EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL

CURSO 2022–2023

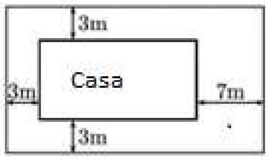
MATERIA: MATEMÁTICAS II	(4)
	Convocatoria:

Instrucciones:
- Debe responder sólo una pregunta de cada bloque de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque, se considerará sólo la primera pregunta respondida.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

Bloque 1.- Análisis (seleccione solo una pregunta)

1A. Hallar la función polinómica *f(x)* que verifica que tiene un punto mínimo en M(1, 2) y su segunda derivada es: $f''(x) = 2x + 3$. Dar la expresión de *f(x)*. 2.5 ptos

1B. Se quiere construir una Casa de la Juventud de 240 m^2 de superficie, que estará rodeada por una zona ajardinada con las dimensiones de la imagen.



2.5 ptos

Si se quiere minimizar la superficie total de la zona ajardinada, ¿qué dimensiones debe tener la Casa de la Juventud? ¿Cuál es el área de la zona ajardinada?

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; y \; C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

a) Comprobar si la matriz $M = 2I_3 + B^t$ tiene inversa. 0.75 ptos

Donde I_3 la matriz identidad de orden 3.

b) Justificar que existe la matriz que verifica la ecuación siguiente: 1.75 ptos

$$2X + C = A - X \cdot B^t$$

Calcular razonadamente dicha matriz X.

2B. Un bar de tapas canario sólo ofrece tres platos en su menú: escaldón, tollos y carajacas. El precio medio de los tres platos (la ración) es de 5€. Se sirven 30 raciones de escaldón, 20 raciones de tollos y 10 raciones de carajacas, por lo que se ingresaron 255 euros en total. Sabiendo que el triple del precio de las caracajas supera en diez euros el doble del precio de los tollos. Calcula el precio de la ración de cada producto. 2.5 ptos

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. En el espacio tridimensional consideremos el plano y las rectas siguientes:

$$\pi: 2x+3y-z=4 \ ; \quad r: \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+5y+z=0 \end{cases} \ ; \quad s: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{1}$$

a) Calcular el punto simétrico de P(–2,1,2) respecto de π. 1.25 ptos

b) Calcular el ángulo que forman *r* y *s*. 1.25 ptos

3B. En el espacio tridimensional conocemos las siguientes ecuaciones de rectas:

$$r: \begin{cases} x+2y-7z=0 \\ 2x+3y-12z+1=0 \end{cases} \quad ; \quad s: \begin{cases} 2x-7y-3z=22 \\ x-y+z=1 \end{cases}$$

a) Estudiar la posición relativa de *r* y *s*. 1.25 ptos

b) Hallar la ecuación del plano que contiene a *r* y es paralelo a *s*. 1.25 ptos

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. Según el estudio TALIS (2018), el 11% de los docentes de Educación Secundaria en España son menores de 30 años.

a) Elegimos 15 docentes españoles, ¿qué probabilidad hay de que haya menos de 2 docentes menores de 30 años? 1 pto

b) Supongamos que se seleccionan al azar 200 docentes españoles. ¿Qué probabilidad hay de que entre 20 y 30 docentes sean menores de 30 años? 1 pto

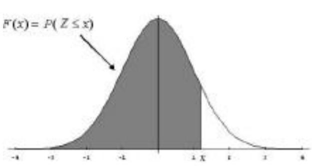
c) En un grupo de 500 docentes españoles, ¿cuántos cabe esperar que sean mayores de 30 años? 0.5 ptos

4B. Las estaturas de las personas que se presentan a una audición para participar en una película siguen una distribución normal de media 168 cm y desviación típica 8 cm.

a) Si se selecciona una persona participante en la audición, averiguar la probabilidad de que tenga una estatura mayor a 156 cm. 1 pto

b) Se afirma que más del 15% de los participantes en la audición medían más de 1,82 metros. Justifica la veracidad o falsedad de dicha afirmación. 0.75 ptos

c) ¿Qué probabilidad hay de que, elegida una persona al azar, su estatura se encuentre entre 166 y 172 cm? 0.75 ptos



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

SOLUCIONES

Bloque 1.- Análisis (seleccione solo una pregunta)

1A. Hallar la función polinómica *f(x)* que verifica que tiene un punto mínimo en M(1, 2) y su segunda derivada es: $f''(x)=2x+3$. Dar la expresión de *f(x)*. 2.5 ptos

Si $f''(x)=2x+3$ entonces:

$$f'(x)=\int f''(x)\,dx=\int 2x+3\;dx=x^2+3x+a\Rightarrow$$

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int x^2+3x+a\;dx=\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}+ax+b$$

Hallamos el valor de a y b con el resto de los datos proporcionados.

La función tiene un mínimo en M(1, 2) significa dos cosas:

Primera. La función pasa por el punto M → $f(1)=2$.

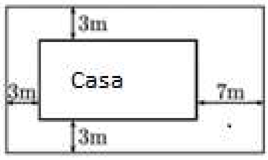
Segunda. Hay un mínimo en $x = 1$ → $f'(1)=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=x^2+3x+a \\ f'(1)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow 1^2+3\cdot 1+a=0\Rightarrow \boxed{a=-4}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=2 \\ f(x)=\dfrac{x^3}{3}+3\dfrac{x^2}{2}-4x+b \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{1^3}{3}+3\frac{1^2}{2}-4\cdot 1+b=2\Rightarrow \frac{1}{3}+\frac{3}{2}-4+b=2\Rightarrow \boxed{b=\frac{25}{6}}$$

La función tiene la expresión $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3}{2}x^2-4x+\dfrac{25}{6}$.

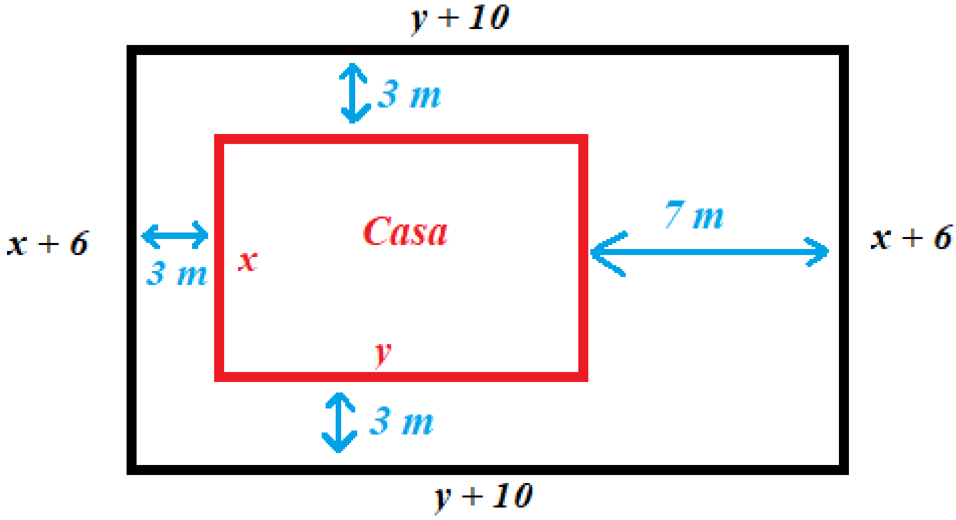
1B. Se quiere construir una Casa de la Juventud de 240 m^2 de superficie, que estará rodeada por una zona ajardinada con las dimensiones de la imagen.



2.5 ptos

Si se quiere minimizar la superficie total de la zona ajardinada, ¿qué dimensiones debe tener la Casa de la Juventud? ¿Cuál es el área de la zona ajardinada?

Si llamamos "x" e "y" a las dimensiones de la casa la situación planteada se detalla en el dibujo siguiente.



La superficie de la casa es de 240 m^2, por lo que $xy = 240$

La zona ajardinada tendrá como superficie la del solar menos la de la casa.

$$f(x,y) = (x+6)(y+10) - 240.$$

Obtenemos la función que dependa de una única variable.

$$\left.\begin{array}{l} xy = 240 \Rightarrow y = \dfrac{240}{x} \\ f(x,y) = (x+6)(y+10) - 240 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = (x+6)\left(\frac{240}{x} + 10\right) - 240$$

$$f(x) = x\frac{240}{x} + 10x + 6\frac{240}{x} + 60 - 240 = 240 + 10x + \frac{1440}{x} - 180$$

$$f(x) = 10x + \frac{1440}{x} + 60$$

Buscamos el mínimo de la función $f(x) = 10x + \dfrac{1440}{x} + 60$ que nos da la superficie de la zona ajardinada.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=10-\dfrac{1440}{x^2} \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 10-\frac{1440}{x^2}=0 \Rightarrow 10=\frac{1440}{x^2} \Rightarrow 10x^2=1440 \Rightarrow x^2=144 \Rightarrow x=\sqrt{144}=12$$

$$f'(x)=10-\frac{1440}{x^2}=10-1440x^{-2} \Rightarrow f''(x)=-1440(-2)x^{-3}=\frac{2880}{x^3} \Rightarrow f''(12)=\frac{2880}{12^3}>0$$

La función tiene un mínimo para *x = 12*. Siendo el valor de $y=\frac{240}{12}=20$. El valor de la función es $f(12)=10\cdot 12+\frac{1440}{12}+60=120+120+60=300$.

La zona ajardinada tiene una superficie mínima de 300 m^2 cuando el solar es un rectángulo de lados 12 y 20 metros.

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&0&0\\1&2&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\ y\ C=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&3&0\\-1&0&-1\end{pmatrix},$$

a) Comprobar si la matriz $M=2I_3+B^t$ tiene inversa. 0.75 ptos

Donde I_3 la matriz identidad de orden 3.

b) Justificar que existe la matriz que verifica la ecuación siguiente: 1.75 ptos

$$2X+C=A-X\cdot B^t$$

Calcular razonadamente dicha matriz X.

a) Obtenemos la expresión de $M=2I_3+B^t$.

$$M=2I_3+B^t=2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0&1\\2&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$$

Comprobamos si su determinante es cero o no.

$$|M|=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&0\\1&0&2\end{vmatrix}=2-1=1\neq 0$$

Al ser su determinante no nulo la matriz M tiene inversa.

b) Despejamos X de la ecuación.

$$2X+C=A-X\cdot B^t\Rightarrow X\cdot 2I+X\cdot B^t=A-C\Rightarrow X\left(2I+B^t\right)=A-C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{2I+B^t\ \text{tiene inversa}\right\}\Rightarrow X=(A-C)\left(2I+B^t\right)^{-1}$$

Existe la matriz X. Terminamos de calcularla.

$$M^{-1}=\left(2I_3+B^t\right)^{-1}=\frac{Adj\left(M^T\right)}{|M|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&0\\1&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}2&1\\0&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&2\\1&0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2&1\\1&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&1\\0&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$M^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ -4 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A-C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ -1 & -3 & 0\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$X=(A-C)\left(2I+B^t\right)^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ -1 & -3 & 0\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ -4 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0 & -2\\ -2+12 & -3 & 1-6\\ 4-8 & 2 & -2+4\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}4 & 0 & -2\\ 10 & -3 & -5\\ -4 & 2 & 2\end{pmatrix}}$$

2B. Un bar de tapas canario sólo ofrece tres platos en su menú: escaldón, tollos y carajacas. El precio medio de los tres platos (la ración) es de 5€. Se sirven 30 raciones de escaldón, 20 raciones de tollos y 10 raciones de carajacas, por lo que se ingresaron 255 euros en total. Sabiendo que el triple del precio de las caracajas supera en diez euros el doble del precio de los tollos. Calcula el precio de la ración de cada producto. 2.5 ptos

Llamamos "x" al precio del plato de escaldón, "y" al precio del plato de tollos y "z" al precio del plato de carajacas.

"El precio medio de los tres platos (la ración) es de 5€" → $\frac{x+y+z}{3}=5$

"Se sirven 30 raciones de escaldón, 20 raciones de tollos y 10 raciones de carajacas, por lo que se ingresaron 255 euros en total" → $30x+20y+10z=255$

"El triple del precio de las caracajas supera en diez euros el doble del precio de los tollos" → $3z=10+2y$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x+y+z}{3}=5\\ 30x+20y+10z=255\\ 3z=10+2y\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+y+z=15\\ 6x+4y+2z=51\\ 3z=10+2y\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=15-y-z\\ 6x+4y+2z=51\\ 3z=10+2y\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}6(15-y-z)+4y+2z=51\\ 3z=10+2y\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}90-6y-6z+4y+2z=51\\ 3z=10+2y\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-2y-4z=-39\\ -2y+3z=10\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2y+4z=39\\ -2y+3z=10\end{array}\right\}$$

$$7z=49\Rightarrow\boxed{z=\frac{49}{7}=7}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot 7=10+2y\Rightarrow 11=2y\Rightarrow\boxed{y=\frac{11}{2}=5.5}\Rightarrow\boxed{x=15-5.5-7=2.5}$$

El precio del plato de escaldón es de 2.5 euros, el de tollos de 5.5 euros y el de carajacas de 7 euros.

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

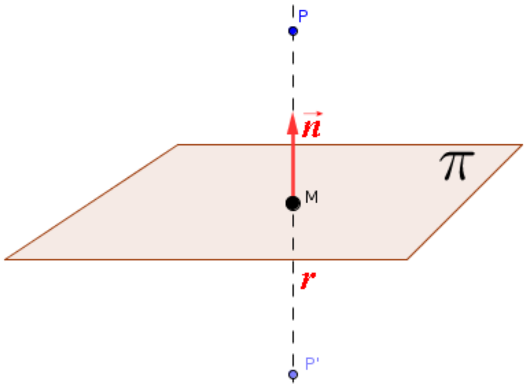
3A. En el espacio tridimensional consideremos el plano y las rectas siguientes:

$$\pi: 2x+3y-z=4 \;;\quad r:\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+5y+z=0 \end{cases} \;;\quad s:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{1}$$

a) Calcular el punto simétrico de P(–2,1,2) respecto de π. 1.25 ptos

b) Calcular el ángulo que forman *r* y *s*. 1.25 ptos

a) Debemos hallar el punto P ´ del dibujo.



Hallamos la ecuación de la recta *t* perpendicular al plano $\pi: 2x+3y-z=4$ que pasa por el punto P(–2, 1, 2).

$$\left.\begin{array}{l} P(-2,1,2)\in t \\ \vec{v}_t=\vec{n}=(2,3,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow t\equiv\begin{cases} x=-2+2\alpha \\ y=1+3\alpha \\ z=2-\alpha \end{cases}$$

Hallamos el punto M de corte de la recta *t* y el plano π.

$$\left.\begin{array}{l} t\equiv\begin{cases} x=-2+2\alpha \\ y=1+3\alpha \\ z=2-\alpha \end{cases} \\ \pi: 2x+3y-z=4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(-2+2\alpha)+3(1+3\alpha)-(2-\alpha)=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4+4\alpha+3+9\alpha-2+\alpha=4 \Rightarrow 14\alpha=7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{7}{14}=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=-2+2\frac{1}{2}=-1 \\ y=1+3\frac{1}{2}=\frac{5}{2} \\ z=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(-1,\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$$

El punto simétrico *P´(a,b,c)* es un punto que resulta de sumar al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$.

$$\overrightarrow{PM}=\left(-1,\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)-(-2,1,2)=\left(1,\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P'=M+\overrightarrow{PM}=\left(-1,\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)+\left(1,\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)=(0,4,1)}$$

El punto simétrico tiene coordenadas $P'=(0,4,1)$.

b) El ángulo que forman las rectas es el ángulo formado por sus vectores directores.

$$r:\begin{cases}x+y-z=0\\2x+5y+z=0\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{v_r}=(1,1,-1)\times(2,5,1)=\begin{vmatrix}i & j & k\\1 & 1 & -1\\2 & 5 & 1\end{vmatrix}=i-2j+5k-2k-j+5i$$

$$\overrightarrow{v_r}=6i-3j+3k=(6,-3,3)$$

$$s:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{1}\Rightarrow \overrightarrow{u_s}=(1,0,1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=(6,-3,3)\\ \overrightarrow{u_s}=(1,0,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{u_s}\right)=\frac{\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{u_s}}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|\cdot\left|\overrightarrow{u_s}\right|}=\frac{(6,-3,3)(1,0,1)}{\sqrt{6^2+(-3)^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}}\Rightarrow$$

$$\cos\left(\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{u_s}\right)=\frac{6+3}{\sqrt{54}\sqrt{2}}=\frac{9}{\sqrt{108}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \boxed{\left(\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{u_s}\right)=arc\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=30^{\circ}}$$

Las rectas forman un ángulo de 30º.

3B. En el espacio tridimensional conocemos las siguientes ecuaciones de rectas:

$$r:\begin{cases} x+2y-7z=0 \\ 2x+3y-12z+1=0 \end{cases} \quad ; \quad s:\begin{cases} 2x-7y-3z=22 \\ x-y+z=1 \end{cases}$$

a) Estudiar la posición relativa de r y s. 1.25 ptos

b) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s. 1.25 ptos

a) Obtenemos los vectores directores de cada recta.

$$r:\begin{cases} x+2y-7z=0 \\ 2x+3y-12z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r}=(1,2,-7)\times(2,3,-12)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -7 \\ 2 & 3 & -12 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_r}=-24i-14j+3k-4k+12j+21i=-3i-2j-k=(-3,-2,-1)$$

$$s:\begin{cases} 2x-7y-3z=22 \\ x-y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_s}=(2,-7,-3)\times(1,-1,1)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -7 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{u_s}=-7i-3j-2k+7k-2j-3i=-10i-5j+5k=(-10,-5,5)$$

Las coordenadas de los vectores directores no son proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r}=(-3,-2,-1) \\ \overrightarrow{u_s}=(-10,-5,5) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-3}{-10} \neq \frac{-2}{-5} \neq \frac{-1}{5}$$

Las rectas no son ni paralelas ni coincidentes. Las rectas se cortan o se cruzan.
Obtenemos un punto de cada recta.

$$\left.\begin{array}{l} r:\begin{cases} x+2y-7z=0 \\ 2x+3y-12z+1=0 \end{cases} \\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=0 \to x=-2y \\ 2x+3y+1=0 \end{cases} \Rightarrow -4y+3y+1=0 \Rightarrow -y=-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=1 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow P_r(-2,1,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} s:\begin{cases} 2x-7y-3z=22 \\ x-y+z=1 \end{cases} \\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 2x-7y=22 \\ x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-7y=22 \\ x=1+y \end{cases} \Rightarrow 2(1+y)-7y=22 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2+2y-7y=22 \Rightarrow -5y=20 \Rightarrow y=\frac{20}{-5}=-4 \Rightarrow x=1-4=-3 \Rightarrow Q_s(-3,-4,0)$$

Calculamos el producto mixto $\left[\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]$ y vemos si es nulo o no.

$$\left.\begin{array}{l} P_r(-2,1,0) \\ Q_s(-3,-4,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_rQ_s} = (-3,-4,0)-(-2,1,0) = (-1,-5,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r} = (-3,-2,-1) \\ \overrightarrow{u_s} = (-10,-5,5) \\ \overrightarrow{P_rQ_s} = (-1,-5,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right] = \begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -10 & -5 & 5 \\ -1 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 10-50+5-75=$$

Al ser no nulo las rectas r y s se cruzan. Tienen distinta dirección y no son coplanarias.

b) La ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas y contiene al punto $P_r(-2,1,0)$.

$$\pi: \left.\begin{array}{l} \vec{v} = \overrightarrow{v_r} = (-3,-2,-1) \\ \vec{u} = \overrightarrow{u_s} = (-10,-5,5) \\ P_r(-2,1,0) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z \\ -3 & -2 & -1 \\ -10 & -5 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -10(x+2)+10(y-1)+15z-20z+15(y-1)-5(x+2)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -10x-20+10y-10+15z-20z+15y-15-5x-10=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -15x+25y-5z-55=0 \Rightarrow \boxed{\pi: 3x-5y+z+11=0}$$

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. Según el estudio TALIS (2018), el 11% de los docentes de Educación Secundaria en España son menores de 30 años.
a) Elegimos 15 docentes españoles, ¿qué probabilidad hay de que haya menos de 2 docentes menores de 30 años? 1 pto
b) Supongamos que se seleccionan al azar 200 docentes españoles. ¿Qué probabilidad hay de que entre 20 y 30 docentes sean menores de 30 años? 1 pto
c) En un grupo de 500 docentes españoles, ¿cuántos cabe esperar que sean mayores de 30 años? 0.5 ptos

a) Si llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de docentes menores de 30 años en un grupo de 15 esta variable es dicotómica (menor o no) y cada repetición es independiente de la anterior.
X = B(15, 0.11). Nos piden calcular $P(X<2)$.

$$P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)=\binom{15}{0}0.11^0\cdot 0.89^{15}+\binom{15}{1}0.11^1\cdot 0.89^{14}=\boxed{0.487}$$

b) El número de repeticiones es muy grande y la probabilidad pedida es $P(20\le X\le 30)=P(X=20)+P(X=21)+.....+P(X=30)$, siendo muy laboriosa de calcular. Usamos la aproximación a la normal.

Como $n\cdot p=200\cdot 0.11=22>5;\ n\cdot q=200\cdot 0.89=178>5$ la aproximación será adecuada.

$$\left.\begin{array}{l} np=200\cdot 0.11=22 \\ \sqrt{npq}=\sqrt{200\cdot 0.11\cdot 0.89}\simeq 4.425 \end{array}\right\}\to Y=N\left(np,\sqrt{npq}\right)\to Y=N(22,4.425)$$

X = B(15, 0.11) se aproxima por $Y=N(22,4.425)$.

$$P(20\le X\le 30)=\{\text{Corrección de Yates}\}=P(19.5\le Y\le 30.5)=$$

$$=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{19.5-22}{4.25}\le Y\le\frac{30.5-22}{4.25}\right)=P(-0.59\le Y\le 2)=$$

$$=P(Y\le 2)-P(Y\le -0.59)=P(Y\le 2)-P(Y\ge 0.59)=$$

$$=P(Y\le 2)-\left[1-P(Y\le 0.59)\right]=\left\{\begin{array}{l}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{array}\right\}=0.9772-[1-0.7224]=\boxed{0.6996}$$

c) Si llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de docentes mayores de 30 años en un grupo de 500 esta variable es dicotómica (menor o no) y cada repetición es independiente de la anterior.
X = B(500, 0.89).
El número de docentes mayores de 30 años que cabe esperar en ese grupo es la media o esperanza → $\mu=np=500\cdot 0.89=445$.

Cabe esperar que haya 445 docentes mayores de 30 años.

4B. Las estaturas de las personas que se presentan a una audición para participar en una película siguen una distribución normal de media 168 cm y desviación típica 8 cm.
a) Si se selecciona una persona participante en la audición, averiguar la probabilidad de que tenga una estatura mayor a 156 cm. 1 pto
b) Se afirma que más del 15% de los participantes en la audición medían más de 1,82 metros. Justifica la veracidad o falsedad de dicha afirmación. 0.75 ptos
c) ¿Qué probabilidad hay de que, elegida una persona al azar, su estatura se encuentre entre 166 y 172 cm? 0.75 ptos

X = Estatura de una persona que se presenta a una audición.
X = N(168, 8).

a) Nos piden calcular $P(X \geq 156)$.

$$P(X \geq 156) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \geq \frac{156-168}{8}\right) = P(Z \geq -1.5) =$$

$$= P(X \leq 1.5) = \left\{ \begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{matrix} \right\} = \boxed{0.9332}$$

b) Calculamos la probabilidad de $P(X \geq 182)$.

$$P(X \geq 182) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \geq \frac{182-168}{8}\right) = P(Z \geq 1.75) =$$

$$= 1 - P(X \leq 1.75) = \left\{ \begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{matrix} \right\} = 1 - 0.9599 = \boxed{0.0401}$$

Hay un 4.01 % de los participantes que miden más de 1.82 metros. Siendo inferior al 15 %, por lo que la afirmación es falsa.

c) Calculamos $P(166 \leq X \leq 172)$.

$$P(166 \leq X \leq 172) = P(X \leq 172) - P(X \leq 166) = \{Tipificamos\} =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{172-168}{8}\right) - P\left(X \leq \frac{166-168}{8}\right) = P(Z \leq 0.5) - P(X \leq -0.25) =$$

$$= P(Z \leq 0.5) - P(X \geq 0.25) = P(Z \leq 0.5) - [1 - P(X \leq 0.25)] =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{matrix} \right\} = 0.6915 - (1 - 0.5987) = \boxed{0.2902}$$