}{l}\pi:x-y+2z-5=0\\ r:\begin{cases}\overrightarrow{w_r}=(1,-1,2)\\ P_r(0,-3,2)\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}x=\lambda\\ y=-3-\lambda\\ z=2+2\lambda\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow \lambda+3+\lambda+4+4\lambda-5=0\Rightarrow 6\lambda=-2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lambda=\frac{-1}{3}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-1}{3}\\ y=-3+\dfrac{1}{3}=\dfrac{-8}{3}\Rightarrow C\left(\dfrac{-1}{3},\dfrac{-8}{3},\dfrac{4}{3}\right)\\ z=2+2\dfrac{-1}{3}=\dfrac{4}{3}\end{cases}$$

La recta *t* perpendicular a *r* y que pasa por el punto P es la recta que pasa por los puntos C y P.

$$t:\left.\begin{array}{l} C\left(\frac{-1}{3},\frac{-8}{3},\frac{4}{3}\right) \\ P(0,-1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{v_t}=\overrightarrow{CP}=(0,-1,2)-\left(\frac{-1}{3},\frac{-8}{3},\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right) \\ P(0,-1,2)\in t \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{w_t}=3\vec{v_t}=(1,5,2) \\ P(0,-1,2)\in t \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{t:\begin{cases} x=\lambda \\ y=-1+5\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=2+2\lambda \end{cases}}$$

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. Aythami tiene un sobre donde guarda el dinero que ha podido reunir, el sobre contiene: 4 billetes de 5€, 6 billetes de 10€ y 2 billetes de 50€. Quiere comprar algunas cosas y decide dejar al azar cuánto dinero va a coger del sobre. Para ello, saca aleatoriamente, sin reemplazamiento y de forma consecutiva, dos billetes del sobre.

a) Expresar el espacio muestral del experimento que va a realizar Aythami. 0.5 ptos

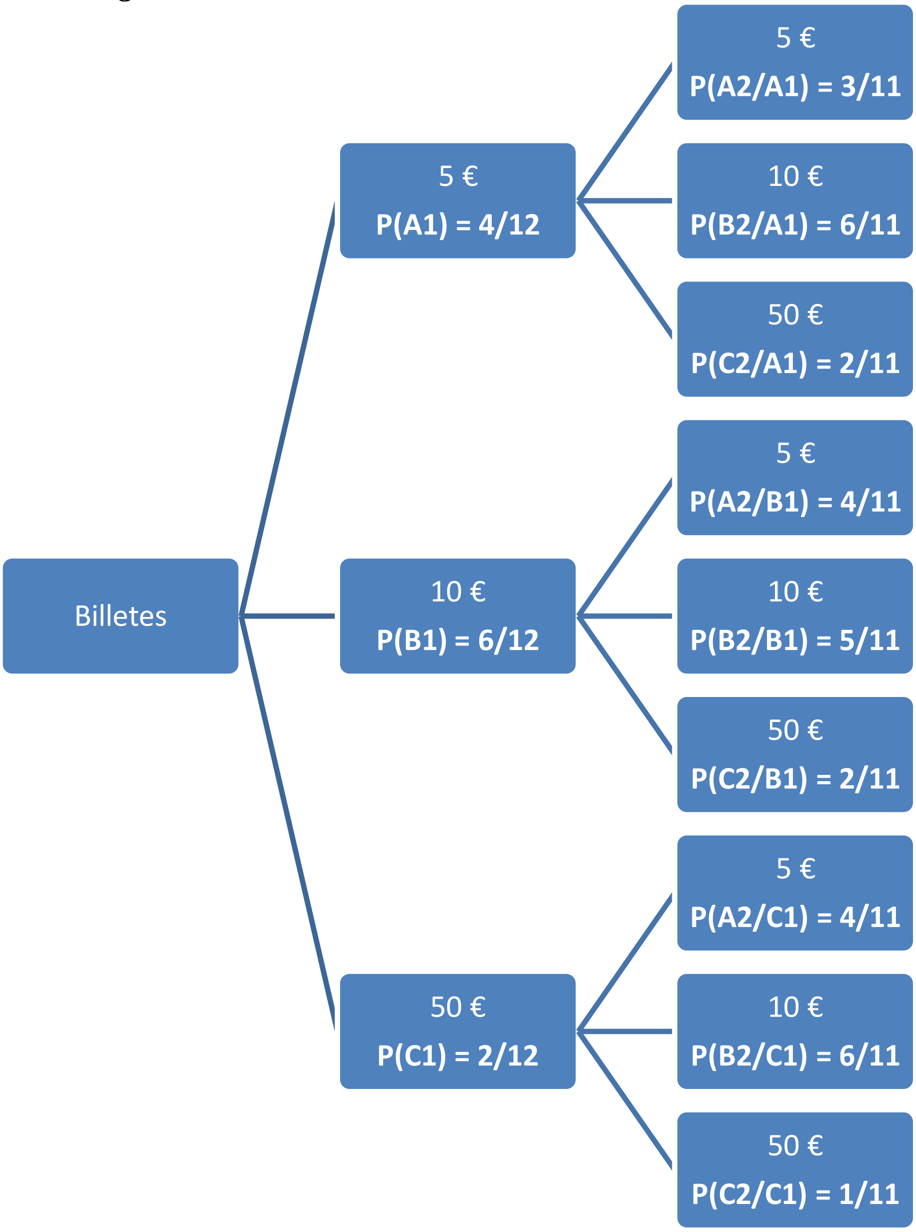
b) Si se quiere comprar un videojuego que cuesta 57€, ¿qué probabilidad hay de que pueda hacerlo con los billetes que saca del sobre? 1 ptos

c) Si al final obtiene, con este experimento, 60€ del sobre ¿qué probabilidad hay de que el primer billete fuera de 10€? 1 ptos

a) Puede coger:
2 billetes de 5 €, 2 billetes de 10 €, dos billetes de 50 €, 1 billete de 5 € y otro de 10 €, un billete de 5 € y otro de 50 € y por último un billete de 10 € y otro de 50 €. Un total de 6 sucesos elementales distintos.

$$E=\{(5,5),(10,10),(50,50),(5,10),(5,50),(10,50)\}$$

b) Realizamos un diagrama de árbol.



Para poder comprar el videojuego debe haber cogido, al menos, 60 €. Esto ocurre cogiendo 10 y 50 o 50 y 10 o 50 y 50. Llamamos a este suceso S.

$$P(S) = P(B1 \cap C2) + P(C1 \cap B2) + P(C1 \cap C2) =$$

$$= P(B1)P(C2/B1) + P(C1)P(B2/C1) + P(C1)P(C2/C1) =$$

$$= \frac{6}{12}\cdot\frac{2}{11} + \frac{2}{12}\cdot\frac{6}{11} + \frac{2}{12}\cdot\frac{1}{11} = \frac{26}{132} = \boxed{\frac{13}{66} \simeq 0.197}$$

c) 60 euros solo los puede obtener con un billete de 10 y otro de 50.
Nos piden calcular $P\left(B1/\left((B1\cap C2)\cup(C1\cap B2)\right)\right)$.
Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(B1/\left((B1\cap C2)\cup(C1\cap B2)\right)\right) = \frac{P\left(B1\cap\left((B1\cap C2)\cup(C1\cap B2)\right)\right)}{P\left((B1\cap C2)\cup(C1\cap B2)\right)} =$$

$$= \frac{P(B1\cap C2)}{P(B1\cap C2) + P(C1\cap B2)} = \frac{P(B1)P(C2/B1)}{P(B1)P(C2/B1) + P(C1)P(B2/C1)} =$$

$$= \frac{\frac{6}{12}\cdot\frac{2}{11}}{\frac{6}{12}\cdot\frac{2}{11} + \frac{2}{12}\cdot\frac{6}{11}} = \boxed{\frac{1}{2} = 0.5}$$

4B. La probabilidad de que un coche de carreras sufra un reventón en un neumático durante una competición es de 0.04. En una competición en la que participan 10 coches:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se produzcan 2 reventones? 0.5 ptos

b) Se afirma que existe como mucho un 1% de posibilidades de que ocurran más de 2 reventones durante la carrera. ¿Es cierta esta afirmación? Justifícalo. 1 ptos

c) Estudiamos las competiciones realizadas en una temporada con un total de 250 coches ¿qué probabilidad hay de que se produzcan más de 12 reventones en total? (Suponiendo la independencia de los sucesos) 0.75 ptos

a) Si llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de reventones en un grupo de 10 coches. Esta variable es dicotómica (reventón o no) y cada repetición es independiente de la anterior.

X = B(10, 0.04). Nos piden calcular $P(X=2)$.

$$P(X=2)=\binom{10}{2}0.04^2\cdot 0.96^8 \simeq \boxed{0.0519}$$

b) Calculamos la probabilidad de que se produzcan más de 2 reventones durante la carrera. Para este cálculo usamos el suceso contrario.

$$P(X>2)=1-P(X\leq 2)=1-\left[P(X=2)+P(X=1)+P(X=0)\right]=$$

$$=1-\left[\binom{10}{2}0.04^2\cdot 0.96^8+\binom{10}{1}0.04^1\cdot 0.96^9+\binom{10}{0}0.04^0\cdot 0.96^{10}\right]=\boxed{0.00621}$$

El valor $P(X>2)=0.00621$ significa un tanto por ciento de 0.621 % de que ocurran más de 2 reventones en una carrera.

La afirmación de que existe como mucho un 1% de posibilidades de que ocurran más de 2 reventones durante la carrera es correcta.

c) Si llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de reventones en un grupo de 250 coches. Esta variable es dicotómica (reventón o no) y cada repetición es independiente de la anterior.

X = B(250, 0.04).

Esta probabilidad debemos de hallarla aproximándola por una normal.

Como la media es $np=250\cdot 0.04=10$ y la desviación típica es $\sqrt{npq}=\sqrt{250\cdot 0.04\cdot 0.96}=\frac{4\sqrt{15}}{5}\simeq 3.098$ la variable binomial X se aproxima por una variable normal $Y=N\left(10,\frac{4\sqrt{15}}{5}\right)$.

Nos piden calcular $P(X>12)$.

$$P(X>12)=\{\text{Corrección de Yates}\}=P(Y\geq 12.5)=\{\textit{Tipificamos}\}=$$

$$=P\left(Z\geq \frac{12.5-10}{4\sqrt{15}/5}\right)=P(Z\geq 0.81)=1-P(Z\leq 0.81)=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\}=$$

$$=1-0.791=\boxed{0.209}$$