uc3m Universidad Carlos III de Madrid	**UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID** EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2022-2023** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular el determinante de $A^t A$.
b) (0.5 puntos) Calcular el rango de BA en función de *b*.
c) (0.75 puntos) Calcular B^{-1} para *b = 2*.
d) (0.75 puntos) Para *b = 1*, calcular B^5.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un equipo de ingenieros realiza pruebas de consumo de un nuevo vehículo híbrido. El gasto en litros de combustible por cada 100 kilómetros en función de la velocidad, medida en decenas de kilómetros por hora, es

$$c(v)=\begin{cases} \dfrac{5v}{3} & si \quad 0 \le v < 3 \\ 14-4v+\dfrac{v^2}{3} & si \quad v \ge 3 \end{cases}$$

a) (1 punto) Si en una primera prueba el vehículo tiene que circular a más de 3 decenas de kilómetros por hora, ¿a qué velocidad debe ir el vehículo para obtener un consumo mínimo?
b) (1.5 puntos) Si en otra prueba el vehículo debe circular a una velocidad *v* tal que $1 \le v \le 8$, ¿cuáles serán el máximo y el mínimo consumo posibles del vehículo?

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean el plano $\pi : z = 1$, los puntos P(1, 1, 1) y Q(0, 0, 1) y la recta *r* que pasa por los puntos P y Q.

a) (0.25 puntos) Verifique que los puntos P y Q pertenecen al plano π.
b) (1 punto) Halle una recta paralela a *r* contenida en el plano $z = 0$.

c) (1.25 puntos) Halle una recta que pase por P y tal que su proyección ortogonal sobre el plano π sea la recta *r*, con la cual forme un ángulo de $\dfrac{\pi}{4}$ radianes.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sabiendo que $P(A)=0.5$, $P(A/B)=0.625$ y $P(A\cup B)=0.65$, se pide calcular:

a) (1.5 puntos) $P(B)$ y $P(A\cap B)$.
b) (1 punto) $P(A/A\cup B)$ y $P(A\cap B/A\cup B)$

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el sistema $\begin{cases} -2x+y+kz=1 \\ kx-y-z=0 \\ -y+(k-1)z=3 \end{cases}$. se pide:

a) (1.25 puntos) Discutirlo en función del parámetro *k*.
b) (0.5 puntos) Resolverlo para *k* = *3*.
c) (0.75 puntos) Resolverlo para *k* = *3/2* y especificar, si es posible, una solución particular con *x* = *2*.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dadas las funciones

$$f(x)=2+2x-2x^2 \text{ y } g(x)=2-6x+4x^2+2x^3,$$

se pide:

a) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de $h(x)=|f(x)|$.

b) (1.5 puntos) Hallar el área de la región acotada por las curvas $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=0$ y $x=2$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

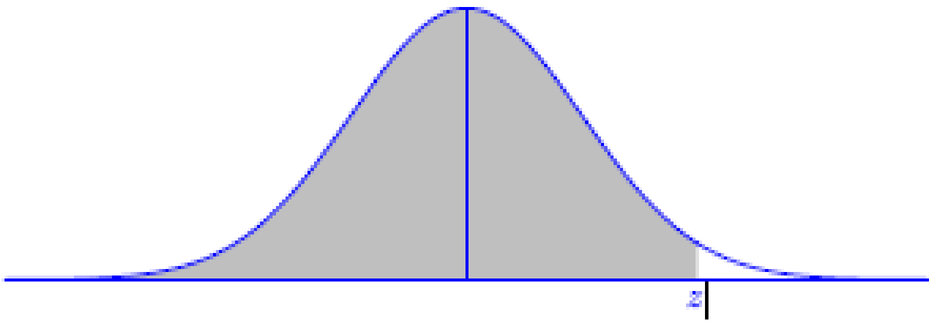
Dados el plano $\pi: x+3y+2z+14=0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x=2 \\ z=5 \end{cases}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Hallar el punto del plano π más próximo al origen de coordenadas.
b) (1 punto) Calcular la proyección ortogonal del eje OZ sobre el plano π.
c) (1 punto) Hallar la recta con dirección perpendicular a *r*, que esté contenida en π, y que corte al eje OZ.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
El 65% de los universitarios de 18 años que intentan superar el examen práctico de conducir lo consigue a la primera. Se escogen al azar 10 universitarios de 18 años que ya han superado el examen práctico de conducir.
Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que exactamente 3 de ellos necesitaran más de un intento para superar el examen práctico de conducir.
b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que alguno de ellos haya necesitado más de un intento para superar el examen práctico de conducir.
c) (1 punto) Aproximando por una distribución normal, determinar la probabilidad de que, dados 60 de estos universitarios, como mínimo la mitad superase el examen práctico de conducir a la primera.

Distribución Normal



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0,1)$, $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}b & 0\\ 1 & b\end{pmatrix}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular el determinante de A^tA.
b) (0.5 puntos) Calcular el rango de BA en función de *b*.
c) (0.75 puntos) Calcular B^{-1} para *b = 2*.
d) (0.75 puntos) Para *b = 1*, calcular B^5.

a)

$$A^tA=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+1 & 2-0 & 0-2\\ 2-0 & 1+0 & 0+0\\ 0-2 & 0+0 & 0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

$$\left|A^tA\right|=\begin{vmatrix}5 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 4\end{vmatrix}=20+0+0-4-16-0=\boxed{0}$$

b)

$$BA=\begin{pmatrix}b & 0\\ 1 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2b & b & 0\\ 2-b & 1 & 2b\end{pmatrix}$$

Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la columna 1ª → $\begin{vmatrix}b & 0\\ 1 & 2b\end{vmatrix}=2b^2$. Este determinante se anula si *b = 0*. El rango de AB es 2 si $b \neq 0$.

Si *b = 0* la matriz BA queda $BA=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$. La matriz BA tiene rango 1.

Resumiendo: Si $b \neq 0$ el rango de BA es 2 y si *b = 0* el rango de BA es 1.

c) Para *b = 2* la matriz B queda $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

$$|B|=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4\neq 0$$

$$B^{-1}=\frac{Adj\left(B^t\right)}{|B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}}{4}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1/2 & 0\\ -1/4 & 1/2\end{pmatrix}}$$

d) Para *b = 1* la matriz B queda $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^4 = B^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^5 = B^4 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4+1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}}$$

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Un equipo de ingenieros realiza pruebas de consumo de un nuevo vehículo híbrido. El gasto en litros de combustible por cada 100 kilómetros en función de la velocidad, medida en decenas de kilómetros por hora, es

$$c(v)=\begin{cases} \dfrac{5v}{3} & si \quad 0\le v<3 \\ 14-4v+\dfrac{v^2}{3} & si \quad v\ge 3 \end{cases}$$

a) (1 punto) Si en una primera prueba el vehículo tiene que circular a más de 3 decenas de kilómetros por hora, ¿a qué velocidad debe ir el vehículo para obtener un consumo mínimo?
b) (1.5 puntos) Si en otra prueba el vehículo debe circular a una velocidad v tal que $1\le v\le 8$, ¿cuáles serán el máximo y el mínimo consumo posibles del vehículo?

a) La función que debemos de manejar es $c(v)=14-4v+\dfrac{v^2}{3} \quad pues \quad v\ge 3$.

Buscamos el mínimo relativo de la función.

$$\left.\begin{array}{r} c(v)=14-4v+\dfrac{v^2}{3}\Rightarrow c'(v)=-4+\dfrac{2v}{3} \\ c'(v)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow -4+\frac{2v}{3}=0\Rightarrow -12+2v=0\Rightarrow 2v=12\Rightarrow v=6$$

$$c''(v)=\frac{2}{3}\Rightarrow c''(6)=\frac{2}{3}>0\rightarrow \text{¡Mínimo!}$$

Para que el consumo sea mínimo debe de ir a 60 km/h.

a) Analizamos la situación en las dos zonas de velocidad.

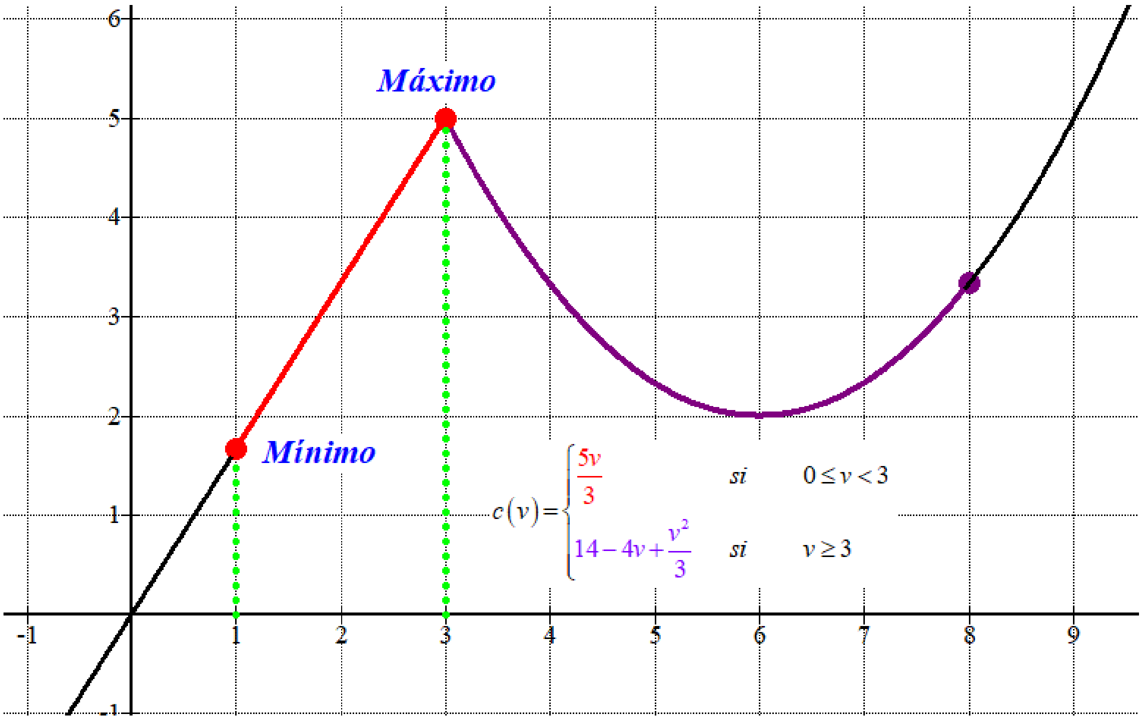
Con una velocidad $1\le v<3$ la función consumo es $c(v)=\dfrac{5v}{3}$. Esta función es lineal y creciente, a más velocidad mayor consumo, por lo que el menor consumo estará en $v=1$. Este consumo es de $c(1)=\dfrac{5}{3}\simeq 1.667\, litros/100\,km$.
El consumo máximo estará en v próxima a 3, este consumo será próximo a
$c(3)=\dfrac{5\cdot 3}{3}=5\ litros/100\,km$

Con una velocidad $3\le v\le 8$ la función consumo es $c(v)=14-4v+\dfrac{v^2}{3}$. En el apartado anterior hemos visto que tiene un consumo mínimo con $v=6$. Este consumo es de
$c(6)=14-24+\dfrac{6^2}{3}=2\ litros/100\,km$.
El consumo máximo estará en los extremos del intervalo:

$$c(3)=14-12+\frac{3^2}{3}=5\,litros/100\,km$$

$$c(8)=14-32+\frac{8^2}{3}=\frac{10}{3}\simeq 3.33\,litros/100\,km$$

El mínimo consumo se obtiene con $v = 1$. Este consumo es de $1.667\,litros/100\,km$.
El máximo consumo se produce con $v = 3$. Este consumo es de $5\,litros/100\,km$.



A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sean el plano $\pi : z = 1$, los puntos P(1, 1, 1) y Q(0, 0, 1) y la recta *r* que pasa por los puntos P y Q.
a) (0.25 puntos) Verifique que los puntos P y Q pertenecen al plano π.
b) (1 punto) Halle una recta paralela a *r* contenida en el plano $z = 0$.
c) (1.25 puntos) Halle una recta que pase por P y tal que su proyección ortogonal sobre el plano π sea la recta *r*, con la cual forme un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes.

a) Para que los puntos pertenezcan al plano deben satisfacer su ecuación $\pi : z = 1$. Basta con que su tercera coordenada sea 1. Lo cumplen los dos puntos P(1, 1, **1**) y Q(0, 0, **1**).

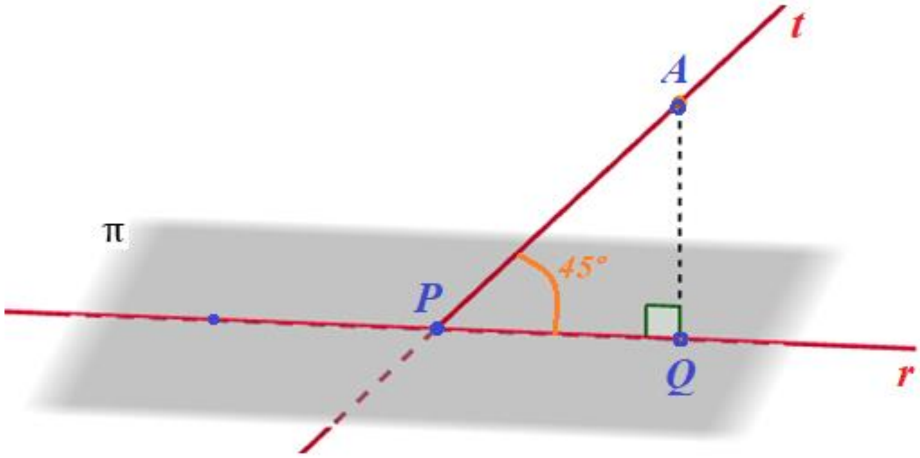
b) Hallamos la ecuación de la recta que pasa por P(1, 1, 1) y Q(0, 0, 1).

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_r} = \overrightarrow{QP} = (1,1,1) - Q(0,0,1) = (1,1,0) \\ Q(0,0,1) \in r \end{array}\right\} \Rightarrow r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$$

Una recta *s* paralela a *r* contenida en el plano $z = 0$ debe tener el mismo vector director que *r* y debe pasar por un punto cualquiera del plano $z = 0$, por ejemplo A(0,0,0).

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u_s} = \vec{v_r} = (1,1,0) \\ A(0,0,0) \in s \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{s : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}}$$

c) Buscamos una recta *t* como la del dibujo.



Como los puntos P y Q están en el plano π la recta *r* está contenida en el plano π. La recta *t* que deseamos hallar debe cortar el plano en el punto P. Además, uno de sus puntos debe proyectarse ortogonalmente en el punto Q. La recta *r* y *t* deben formar 45º.

Si *A(a,b,c)* tenemos que $\overrightarrow{AQ} \perp \pi$.

$$\left.\begin{array}{l} \pi : z = 1 \Rightarrow \vec{n} = (0,0,1) \\ \overrightarrow{AQ} = (0,0,1) - (a,b,c) = (-a,-b,1-c) \\ \overrightarrow{AQ} \perp \pi \Rightarrow \overrightarrow{AQ} \parallel \vec{n} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-a}{0} = \frac{-b}{0} = \frac{1-c}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-a}{0} = \dfrac{1-c}{1} \rightarrow -a = 0(1-c) \rightarrow a = 0 \\ \dfrac{-b}{0} = \dfrac{1-c}{1} \rightarrow -b = 0(1-c) \rightarrow b = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0,0,c)$$

Si $A(0,0,c)$ tenemos que $\left(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PQ}\right) = 45^{o}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PA} = (0,0,c) - (1,1,1) = (-1,-1,c-1) \\ \overrightarrow{PQ} = (0,0,1) - (1,1,1) = (-1,-1,0) \\ \left(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PQ}\right) = 45^{o} \\ \cos\left(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PQ}\right) = \dfrac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ}}{\left|\overrightarrow{PA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{PQ}\right|} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 45^{o} = \frac{(-1,-1,c-1)(-1,-1,0)}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (c-1)^2}\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 0^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1+1}{\sqrt{2+(c-1)^2} \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2+(c-1)^2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4 \Rightarrow 2\sqrt{2+(c-1)^2} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2+(c-1)^2} = 2 \Rightarrow 2+(c-1)^2 = 4 \Rightarrow (c-1)^2 = 2 \Rightarrow c-1 = \sqrt{2} \Rightarrow c = 1+\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A\left(0,0,1+\sqrt{2}\right)}$$

Determinamos la ecuación de la recta t que pasa por A y P.

$$\left.\begin{array}{l} A\left(0,0,1+\sqrt{2}\right) \in t \\ P(1,1,1) \in t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} u_t = \overrightarrow{AP} = (1,1,1) - \left(0,0,1+\sqrt{2}\right) = \left(1,1,-\sqrt{2}\right) \\ P(1,1,1) \in t \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{t: \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda \quad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1-\sqrt{2}\lambda \end{cases}}$$

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sabiendo que $P(A)=0.5,\ P(A/B)=0.625\ y\ P(A\cup B)=0.65$, se pide calcular:

a) (1.5 puntos) $P(B)\ y\ P(A\cap B)$.

b) (1 punto) $P(A/A\cup B)\ y\ P(A\cap B/A\cup B)$

a)

$$P(A/B)=0.625\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=0.625\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=0.625\Rightarrow P(A\cap B)=0.625P(B)$$

$$P(A\cup B)=0.65\Rightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.65\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.5+P(B)-0.625P(B)=0.65\Rightarrow(1-0.625)P(B)=0.65-0.5\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.375P(B)=0.15\Rightarrow\boxed{P(B)=\frac{0.15}{0.375}=0.4}\Rightarrow\boxed{P(A\cap B)=0.625\cdot 0.4=0.25}$$

b)

$$P(A/A\cup B)=\frac{P(A\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\{A\cap(A\cup B)=A\}=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$

$$P(A/A\cup B)=\frac{0.5}{0.5+0.4-0.25}=\frac{0.5}{0.65}=\boxed{\frac{10}{13}\simeq 0.769}$$

$$P(A\cap B/A\cup B)=\frac{P((A\cap B)\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\{(A\cap B)\cap(A\cup B)=A\cap B\}=$$

$$=\frac{P(A\cap B)}{P(A)+P(B)-P(A\cap B)}=\frac{0.25}{0.65}=\boxed{\frac{5}{13}\simeq 0.3846}$$

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el sistema $\begin{cases} -2x+y+kz=1 \\ kx-y-z=0 \\ -y+(k-1)z=3 \end{cases}$. se pide:

a) (1.25 puntos) Discutirlo en función del parámetro *k*.
b) (0.5 puntos) Resolverlo para *k = 3*.
c) (0.75 puntos) Resolverlo para *k = 3/2* y especificar, si es posible, una solución particular con *x = 2*.

a) Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & k \\ k & -1 & -1 \\ 0 & -1 & k-1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} -2 & 1 & k \\ k & -1 & -1 \\ 0 & -1 & k-1 \end{vmatrix}=2(k-1)+0-k^2-0-k(k-1)+2=$$

$$=2k-2-k^2-k^2+k+2=-2k^2+3k$$

$$|A|=0 \Rightarrow -2k^2+3k=0 \Rightarrow k(-2k+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ -2k+3=0 \to k=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $k \neq 0$ **y** $k \neq \dfrac{3}{2}$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $k=0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos el rango de A y el de la matriz ampliada A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -1 \quad -1 \quad 3 \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 3 \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\underbrace{\begin{matrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{matrix}}^{A/B} \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A/B es 3. Como tienen rangos distintos el sistema es **incompatible** (sin solución).

CASO 3. $k=\dfrac{3}{2}$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1.5 & 1\\ 1.5 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0.5 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}4\cdot\text{ Fila }2^{a}+3\cdot\text{ Fila }1^{a}\\ \begin{array}{cccc}6 & -4 & -4 & 0\\ -6 & 3 & 4.5 & 3\\ \hline 0 & -1 & 0.5 & 3\end{array}\rightarrow\text{Nueva Fila }2^{a}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1.5 & 1\\ 0 & -1 & 0.5 & 3\\ 0 & -1 & 0.5 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila }3^{a}-\text{ Fila }2^{a}\\ \begin{array}{cccc}0 & -1 & 0.5 & 3\\ 0 & 1 & -0.5 & -3\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\rightarrow\text{Nueva Fila }3^{a}\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\overbrace{\underbrace{\begin{matrix}-2 & 1 & 1.5\\ 1.5 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}}_{A}\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}}^{A/B}\right)$$

El rango de la matriz A es 2 al igual que el de la matriz A/B, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $k\neq 0$ **y** $k\neq\frac{3}{2}$ el sistema es **compatible determinado**, para $k=0$ el sistema es **incompatible** y para $k=\frac{3}{2}$ es **compatible indeterminado**.

b) Si $k=3$ el sistema es compatible determinado. Obtenemos la solución.

$$\begin{cases}-2x+y+3z=1\\ 3x-y-z=0\\ -y+2z=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x+y+3z=1\\ 3x-y-z=0\\ 2z-3=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x+2z-3+3z=1\\ 3x-(2z-3)-z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x+5z=4\\ 3x-2z+3-z=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-2x+5z=4\\ 3x-3z=-3\rightarrow x-z=-1\rightarrow x=z-1\end{cases}\Rightarrow -2(z-1)+5z=4\Rightarrow -2z+2+5z=4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3z=2\Rightarrow\boxed{z=\frac{2}{3}}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=\frac{2}{3}-1=\frac{-1}{3}}\\ \boxed{y=2\frac{2}{3}-3=\frac{-5}{3}}\end{cases}$$

La solución del sistema es $x=\frac{-1}{3};\ y=\frac{-5}{3};\ z=\frac{2}{3}$.

c) Si $k=\frac{3}{2}$ el sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos a partir del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado a).

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1.5 & 1 \\ 0 & -1 & 0.5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x+y+1.5z=1 \\ -y+0.5z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x+y+1.5z=1 \\ 0.5z-3=y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x+0.5z-3+1.5z=1 \Rightarrow -2x+2z=4 \Rightarrow -x+z=2 \Rightarrow x=z-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=-2+\lambda \\ y=-3+0.5\lambda, \ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}}$$

Buscamos dentro de las infinitas soluciones del sistema una en la que *x = 2*.

$$\left.\begin{array}{r} \begin{cases} x=-2+\lambda \\ y=-3+0.5\lambda, \ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases} \\ x=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 2=-2+\lambda \to \lambda=4 \\ y=-3+0.5\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-3+0.5\cdot 4=-1 \\ z=\lambda=4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=4 \end{cases}}$$

La solución del sistema es *x = 2; y = –1; z = 4.*

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dadas las funciones
$$f(x)=2+2x-2x^2 \text{ y } g(x)=2-6x+4x^2+2x^3,$$
se pide:
a) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de $h(x)=|f(x)|$.
b) (1.5 puntos) Hallar el área de la región acotada por las curvas $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=0$ y $x=2$.

a)
$$h(x)=|f(x)|=|2+2x-2x^2|$$

Vemos cuando se anula la función.

$$2+2x-2x^2=0 \Rightarrow x^2-x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-1)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}=\begin{cases}\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=x\\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=x\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la función antes, entre y después de estos dos valores.

En el intervalo $\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ tomamos *x* = *–1* y la expresión $2+2x-2x^2$ vale $2+2(-1)-2(-1)^2=-2<0$. La función es $h(x)=|2+2x-2x^2|=-(2+2x-2x^2)=2x^2-2x-2$

En el intervalo $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ tomamos *x* = *0* y la expresión $2+2x-2x^2$ vale $2+2(0)-2(0)^2=2>0$. La función es $h(x)=|2+2x-2x^2|=-2x^2+2x+2$

En el intervalo $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$ tomamos *x* = *2* y la expresión $2+2x-2x^2$ vale $2+2(2)-2(2)^2=-2<0$. La función es $h(x)=|2+2x-2x^2|=-(2+2x-2x^2)=2x^2-2x-2$

La función *h(x)* queda $h(x)=|2+2x-2x^2|=\begin{cases}2x^2-2x-2 & si & x<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\\ -2x^2+2x+2 & si & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\le x\le\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\ 2x^2-2x-2 & si & x>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{cases}$

Esta función es continua en $\mathbb{R}$.

Esta función es derivable en $\mathbb{R}-\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

La expresión de la derivada es:

$$h'(x)=\begin{cases}4x-2 & si \quad x<\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\ -4x+2 & si \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ 4x-2 & si \quad x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

Estudiamos su derivabilidad en $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y en $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

¿Es derivable en $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$?

$$\left.\begin{array}{l} h'\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^-\right)=\lim_{x\to\frac{1-\sqrt{5}}{2}^-}h'(x)=\lim_{x\to\frac{1-\sqrt{5}}{2}^-}4x-2=4\frac{1-\sqrt{5}}{2}-2=2-2\sqrt{5}-2=-2\sqrt{5}\\ h'\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^+\right)=\lim_{x\to\frac{1-\sqrt{5}}{2}^+}h'(x)=\lim_{x\to\frac{1-\sqrt{5}}{2}^+}-4x+2=-4\frac{1-\sqrt{5}}{2}+2=-2+2\sqrt{5}+2=2\sqrt{5}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow h'\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^-\right)\neq h'\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^+\right)$$

Al ser las derivadas laterales distintas la función *h(x)* no es derivable en $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

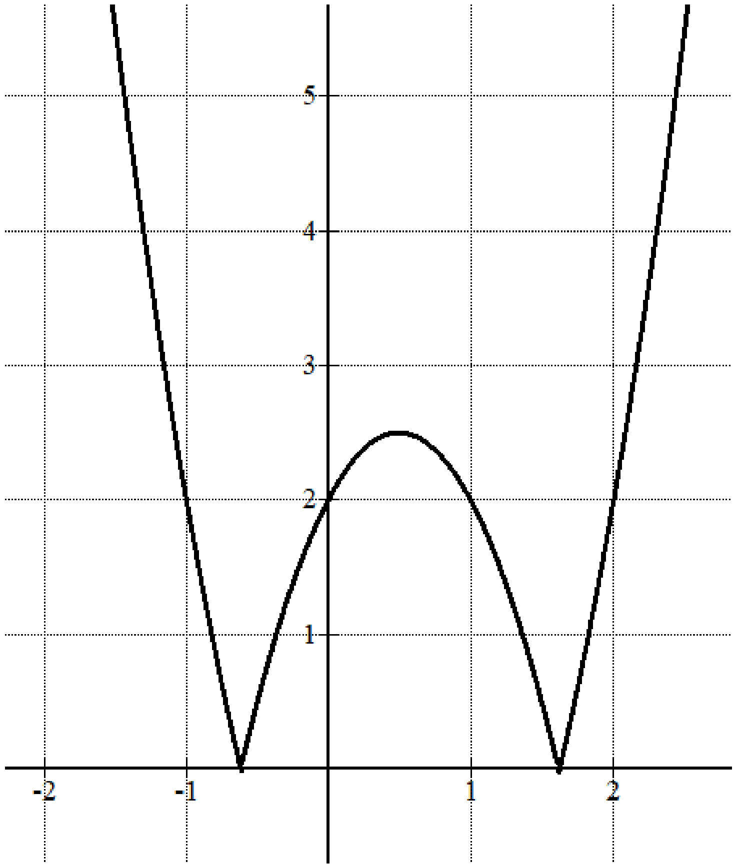
¿Es derivable en $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$?

$$\left.\begin{array}{l} h'\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^-\right)=\lim_{x\to\frac{1+\sqrt{5}}{2}^-}h'(x)=\lim_{x\to\frac{1+\sqrt{5}}{2}^-}-4x+2=-4\frac{1+\sqrt{5}}{2}+2=-2-2\sqrt{5}+2=-2\sqrt{5}\\ h'\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^+\right)=\lim_{x\to\frac{1+\sqrt{5}}{2}^+}h'(x)=\lim_{x\to\frac{1+\sqrt{5}}{2}^+}4x-2=4\frac{1+\sqrt{5}}{2}-2=2+2\sqrt{5}-2=2\sqrt{5}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow h'\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^-\right)\neq h'\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^+\right)$$

La función *h(x)* no es derivable en $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

La función *h(x)* es derivable en $\mathbb{R}-\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$



$$h(x)=\left|2+2x-2x^2\right|=\begin{cases}2x^2-2x-2 & si \quad x<\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\ -2x^2+2x+2 & si \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2}\le x\le\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ 2x^2-2x-2 & si \quad x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

b) Hallamos los puntos de corte de las gráficas.

$$\left.\begin{array}{l}f(x)=2+2x-2x^2\\ g(x)=2-6x+4x^2+2x^3\\ f(x)=g(x)\end{array}\right\}\Rightarrow 2+2x-2x^2=2-6x+4x^2+2x^3\Rightarrow -2x^3-6x^2+8x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x\left(x^2+3x-4\right)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x^2+3x-4=0\to x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2+16}}{2}=\dfrac{-3\pm 5}{2}=\begin{cases}\dfrac{-3+5}{2}=1=x\\ \dfrac{-3-5}{2}=-4=x\end{cases}\end{cases}$$

Las gráficas se cortan en tres puntos: $x = -4$, $x = 0$, $x = 1$. Como nos piden determinar el área de la región acotada por las dos gráficas, $x = 0$ y $x = 2$ el área la dividimos en dos trozos: uno entre 0 y 1 y otro entre 1 y 2.

$$\int_0^1 g(x) - f(x)\,dx = \int_0^1 2 - 6x + 4x^2 + 2x^3 - \left(2 + 2x - 2x^2\right)dx =$$

$$= \int_0^1 2 - 6x + 4x^2 + 2x^3 - 2 - 2x + 2x^2 dx = \int_0^1 -8x + 6x^2 + 2x^3 dx =$$

$$= \left[-8\frac{x^2}{2} + 6\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \left[-8\frac{1^2}{2} + 6\frac{1^3}{3} + 2\frac{1^4}{4}\right] - \left[-8\frac{0^2}{2} + 6\frac{0^3}{3} + 2\frac{0^4}{4}\right] =$$

$$= -4 + 2 + \frac{1}{2} = -1.5$$

$$Área\,1 = \left|\int_0^1 g(x) - f(x)\,dx\right| = |-1.5| = 1.5\ u^2$$

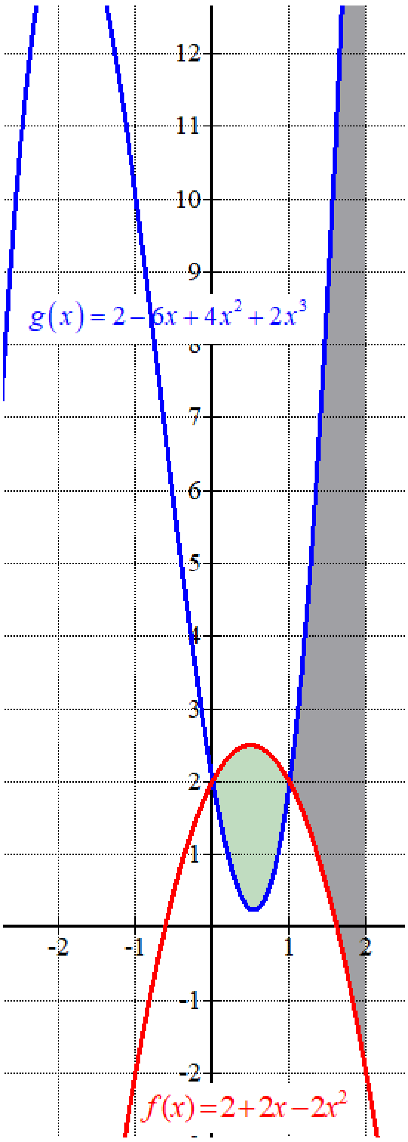
$$\int_1^2 g(x) - f(x)\,dx = \int_1^2 -8x + 6x^2 + 2x^3 dx =$$

$$= \left[-8\frac{x^2}{2} + 6\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \left[-4x^2 + 2x^3 + \frac{x^4}{2}\right]_1^2 =$$

$$= \left[-4\cdot 2^2 + 2\cdot 2^3 + \frac{2^4}{2}\right] - \left[-4\cdot 1^2 + 2\cdot 1^3 + \frac{1^4}{2}\right] =$$

$$= -16 + 16 + 8 + 4 - 2 - \frac{1}{2} = 9.5$$

$$Área\,2 = \left|\int_1^2 g(x) - f(x)\,dx\right| = |9.5| = 9.5\ u^2$$



El área total es la suma de las dos partes.

Área = 1.5 + 9.5=11 u^2

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el plano $\pi : x+3y+2z+14=0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x=2 \\ z=5 \end{cases}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Hallar el punto del plano π más próximo al origen de coordenadas.
b) (1 punto) Calcular la proyección ortogonal del eje OZ sobre el plano π.
c) (1 punto) Hallar la recta con dirección perpendicular a *r*, que esté contenida en π, y que corte al eje OZ.

a) El punto P del plano más próximo al origen de coordenadas es la proyección ortogonal del origen de coordenadas en el plano.
Para hallar esta proyección P obtenemos la recta perpendicular al plano que pasa por O(0,0,0).
Después hallamos el punto de corte de plano y recta. Dicho punto es el punto buscado.
La recta *s* perpendicular al plano tendrá como vector director el vector normal del plano.

$$\pi : x+3y+2z+14=0 \Rightarrow \vec{n}=(1,3,2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=\vec{n}=(1,3,2) \\ O(0,0,0)\in s \end{array}\right\} \Rightarrow s:\begin{cases} x=\lambda \\ y=3\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=2\lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto P como intersección de la recta *s* y el plano.

$$\left.\begin{array}{l} s:\begin{cases} x=\lambda \\ y=3\lambda \\ z=2\lambda \end{cases} \\ \pi : x+3y+2z+14=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda+9\lambda+4\lambda+14=0 \Rightarrow 14\lambda=-14 \Rightarrow \lambda=-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(-1,-3,-2)}$$

b) La proyección ortogonal del eje OZ sobre el plano π es una recta *t* que determinamos obteniendo la proyección de dos puntos del eje OZ sobre el plano.
Dos puntos del eje OZ pueden ser O(0,0,0) y B(0,0,7).

La proyección del punto O(0,0,0) la hemos calculado y es $P(-1,-3,-2)$.
Determinamos la proyección del punto B(0,0,7) sobre el plano π siguiendo los mismos pasos que en el apartado a).
Determinamos la recta *s´* perpendicular al plano que pasa por el punto B.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_{s'}}=\vec{n}=(1,3,2) \\ B(0,0,7)\in s \end{array}\right\} \Rightarrow s':\begin{cases} x=\lambda \\ y=3\lambda \quad ,\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=7+2\lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto Q de corte de la recta *s´* y el plano π.

$$\left.\begin{array}{l} s':\begin{cases} x=\lambda \\ y=3\lambda \quad , \lambda\in\mathbb{R} \\ z=7+2\lambda \end{cases} \\ \pi: x+3y+2z+14=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda+9\lambda+14+4\lambda+14=0 \Rightarrow 14\lambda=-28 \Rightarrow \lambda=-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-6 \\ z=7-4=3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(-2,-6,3)}$$

La proyección ortogonal del eje OZ sobre el plano π es la recta que pasa por los puntos P y Q.

$$\left.\begin{array}{l} Q(-2,-6,3)\in t \\ P(-1,-3,-2)\in t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ}=(-2,-6,3)-(-1,-3,-2)=(-1,-3,5) \\ P(-1,-3,-2)\in t \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{t:\begin{cases} x=-1-\alpha \\ y=-3-3\alpha \, , \, \alpha\in\mathbb{R} \\ z=-2+5\alpha \end{cases}}$$

c) Como la recta t' pedida debe estar contenida en el plano π debe ser perpendicular al vector normal del plano y a su vez perpendicular al vector director de la recta. Este vector es el producto vectorial de ambos vectores.

$$\left.\begin{array}{l} r\equiv\begin{cases} x=2 \\ y=\beta \Rightarrow \overrightarrow{v_r}=(0,1.0) \\ z=5 \end{cases} \\ \pi: x+3y+2z+14=0 \Rightarrow \vec{n}=(1,3,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{u_{t'}}=\overrightarrow{v_r}\times\vec{n}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=2i-k=(2,0,-1)$$

Hallamos el punto A de corte del plano π con el eje OZ.

$$\left.\begin{array}{l} \pi: x+3y+2z+14=0 \\ eje\,OZ \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 0+0+2z+14=0 \Rightarrow 2z=-14 \Rightarrow z=-7 \Rightarrow A(0,0,-7)$$

La recta t' pedida debe tener como vector director $\overrightarrow{u_{t'}}=(2,0,-1)$ y pasar por el punto $A(0,0,-7)$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_{t'}}=(2,0,-1) \\ A(0,0,-7)\in t' \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{t':\begin{cases} x=2\lambda \\ y=0 \quad , \lambda\in\mathbb{R} \\ z=-7-\lambda \end{cases}}$$

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
El 65% de los universitarios de 18 años que intentan superar el examen práctico de conducir lo consigue a la primera. Se escogen al azar 10 universitarios de 18 años que ya han superado el examen práctico de conducir.
Se pide:
a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que exactamente 3 de ellos necesitaran más de un intento para superar el examen práctico de conducir.
b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que alguno de ellos haya necesitado más de un intento para superar el examen práctico de conducir.
c) (1 punto) Aproximando por una distribución normal, determinar la probabilidad de que, dados 60 de estos universitarios, como mínimo la mitad superase el examen práctico de conducir a la primera.

X = Número de universitarios que necesitan más de un intento para superar el examen práctico de conducir de un grupo de 10.

Es una variable binomial con parámetros n = 10 y p = 1 – 0.65 = 0.35.
X = B(10, 0.35).

a) Debemos calcular $P(X=3)$.

$$P(X=3)=\binom{10}{3}\cdot 0.35^3\cdot 0.65^7 \simeq \boxed{0.2522}$$

b) Debemos calcular $P(X\geq 1)$. Calculamos la probabilidad del suceso contrario $P(X=0)$.

$$P(X=0)=\binom{10}{0}\cdot 0.35^0\cdot 0.65^{10} \simeq 0.0135$$

Calculamos $P(X\geq 1)$ usando el suceso contrario.

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-0.0135=\boxed{0.9865}$$

c) X = Número de universitarios que aprueban a la primera el examen práctico de conducir de un grupo de 60.
X = B(60, 0.65)
Esta variable binomial se aproxima por una normal de media $np=60\cdot 0.65=39$ y desviación típica $\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{60\cdot 0.65\cdot 0.35}\simeq 3.6946$.
La variable binomial X = B(60, 0.65) se aproxima con una normal Y = N(39, 3.6946).

Nos piden calcular $P(X\geq 30)$.

$$P(X\geq 30)=\{\text{Corrección de Yates}\}=P(Y\geq 29.5)=\{Tipificamos\}=P\left(Z\geq \frac{29.5-39}{3.6946}\right)=$$

$$=P(Z\geq -2.57)=P(Z\leq 2.57)=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla de la N(0, 1)}\end{matrix}\right\}=\boxed{0.9949}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	[illegible]	0,
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	[illegible]	0,
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	[illegible]	$\boxed{0,9949}$	0,