CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade Convocatoria ordinaria 2023

Código: 20

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas**.

1. Números y Álgebra:

a) Calcule A si $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ es invertible, obtenga los valores de x, y y z sabiendo que $det(A-3I)=0$, que $y \neq 0$ y que $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Entiéndase que I es la matriz identidad.

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema $\begin{cases} (m+1)x + z = 1 \\ (m+1)x + y + z = m+1 \\ (m+1)x + my + (m-1)z = m \end{cases}$

3. Análisis

a) Enuncie los teoremas de Rolle y del valor medio del cálculo diferencial.

b) Explique si $f:[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, está o no en las hipótesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial. En caso de que lo esté, calcule un valor c para el cual se cumpla la tesis de ese teorema.

4. Análisis:

a) Calcule mediante cambio de variable las integrales $\int (\sin x)^5 \cos x dx$ y $\int (\ln x)/x dx$.

b) Calcule $\int (\ln x)/x dx$ empleando el método de integración por partes. Luego, obtenga algún valor de B tal que $\int_e^B (\ln x)/x dx = 3/2$.

5. Geometría:

a) Considérense el plano $\pi : ax + y + z = 1$, donde a es un parámetro real, y la recta $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$. Estudie la posición relativa de π y r en función de a y obtenga el valor de a que hace que π y r sean perpendiculares. Por último, razone si r puede estar contenida en π o no.

b) Si $\pi : -3x + y + z = 1$, diga qué valor tiene que tomar b para que $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$ esté contenida en π..

6. Geometría:

Considérese el plano $\pi : 2x - y + z = 1$. Se pide:

a) Calcular la distancia de π al punto de corte de las rectas $r_1 : \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 0 \\ z = 1-\lambda \end{cases}$ y

$r_2 : \begin{cases} x = \mu \\ y = -1+\mu \\ z = 0 \end{cases}$, $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$, $(\lambda,\mu\in\mathbb{R})$.

b) Obtener el punto simétrico de $P(1,0,0)$ con respecto a π.

7. Estadística y Probabilidad:

a) Calcule $P(A|B)$ si $B\subset A$. Luego, si $P(C)$ = 0.5 y $P(D)$ = 0.6, explique si C y D pueden ser incompatibles. Por último, obtenga $P(E\cup F)$ y $P(E\cap \overline{F})$ si E y F son independientes, $P(E)=0.3$ y $P(F)=0.2$.

b) Se tira un dado siete veces. Calcule la probabilidad de que salgan exactamente dos seises.

8. Estadística y Probabilidad:

Para un determinado grupo de pacientes, la tensión arterial sistólica (medida en mmHg) sigue una distribución normal de media 123.6 y desviación típica 17.8. Calcule la probabilidad de que un paciente elegido al azar tenga una tensión comprendida entre 100 y 120 mmHg. Luego, obtenga el valor de la tensión que es superado por el 67% de los pacientes.

SOLUCIONES

1. Números y Álgebra:

a) Calcule A si $(AB)^T=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$.

b) Si $A=\begin{pmatrix}3&x\\y&z\end{pmatrix}$ es invertible, obtenga los valores de x, y y z sabiendo que $det(A-3I)=0$, que $y\neq 0$ y que $(3z)A^{-1}+I=\begin{pmatrix}2&0\\-1&4\end{pmatrix}$. Entiéndase que I es la matriz identidad.

a)

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\Rightarrow AB=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-b&a+b\\c-d&c+d\end{pmatrix}$$

$$(AB)^T=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a-b&c-d\\a+b&c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a-b=1\\c-d=0\\a+b=2\\c+d=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=b+1\\c=d\\a+b=2\\c+d=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b+1+b=2\to 2b=1\to\boxed{b=\frac{1}{2}}\\ d+d=1\to 2d=1\to\boxed{d=\frac{1}{2}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{a=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}}\\ \boxed{c=\frac{1}{2}}\end{cases}\Rightarrow\boxed{A=\begin{pmatrix}3/2&1/2\\1/2&1/2\end{pmatrix}}$$

b) Se cumple que $det(A-3I)=0$.

$$A-3I=\begin{pmatrix}3&x\\y&z\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&x\\y&z-3\end{pmatrix}$$

$$det(A-3I)=0\Rightarrow\begin{vmatrix}0&x\\y&z-3\end{vmatrix}=0\Rightarrow -xy=0\Rightarrow\{y\neq 0\}\Rightarrow\boxed{x=0}$$

La matriz A queda $A=\begin{pmatrix}3&0\\y&z\end{pmatrix}$. Se cumple que $(3z)A^{-1}+I=\begin{pmatrix}2&0\\-1&4\end{pmatrix}$.

$$(3z)A^{-1}+I=\begin{pmatrix}2&0\\-1&4\end{pmatrix}\Rightarrow(3z)A^{-1}A+I\cdot A=\begin{pmatrix}2&0\\-1&4\end{pmatrix}A\Rightarrow(3z)I+A=\begin{pmatrix}2&0\\-1&4\end{pmatrix}A\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(3z)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0\\y&z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\y&z\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3z & 0 \\ 0 & 3z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -3+4y & 4z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3+3z & 0 \\ y & 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -3+4y & 4z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3+3z=6 \rightarrow 3z=3 \rightarrow \boxed{z=1} \\ 0=0 \\ y=-3+4y \rightarrow 3=3y \rightarrow \boxed{y=1} \\ 4z=4z \end{cases}$$

Los valores buscados son $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$.

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro *m*, el sistema $\begin{cases} (m+1)x + z = 1 \\ (m+1)x + y + z = m+1 \\ (m+1)x + my + (m-1)z = m \end{cases}$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} m+1 & 0 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 \\ m+1 & m & m-1 \end{pmatrix}$.y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} m+1 & 0 & 1 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 & m+1 \\ m+1 & m & m-1 & m \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula su determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} m+1 & 0 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 \\ m+1 & m & m-1 \end{vmatrix} = (m+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m-1 \end{vmatrix} = (m+1)[m-1+m-1-m] = (m+1)(m-2)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow (m+1)(m-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m+1=0 \to m=-1 \\ m-2=0 \to m=2 \end{cases}$$

Analizamos tres casos por separado.

CASO 1. $m \neq -1 \;\; y \;\; m \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $m = -1$

El determinante de A es nulo. El sistema queda tan sencillo que lo resolvemos.

$$\begin{cases} \boxed{z=1} \\ y+z=0 \\ -y-2z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+1=0 \to \boxed{y=-1} \\ -y-2=-1 \to y=-1 \end{cases}$$

$$Soluciones: \begin{cases} x=t \\ y=-1, \quad t \in \mathbb{R} \\ z=1 \end{cases}$$

El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones)

CASO 3. $m = 2$

El determinante de A es nulo y su rango no es 3. Estudiamos el rango de A y de A/B usando el método de Gauss para obtener una matriz triangular equivalente.

$$A/B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Fila\,3^a - Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 1 \end{array} \to Nueva\,Fila\,3^a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} Fila\,2^a - Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} 3 & 1 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \to Nueva\,Fila\,2^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Fila\,3^a - 2\cdot Fila\,2^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \to Nueva\,Fila\,3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\overbrace{\begin{array}{cccc} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} & & & -3 \end{array}}^{A/B}\right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible**.

Resumiendo: Si $m \neq -1$ y $m \neq 2$ el sistema es compatible determinado, si $m=-1$ el sistema es compatible indeterminado y si $m=2$ el sistema es incompatible.

3. Análisis
a) Enuncie los teoremas de Rolle y del valor medio del cálculo diferencial.
b) Explique si $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, está o no en las hipótesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial. En caso de que lo esté, calcule un valor c para el cual se cumpla la tesis de ese teorema.

a) Enunciado del Teorema de Rolle:

Si *f(x)* es una función que es **continua** en [a, b], **derivable** en (a, b) y cumple que *f(a) = f(b)*, entonces existe algún punto $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

Enunciado del Teorema del valor medio.

Si *f(x)* es una función real $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Si se cumple que *f(x)* es continua en [a, b] y *f(x)* es derivable en (a, b), entonces se tiene que existe un punto $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

b) Esta función existe y es continua en el intervalo [0, 1], pues el radicando es positivo.

Es derivable en (0, 1).

La derivada de la función es $f'(x)=\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=\sqrt{1-1^2}=0 \\ f(0)=\sqrt{1-0^2}=1 \\ f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \\ c\in(0,1)\,/\,f'(c)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0} \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{-c}{\sqrt{1-c^2}}=\frac{0-1}{1-0}=-1\Rightarrow -c=-\sqrt{1-c^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow c=\sqrt{1-c^2}\Rightarrow c^2=1-c^2\Rightarrow 2c^2=1\Rightarrow c^2=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow c=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\{c\in(0,1)\}\Rightarrow \boxed{c=+\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

El valor buscado es $c=+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\in(0,1)$

4. Análisis:
a) Calcule mediante cambio de variable las integrales $\int (\sin x)^5 \cos x dx$ y $\int (\ln x)/x dx$.
b) Calcule $\int (\ln x)/x dx$ empleando el método de integración por partes. Luego, obtenga algún valor de B tal que $\int_e^B (\ln x)/x dx = 3/2$.

a) La primera integral

$$\int (\sin x)^5 \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \sin x = t \to \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} = \boxed{\frac{(\sin x)^6}{6} + K}$$

La segunda integral

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \ln x = t \to \frac{1}{x} dx = dt \\ dx = x dt \end{array} \right\} = \int \frac{t}{x} x dt = \int t dt = \frac{t^2}{2} = \boxed{\frac{(\ln x)^2}{2} + K}$$

b) Usamos el método de integración por partes para obtener la expresión de la integral.

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Por partes} \\ \ln x = u \to \frac{1}{x} dx = du \\ dv = \frac{1}{x} dx \to v = \int \frac{1}{x} dx = \ln x \end{array} \right\} = (\ln x)(\ln x) - \int \ln x \frac{1}{x} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{\ln x}{x} dx = (\ln x)^2 - \int \ln x \frac{1}{x} dx \Rightarrow 2\int \frac{\ln x}{x} dx = (\ln x)^2 \Rightarrow \int \frac{\ln x}{x} dx = \boxed{\frac{(\ln x)^2}{2} + K}$$

Calculamos la integral definida.

$$\int_e^B (\ln x)/x dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_e^B = \left[\frac{(\ln B)^2}{2} \right] - \left[\frac{(\ln e)^2}{2} \right] = \frac{(\ln B)^2}{2} - \frac{1}{2}$$

Igualamos la expresión obtenida a 3/2 y determinamos el valor de B.

$$\int_e^B (\ln x)/x dx = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{(\ln B)^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{(\ln B)^2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow (\ln B)^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln B = \sqrt{4} = \pm 2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ln B = 2 \to \boxed{B = e^2} \\ \ln B = -2 \to \boxed{B = e^{-2}} \end{array} \right.$$

Los valores buscados son $B = e^2$ y $B = e^{-2}$.

5. Geometría:
a) Considérense el plano $\pi : ax + y + z = 1$, donde a es un parámetro real, y la recta $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$. Estudie la posición relativa de π y r en función de a y obtenga el valor de a que hace que π y r sean perpendiculares. Por último, razone si r puede estar contenida en π o no.
b) Si $\pi : -3x + y + z = 1$, diga qué valor tiene que tomar b para que $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$ esté contenida en π.

a) Obtenemos el vector director de la recta y el vector normal del plano.

$$\pi : ax + y + z = 1 \Rightarrow \vec{n} = (a,1,1)$$

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3} \Rightarrow r : \begin{cases} \vec{v_r} = (2,3,3) \\ P_r(1,0,-1) \end{cases}$$

Si los vectores son perpendiculares la recta y el plano son paralelos o la recta está contenida en el plano. En caso contrario son secantes (coinciden en un punto).

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n} = (a,1,1) \\ \vec{v_r} = (2,3,3) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v_r} = (a,1,1)(2,3,3) = 2a + 3 + 3 = 2a + 6$$

$$\vec{n} \cdot \vec{v_r} = 0 \Rightarrow 2a + 6 = 0 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow \boxed{a = -3}$$

Analizamos que pasa si $a = -3$.
En este caso los vectores son perpendiculares y plano y recta son paralelos o la recta está contenida en el plano. Comprobamos si el punto $P_r(1,0,-1)$ de la recta está en el plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi : -3x + y + z = 1 \\ ¿P_r(1,0,-1) \in \pi? \end{array}\right\} \Rightarrow ¿-3 + 0 - 1 = 1? \text{ ¡¡No se cumple!!}$$

Para $a = -3$ la recta r y el plano π son paralelos.

Analizamos que pasa si $a \neq -3$.

Para $a \neq -3$ los vectores no son perpendiculares y la recta r y el plano π se cortan.

Buscamos para $a \neq -3$ un valor para el que recta y plano formen 90º. Para que esto ocurra deben tener coordenadas proporcionales el vector director de la recta y el vector normal del plano.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n} = (a,1,1) \\ \vec{v_r} = (2,3,3) \\ \vec{n} \| \vec{v_r} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{3}}$$

Para $a = \frac{2}{3}$ recta y plano son secantes y además son perpendiculares.

La recta r solo puede ser paralela al plano ($a = -3$) o secante ($a \neq -3$).
La recta r no puede estar contenida en el plano.

b) Para que la recta esté contenida en el plano deben cumplirse dos condiciones: 1ª el vector director de la recta y el normal del plano deben ser perpendiculares, 2ª un punto de la recta debe pertenecer al plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi : -3x + y + z = 1 \rightarrow \vec{n} = (-3,1,1) \\ r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3} \rightarrow \vec{u_r} = (2,3,3) \\ \vec{n} \perp \vec{u_r} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{u_r} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (-3,1,1)(2,3,3) = 0 \Rightarrow -6+3+3 = 0 \text{ ¡¡}Se\ cumple\text{!!}$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi : -3x + y + z = 1 \\ r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3} \rightarrow P_r(1,b,-1) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow -3 + b - 1 = 1 \Rightarrow \boxed{b = 5}$$

El valor buscado es $b = 5$.

6. Geometría:
Considérese el plano $\pi: 2x - y + z = 1$. Se pide:

a) Calcular la distancia de π al punto de corte de las rectas $r_1: \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 0 \\ z = 1-\lambda \end{cases}$ y

$r_2: \begin{cases} x = \mu \\ y = -1+\mu \\ z = 0 \end{cases}$, $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$, $(\lambda,\mu\in\mathbb{R})$.

b) Obtener el punto simétrico de $P(1,0,0)$ con respecto a π.

a) Averiguamos el punto P de corte de las dos rectas.

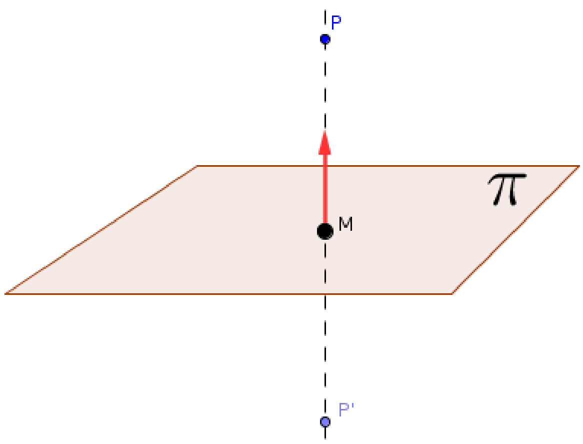
$$\left. \begin{array}{l} r_1: \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 0 \\ z = -1-\lambda \end{cases} \\ r_2: \begin{cases} x = \mu \\ y = -1+\mu \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 2+\lambda \\ -1+\mu = 0 \rightarrow \boxed{\mu = 1} \\ 0 = -1-\lambda \rightarrow \boxed{\lambda = -1} \end{cases} \Rightarrow 1 = 2-1 \text{ ¡Se cumple!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2-1 = 1 \\ y = 0 \\ z = -1+1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(1,0,0)}$$

Hallamos la distancia del punto P al plano $\pi: 2x - y + z = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x - y + z - 1 = 0 \\ P(1,0,0) \end{array} \right\} \Rightarrow d(P,\pi) = \frac{|2-0+0-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \simeq 0.408 \textit{ unidades}$$

b) Nos piden hallar las coordenadas del punto P´ del dibujo.



Hallamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto P. Esta recta tendrá como vector director el vector normal del plano.

$$\pi : 2x - y + z = 1 \Rightarrow \vec{n} = (2,-1,1) \Rightarrow r : \begin{cases} \vec{v_r} = \vec{n} = (2,-1,1) \\ P(1,0,0) \in r \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

El punto M es la intersección de la recta *r* con el plano π.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : 2x - y + z = 1 \\ r : \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2(1+2\alpha) - (-\alpha) + \alpha = 1 \Rightarrow 2 + 4\alpha + \alpha + \alpha = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = \frac{-1}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\frac{-1}{6} = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{-1}{6} = \frac{1}{6} \\ z = \frac{-1}{6} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{6}\right)$$

El punto P´ simétrico de P respecto del plano es el resultado de sumar al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$.

$$\overrightarrow{PM} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{6}\right) - (1,0,0) = \left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{6}\right)$$

$$P´ = M + \overrightarrow{PM} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{6}\right) + \left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{6}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$$

El punto simétrico es $P´\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$

7. a) Calcule $P(A|B)$ si $B \subset A$. Luego, si $P(C)$ = 0.5 y $P(D)$ = 0.6, explique si C y D pueden ser incompatibles. Por último, obtenga $P(E \cup F)$ y $P(E \cap \overline{F})$ si E y F son independientes, $P(E) = 0.3$ y $P(F) = 0.2$.
b) Se tira un dado siete veces. Calcule la probabilidad de que salgan exactamente dos seises.

a) Si $B \subset A$ entonces $B \cap A = B$.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = \boxed{1}$$

Dos sucesos C y D son incompatibles si su intersección es vacía y por tanto $P(C \cap D) = 0$

Si los suponemos incompatibles tenemos que $P(C \cap D) = 0$.

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) \Rightarrow P(C \cup D) = 0.5 + 0.6 - 0 = 1.1 > 1 \text{ ¡¡Imposible!}$$

Los sucesos C y D son compatibles.

Al ser los sucesos E y F independientes se cumple que $P(E \cap F) = P(E)P(F)$.

$$P(E \cap F) = P(E)P(F) = 0.3 \cdot 0.2 = 0.06$$

Calculamos $P(E \cup F)$.

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = 0.3 + 0.2 - 0.06 = \boxed{0.44}$$

Calculamos $P(E \cap \overline{F})$.

$$P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap \overline{F}) \Rightarrow 0.3 = 0.06 + P(E \cap \overline{F}) \Rightarrow P(E \cap \overline{F}) = 0.3 - 0.06 = \boxed{0.24}$$

b) La variable X que cuenta el número de seises que salen al lanzar 7 veces un dado es una variable binomial con parámetros *n = 7* y *p = P(Sacar un 6 al lanzar un dado) = 1/6.*
X = B(7, 1/6)

Nos piden calcular $P(X = 2)$. Lo calculamos.

$$P(X = 2) = \binom{7}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^5 \simeq \boxed{0.234}$$

8. Estadística y Probabilidad:
Para un determinado grupo de pacientes, la tensión arterial sistólica (medida en mmHg) sigue una distribución normal de media 123.6 y desviación típica 17.8. Calcule la probabilidad de que un paciente elegido al azar tenga una tensión comprendida entre 100 y 120 mmHg. Luego, obtenga el valor de la tensión que es superado por el 67% de los pacientes.

X es la variable que da la tensión arterial sistólica (medida en mmHg).

X = N(123.6, 17.8)

Nos piden hallar $P(100 \le X \le 120)$.

$$P(100 \le X \le 120) = P(X \le 120) - P(X \le 100) = \{Tipificamos\} =$$

$$= P\left(Z \le \frac{120-123.6}{17.8}\right) - P\left(Z \le \frac{100-123.6}{17.8}\right) = P(Z \le -0.20) - P(Z \le -1.33) =$$

$$= P(Z \ge 0.2) - P(Z \ge 1.33) = 1 - P(Z \le 0.2) - \left[1 - P(Z \le 1.33)\right] =$$

$$= P(Z \le 1.33) - P(Z \le 0.2) - = \left\{\begin{array}{l}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{array}\right\} = 0.9082 - 0.5793 = \boxed{0.3289}$$

También nos piden hallar "*a*" tal que $P(X \ge a) = 0.67$.

$$P(X \ge a) = 0.67 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(\frac{X-123.6}{17.8} \ge \frac{a-123.6}{17.8}\right) = 0.67 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \ge \frac{a-123.6}{17.8}\right) = 0.67 > 0.5 \Rightarrow \left\{\frac{a-123.6}{17.8} \text{ Es negativo}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \le -\frac{a-123.6}{17.8}\right) = P\left(Z \ge \frac{a-123.6}{17.8}\right) = 0.67 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Buscamos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{a-123.6}{17.8} = 0.44 \Rightarrow a - 123.6 = -0.44 \cdot 17.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 123.6 - 0.44 \cdot 17.8 \Rightarrow \boxed{a = 115.768\ mmHg}$$

La tensión debería ser superior a 115.768 mmHg.