



Universidad de Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2022-2023

MATEMÁTICAS

- Responde en el pliego del examen a **cuatro preguntas cualesquiera** de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- Indique en el pliego del examen la **agrupación de preguntas que responderá**: agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

Problema 1. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

- (a) **(0.75 puntos)** Calcula el determinante y el rango de P para cada valor de a.
- (b) **(1 punto)** Para $a = 1$ ¿existe P^{-1} ? En caso afirmativo calcúlala.
- (c) **(0.75 puntos)** Para $a = 1$, calcula $\det(M)$ sabiendo que $PM = M^2$.

Problema 2. Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} x - y + az = -1 \\ 2x + y = 1 \\ y + 2z = 1 \end{array} \right\}$$

- (a) **(1 punto)** Discute el sistema según los valores de a.
- (b) **(0.75 puntos)** Resuelve el sistema para el caso $a = -3$ si es posible.
- (c) **(0.75 puntos)** Encuentra, en caso de que exista, un valor de a que verifique $x = 1$. Calcula la solución en ese caso.

Problema 3. Sean $A, B \in \mathbb{R}$ y $f(x) = \frac{x^2 + A}{Bx - 1}$. Se pide:

- (a) **(0.75 puntos)** Calcular A y B para que la gráfica de la función pase por el punto $(0, -3)$ y tenga un extremo relativo en $x = -1$.
- (b) **(1.25 puntos)** Para los valores de $A = 3$ y $B = 1$, estudia si la función tiene asíntotas y extremos relativos.
- (c) **(0.5 puntos)** Para los valores $A = 3$ y $B = 1$, y basándose en los resultados obtenidos en el apartado anterior, realice un esbozo de la función.

Problema 4. (2.5 puntos) Se considera la función $f(x) = xe^{2x^2}$. Se pide:

- (a) **(1.5 puntos)** Calcula una primitiva de f(x), que pase por el punto $(0, -1)$. (Sugerencia: Puedes utilizar el cambio de variable $t = 2x^2$)
- (b) **(1 punto)** Calcula el área encerrada por la gráfica de f, las rectas $x = 0$ y $x = 1$.



Universidad de Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2022-2023

Problema 5. Sea s la recta de ecuación $x - 2 = \frac{y - 2}{-1} = z$ y r la recta que pasa por los puntos

$A=(1,0,1)$ y $B=(2,1,2)$.

- (a) **(1 punto)** Indica la posición relativa de r y s .
 (b) **(0.75 puntos)** Calcula el plano paralelo a r y que contiene a s .
 (c) **(0.75 puntos)** Calcula la distancia entre las rectas r y s .

Problema 6. Dados los planos $\pi \equiv x + y + z = 3$, $\pi' \equiv x + y = 3$ y el punto $A=(2,1,6)$

- (a) **(0.75 puntos)** Calcula un vector director y un punto de la recta r intersección de los planos π y π' .
 (b) **(1 punto)** Calcula el punto P de π tal que el segmento AP es perpendicular al plano π .
 (c) **(0.75 puntos)** Calcula el punto A' simétrico de A respecto del plano π .

Problema 7. Una imprenta compra la tinta a dos empresas distintas. En la empresa A compra el 60% de sus pedidos, y el resto a la empresa B. Se observa que el 1.6% de las cajas de tinta de la empresa A llegan con defecto, mientras que de la empresa B sólo el 0.9% son defectuosas. Se toma una caja al azar:

- (a) **(1.25 punto)** Calcula la probabilidad de que la caja sea defectuosa.
 (b) **(1.25 puntos)** Si la caja seleccionada no es defectuosa, calcule la probabilidad de que se haya comprado a la empresa A.

Problema 8. Las calificaciones de la asignatura Análisis Matemático I de la Facultad de Matemáticas siguen una distribución $N(5, 2)$.

- (a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que un estudiante haya obtenido una nota mayor o igual que 7.5.
 (b) **(0.75 puntos)** Calcula la probabilidad de que un estudiante haya obtenido una nota entre 3 y 5.
 (c) **(1 punto)** Se modifica sistema de enseñanza de forma que la desviación típica ahora es 1.5 y la probabilidad de obtener una nota menor o igual que 6, sea 0.52. ¿Cuál sería la nueva media? ¿Ha funcionado el sistema aplicado?

*Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$,
 $F(1.25) = 0.8944$, $F(0.05) = 0.52$, $F(0.52) = 0.6985$, $F(0.8944) = 0.8133$, $F(1) = 0.8413$.

SOLUCIONES:

Problema 1. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

- (a) **(0.75 puntos)** Calcula el determinante y el rango de P para cada valor de a.
 (b) **(1 punto)** Para $a = 1$ ¿existe P^{-1} ? En caso afirmativo calcúlala.
 (c) **(0.75 puntos)** Para $a = 1$, calcula $\det(M)$ sabiendo que $PM = M^2$.

(a)

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 2a - 0 - 2 - 0 = 2a - 4$$

El rango de P es 3 si su determinante es no nulo.

$$|P| = 0 \Rightarrow 2a - 4 = 0 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

Si $a \neq 2$ el determinante de P es no nulo y su rango es 3.

Si $a = 2$ el determinante de P es nulo y su rango no es 3. Averiguamos su rango.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

¿El rango de A es 2?

Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª y calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

Si $a = 2$ el rango de P es 2.

Resumiendo: Si $a \neq 2$ el rango de P es 3 y si $a = 2$ el rango de P es 2.

(b) Para $a = 1$ la matriz P queda $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y su determinante vale $2 \cdot 1 - 4 = -2 \neq 0$, por

lo que existe la inversa de P. La calculamos.

$$P^{-1} = \frac{\text{Adj}(P^T)}{|P|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1/2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) Aplicando las propiedades de los determinantes tenemos que:

$$|PM| = |M^2| \Rightarrow |P| \cdot |M| = |M|^2 \Rightarrow |P| \cdot |M| = |M| \cdot |M| \Rightarrow \begin{cases} |M| \neq 0 \rightarrow |P| = |M| \rightarrow |M| = -2 \\ o \\ |M| = 0 \end{cases}$$

El determinante de la matriz M vale 0 o -2.

Problema 2. Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} x - y + az = -1 \\ 2x + y = 1 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

- (a) (1 punto) Discute el sistema según los valores de a .
 (b) (0.75 puntos) Resuelve el sistema para el caso $a = -3$ si es posible.
 (c) (0.75 puntos) Encuentra, en caso de que exista, un valor de a que verifique $x = 1$. Calcula la solución en ese caso.

a) La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 2a - 0 + 4 + 0 = 2a + 6$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2a + 6 = 0 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow \boxed{a = -3}$$

Analizamos dos casos por separado.

CASO 1. Si $a \neq -3$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. Si $a = -3$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Analizamos el sistema utilizando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\ -2 \quad 2 \quad 6 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 3 \quad 6 \quad 3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 3 \cdot \text{Fila } 3^a \\ 0 \quad 3 \quad 6 \quad 3 \\ 0 \quad -3 \quad -6 \quad -3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad -1 \quad -3 \quad -1}^{A/B} \\ 0 \quad 3 \quad 6 \quad 3 \\ 0 \quad \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_A \quad 0 \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3).
El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

- b) Para $a = -3$ el sistema es compatible indeterminado. Hallamos sus soluciones a partir del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y - 3z = -1 \\ 3y + 6z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y - 3z = -1 \\ y + 2z = 1 \rightarrow y = 1 - 2z \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 1 + 2z - 3z = -1 \Rightarrow x = z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}}$$

- c) Si $a = -3$ en la expresión de las soluciones obtenida en el apartado anterior tomamos $\lambda = 1$ y

la solución del sistema queda $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 2 = -1 \\ z = 1 \end{cases}$

Problema 3. Sean $A, B \in \mathbb{R}$ y $f(x) = \frac{x^2 + A}{Bx - 1}$. Se pide:

- (a) **(0.75 puntos)** Calcular A y B para que la gráfica de la función pase por el punto $(0, -3)$ y tenga un extremo relativo en $x = -1$.
- (b) **(1.25 puntos)** Para los valores de $A = 3$ y $B = 1$, estudia si la función tiene asíntotas y extremos relativos.
- (c) **(0.5 puntos)** Para los valores $A = 3$ y $B = 1$, y basándose en los resultados obtenidos en el apartado anterior, realice un esbozo de la función.

(a) Si la gráfica de la función pasa por el punto $(0, -3)$ entonces $f(0) = -3$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{x^2 + A}{Bx - 1} \\ f(0) = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow -3 = \frac{0^2 + A}{B \cdot 0 - 1} \Rightarrow -3 = -A \Rightarrow \boxed{A = 3}$$

Si la función tiene un extremo relativo en $x = -1$ entonces $f'(-1) = 0$.

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{Bx - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(Bx - 1) - (x^2 + 3)B}{(Bx - 1)^2} = \frac{2Bx^2 - 2x - Bx^2 - 3B}{(Bx - 1)^2} = \frac{Bx^2 - 2x - 3B}{(Bx - 1)^2}$$

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow \frac{B(-1)^2 - 2(-1) - 3B}{(B(-1) - 1)^2} = 0 \Rightarrow \frac{B + 2 - 3B}{(-B - 1)^2} = 0 \Rightarrow \frac{2 - 2B}{(-B - 1)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - 2B = 0 \Rightarrow -2B = -2 \Rightarrow \boxed{B = 1}$$

Los valores buscados son $A = 3$ y $B = 1$.

(b) Para los valores de $A = 3$ y $B = 1$ la función queda $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$

Ya tiene un punto crítico en $x = -1$, visto en el apartado anterior. Averiguamos si tiene alguno más.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = \boxed{3 = x} \\ \frac{2-4}{2} = \boxed{-1 = x} \end{cases}$$

Comprobamos si son máximos o mínimos sustituyendo en la segunda derivada.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2 - 2x - 3)}{(x-1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1) - 2(x^2 - 2x - 3)}{(x-1)^3}$$

$$f''(-1) = \frac{(-2-2)(-1-1) - 2((-1)^2 - 2(-1) - 3)}{(-1-1)^3} = \frac{8}{-8} = -1 < 0 \rightarrow \text{Máximo}$$

$$f''(3) = \frac{(6-2)(3-1) - 2(3^2 - 6 - 3)}{(3-1)^3} = \frac{8}{8} = 1 > 0 \rightarrow \text{Mínimo}$$

La función presenta un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 3$.

Hallamos sus asíntotas.

El dominio de la función $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x-1}$ es $\mathbb{R} - \{1\}$.

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = 1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3}{x-1} = \frac{4}{0} = \infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x} + \frac{3}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1 + \frac{3}{\infty}}{1 - \frac{1}{\infty}} = \frac{1 + 0}{1 - 0} = \frac{1}{0} = \infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

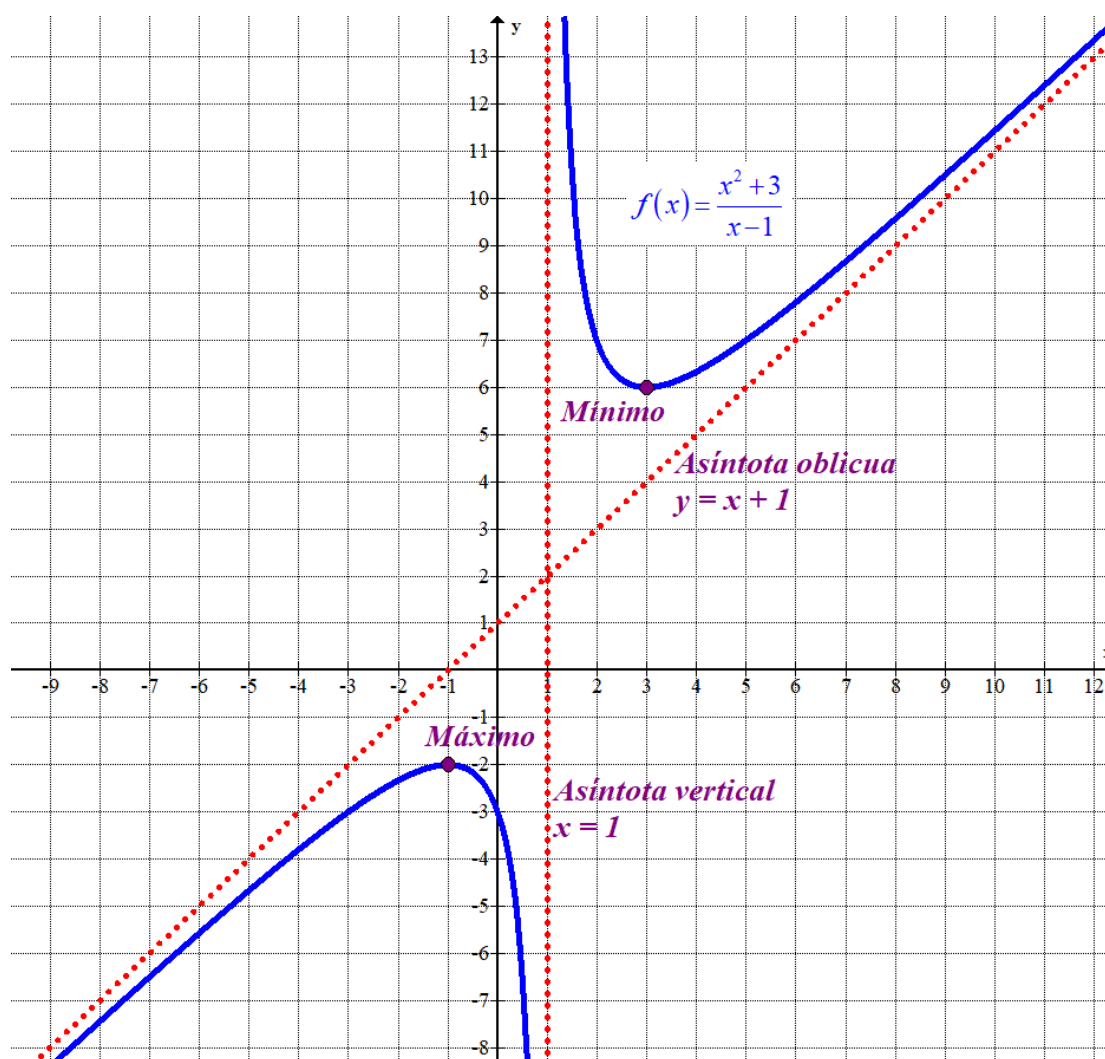
$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 + 3}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3 - x^2 + x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 3}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x} + \frac{3}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1 \end{aligned}$$

$y = x + 1$ es asíntota oblicua.

(c) Obtenemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

x	$y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$
-2	-7/3
-1	-2 Máximo
0	-3
2	7
3	6 Mínimo
4	19/3



Problema 4. (2.5 puntos) Se considera la función $f(x) = xe^{2x^2}$. Se pide:

(a) **(1.5 puntos)** Calcula una primitiva de $f(x)$, que pase por el punto $(0, -1)$. (Sugerencia: Puedes utilizar el cambio de variable $t = 2x^2$)

(b) **(1 punto)** Calcula el área encerrada por la gráfica de f , las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

(a)

$$F(x) = \int f(x) dx = \int xe^{2x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ 2x^2 = t \rightarrow 4xdx = dt \\ dx = \frac{1}{4x} dt \end{array} \right\} = \int xe^t \frac{1}{4x} dt = \frac{1}{4} \int e^t dt = \frac{1}{4} e^t = \boxed{\frac{1}{4} e^{2x^2} + K}$$

Como la primitiva pasa por $(0, -1)$ se debe cumplir $F(0) = -1$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \frac{1}{4} e^{2x^2} + K \\ F(0) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{4} e^{2 \cdot 0^2} + K = -1 \Rightarrow \frac{1}{4} + K = -1 \Rightarrow K = -1 - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4}$$

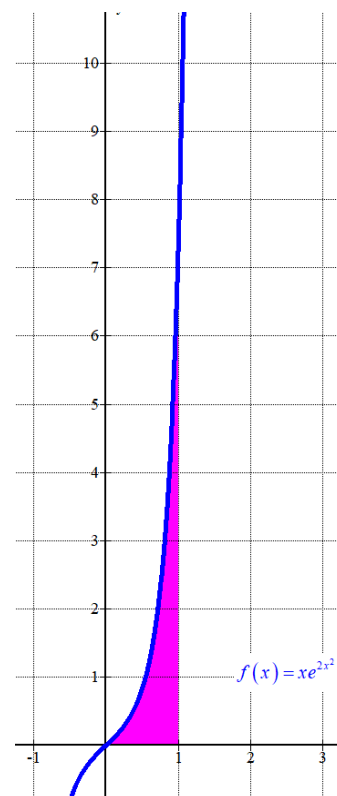
La primitiva buscada es $F(x) = \frac{1}{4} e^{2x^2} - \frac{5}{4}$.

(b) Averiguamos los puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas ($y = 0$).

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = xe^{2x^2} \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow xe^{2x^2} = 0 \Rightarrow \{e^{2x^2} \neq 0\} \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

Como el punto de corte está en una de las rectas el área se calcula como la integral definida entre 0 y 1 de la función.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^1 xe^{2x^2} dx = \left[\frac{1}{4} e^{2x^2} \right]_0^1 = \\ &= \left[\frac{1}{4} e^{2 \cdot 1^2} \right] - \left[\frac{1}{4} e^{2 \cdot 0^2} \right] = \boxed{\frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{4} \approx 1.597 \text{ u}^2} \end{aligned}$$



Problema 5. Sea s la recta de ecuación $x-2 = \frac{y-2}{-1} = z$ y r la recta que pasa por los puntos

$A=(1,0,1)$ y $B=(2,1,2)$.

(a) (1 punto) Indica la posición relativa de r y s .

(b) (0.75 puntos) Calcula el plano paralelo a r y que contiene a s .

(c) (0.75 puntos) Calcula la distancia entre las rectas r y s .

(a) Hallamos la ecuación, el vector director y un punto de la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} A(1,0,1) \in r \\ B(2,1,2) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A(1,0,1) \in r \\ \vec{v}_r = \overline{AB} = (2,1,2) - (1,0,1) = (1,1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

El vector director de la recta $s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$ es $\vec{u}_s = (1, -1, 1)$.

Las coordenadas de los vectores directores de las rectas no son proporcionales, por lo que las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = (1, -1, 1) \\ \vec{v}_r = (1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{1}{1}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Determinamos su posición relativa calculando el valor del producto mixto $[\vec{u}_s, \vec{v}_r, \overline{AC}]$, siendo C un punto de la recta s .

$$s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1} \Rightarrow C(2, 2, 0)$$

$$\overline{AC} = (2, 2, 0) - (1, 0, 1) = (1, 2, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_s = (1, -1, 1) \\ \vec{v}_r = (1, 1, 1) \\ \overline{AC} = (1, 2, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_s, \vec{v}_r, \overline{AC}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 + 2 - 1 - 1 - 2 = -4 \neq 0$$

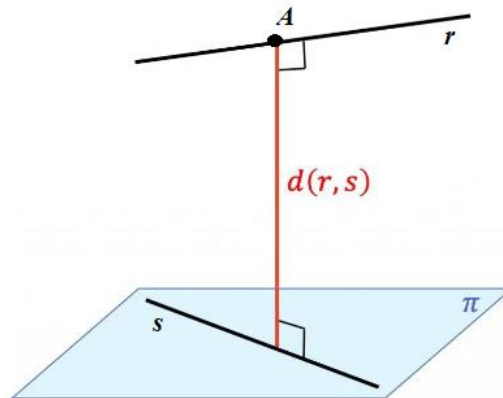
Al ser este producto mixto no nulo las rectas se cruzan (rectas no paralelas sin punto en común).

(b) El plano paralelo a r y que contiene a s tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas y contiene el punto $C(2,2,0)$ de la recta s .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{u}_s = (1, -1, 1) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (1, 1, 1) \\ C(2, 2, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x + 2 + y - 2 + z + z - y + 2 - x + 2 = 0 \Rightarrow -2x + 2z + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x - z - 2 = 0}$$

- (c) La distancia entre las rectas r y s que se cruzan es la distancia de un punto de la recta r al plano π hallado en el apartado anterior.



$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x - z - 2 = 0 \\ A(1, 0, 1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, s) = d(r, \pi) = d(A, \pi) = \frac{|1 - 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{2} \text{ u}}$$

Problema 6. Dados los planos $\pi \equiv x + y + z = 3$, $\pi' \equiv x + y = 3$ y el punto $A = (2, 1, 6)$

- (a) (0.75 puntos) Calcula un vector director y un punto de la recta r intersección de los planos π y π' .
 (b) (1 punto) Calcula el punto P de π tal que el segmento AP es perpendicular al plano π .
 (c) (0.75 puntos) Calcula el punto A' simétrico de A respecto del plano π .

- (a) Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta r intersección de los planos π y π' .

$$r \equiv \left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + y + z = 3 \\ \pi' \equiv x + y = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ y = 3 - x \end{array} \right\} \Rightarrow x + 3 - x + z = 3 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

$$r \equiv \begin{cases} \vec{u}_r = (1, -1, 0) \\ P_r(0, 3, 0) \end{cases}$$

Un vector director de la recta r es $\vec{u}_r = (1, -1, 0)$ y un punto es $P_r(0, 3, 0)$.

- (b) Si el segmento AP es perpendicular al plano π el vector \overline{AP} debe tener coordenadas proporcionales al vector normal del plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + y + z = 3 \Rightarrow \vec{n} = (1, 1, 1) \\ \overline{AP} = (a, b, c) - (2, 1, 6) = (a - 2, b - 1, c - 6) \\ \overline{AP} \parallel \vec{n} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a-2}{1} = \frac{b-1}{1} = \frac{c-6}{1} \Rightarrow$$

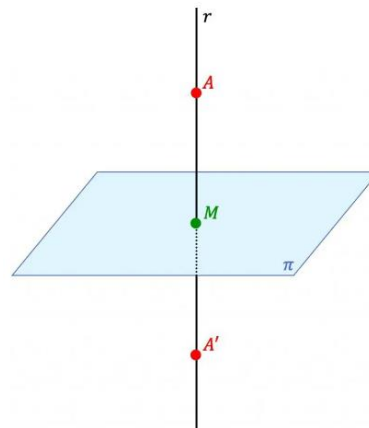
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{a-2}{1} = \frac{b-1}{1} \\ \frac{b-1}{1} = \frac{c-6}{1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a-2 = b-1 \\ b-1 = c-6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = b+1 \\ c = b+5 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{P(b+1, b, b+5)}$$

El punto P pertenece al plano π por lo que cumple su ecuación.

$$\left. \begin{array}{l} P(b+1, b, b+5) \in \pi \\ \pi \equiv x + y + z = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow b+1 + b + b+5 = 3 \Rightarrow 3b = -3 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow \boxed{P(0, -1, 4)}$$

- (c) Hallamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto A . Después, determinamos el punto M de corte de recta y plano. Dicho punto será el punto medio del segmento AA' . El punto A' buscado lo obtendremos sumando al punto M el vector \overline{AM} .
 La recta perpendicular al plano que pasa por el punto A tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (1, 1, 1) \\ A(2, 1, 6) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 6 + \lambda \end{cases}$$



Hallamos el punto M de corte de recta y plano.

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 6 + \lambda \end{cases} \Rightarrow 2 + \lambda + 1 + \lambda + 6 + \lambda = 3 \Rightarrow 3\lambda = -6 \Rightarrow \lambda = \frac{-6}{3} = -2 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv x + y + z = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 2 = 0 \\ y = 1 - 2 = -1 \\ z = 6 - 2 = 4 \end{cases} \Rightarrow M(0, -1, 4)$$

Hallamos el punto A'.

$$\overrightarrow{AM} = (0, -1, 4) - (2, 1, 6) = (-2, -2, -2)$$

$$A' = M + \overrightarrow{AM} = (0, -1, 4) + (-2, -2, -2) = (-2, -3, 2)$$

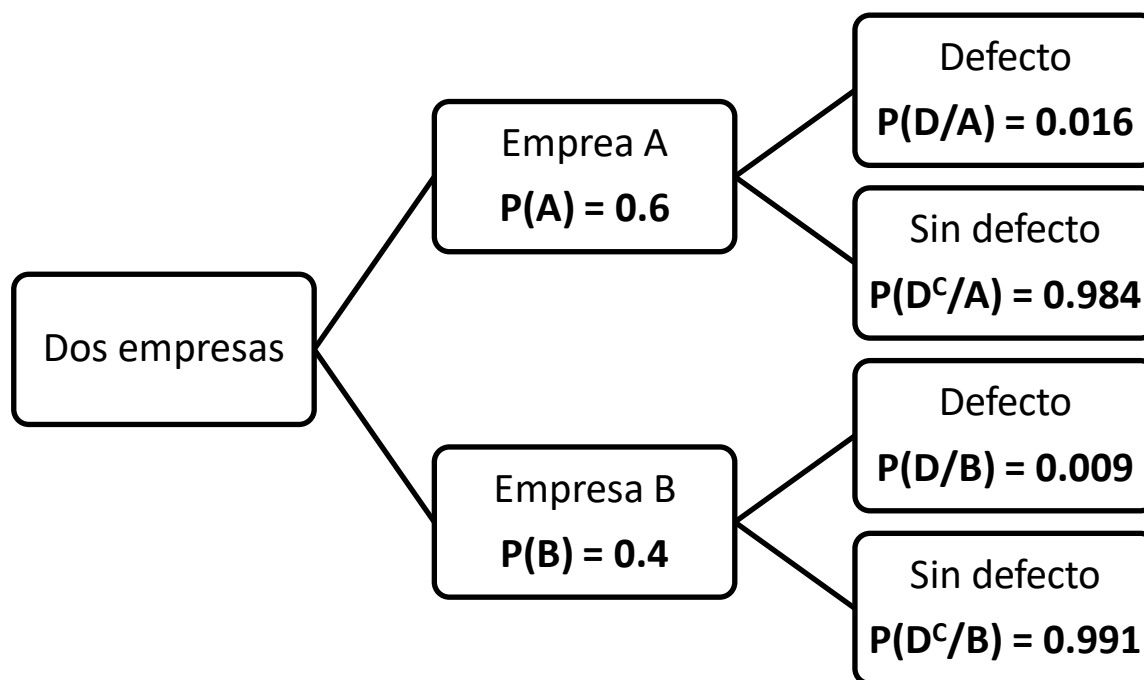
El punto simétrico de A respecto del plano π es $A'(-2, -3, 2)$.

Problema 7. Una imprenta compra la tinta a dos empresas distintas. En la empresa A compra el 60% de sus pedidos, y el resto a la empresa B. Se observa que el 1.6% de las cajas de tinta de la empresa A llegan con defecto, mientras que de la empresa B sólo el 0.9% son defectuosas. Se toma una caja al azar:

- (a) (1.25 punto) Calcula la probabilidad de que la caja sea defectuosa.
 (b) (1.25 puntos) Si la caja seleccionada no es defectuosa, calcule la probabilidad de que se haya comprado a la empresa A.

Llamamos A = “la tinta procede de la empresa A”, B = “la tinta procede de la empresa B”, D = “Las cajas de tinta llegan con defecto”,

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) = 0.6 \cdot 0.016 + 0.4 \cdot 0.009 = \boxed{0.0132}$$

- b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D^c) = \frac{P(A \cap D^c)}{P(D^c)} = \frac{P(A)P(D^c/A)}{1 - P(D)} = \frac{0.6 \cdot 0.984}{1 - 0.0132} = \frac{1476}{2467} \approx 0.5983$$

Problema 8. Las calificaciones de la asignatura Análisis Matemático I de la Facultad de Matemáticas siguen una distribución $N(5, 2)$.

- (a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que un estudiante haya obtenido una nota mayor o igual que 7.5.
- (b) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que un estudiante haya obtenido una nota entre 3 y 5.
- (c) **(1 punto)** Se modifica sistema de enseñanza de forma que la desviación típica ahora es 1.5 y la probabilidad de obtener una nota menor o igual que 6, sea 0.52. ¿Cuál sería la nueva media? ¿Ha funcionado el sistema aplicado?

*Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(1.25) = 0.8944$, $F(0.05) = 0.52$, $F(0.52) = 0.6985$, $F(0.8944) = 0.8133$, $F(1) = 0.8413$.

Sea $X =$ Las calificaciones de la asignatura Análisis Matemático I
 $X = N(5, 2)$.

- (a) Nos piden $P(X \geq 7.5)$.

$$P(X \geq 7.5) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{7.5 - 5}{2}\right) = P(Z \geq 1.25) = 1 - P(Z \leq 1.25) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en los datos} \\ F(1.25) = 0.8944 \end{array} \right\} = 1 - 0.8944 = \boxed{0.1056}$$

- (b)

$$P(3 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 3) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \leq \frac{5-5}{2}\right) - P\left(Z \leq \frac{3-5}{2}\right) =$$

$$= P(Z \leq 0) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 0) - P(Z \geq 1) = P(Z \leq 0) - [1 - P(Z \leq 1)] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en los datos} \\ F(0) = 0.5 \\ F(1) = 0.8413 \end{array} \right\} = 0.5 - 1 + 0.8413 = \boxed{0.3413}$$

- c) Tenemos $X = N(\mu, 1.5)$. Sabemos que $P(X \leq 6) = 0.52$.

$$P(X \leq 6) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \leq \frac{6 - \mu}{1.5}\right) = 0.52 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en los datos} \\ F(0.05) = 0.52 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{6 - \mu}{1.5} = 0.05 \Rightarrow 6 - \mu = 0.075 \Rightarrow 6 - 0.075 = \mu \Rightarrow \boxed{\mu = 5.925}$$

La nueva media es de 5.925.

El nuevo sistema ha funcionado pues ha subido la nota media (de 5 a 5.925) y la dispersión de los datos ha disminuido (2 a 1.5).