Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2023

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 1

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Calcule los coeficientes *a, b, c* y *d* de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ si sabemos que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de inflexión (1, 0) es $y = -3x + 3$ y que la función tiene un extremo relativo en el punto de la gráfica de abscisa *x = 0*. [2,5 puntos]

2. Considere las dos matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule las matrices $A \cdot B$ y $B \cdot A$. [1,5 puntos]

b) Sean C y D dos matrices cuadradas del mismo orden que satisfacen $C \cdot D = C$ y $D \cdot C = D$. Compruebe que las dos matrices son idempotentes. [1 punto]

NOTA: Una matriz cuadrada se denomina *idempotente* si coincide con su cuadrado.

3. Sea $f'(x) = \begin{cases} x-1, & si \quad x \le 2 \\ \dfrac{1}{x-1}, & si \quad x > 2 \end{cases}$ la derivada de una función derivable *f(x)* que pasa por el punto A = (0, 3).

a) Calcule la función *f(x)*. [1,5 puntos]

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la función *f ´(x)* en el punto de abscisa *x = 3*. [1 punto]

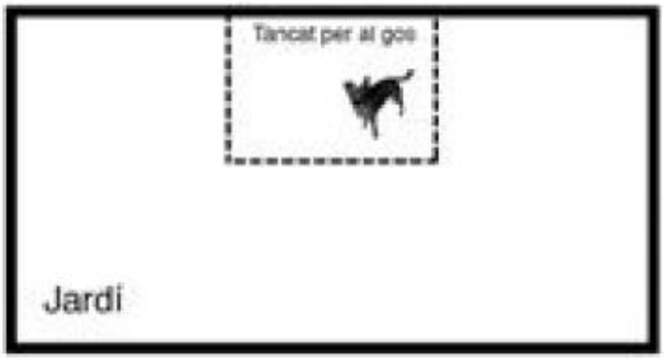
4. Sea el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real λ:

$$\begin{cases} x+2\lambda y+(2+\lambda)z=0 \\ (2+\lambda)x+y+2\lambda z=3 \\ 2\lambda x+(2+\lambda)y+z=-3 \end{cases}$$

a) Discute el sistema para los diferentes valores del parámetro λ. [1,25 puntos]

b) Para el caso $\lambda=-1$, resuelve el sistema, interprétalo geométricamente e identifica su solución. [1,25 puntos]

5. Nuria tiene un jardín rectangular y quiere hacer un cercado (rectangular o cuadrado) de 8 m^2 para su perro. Ha pensado en poner el cercado junto al muro del jardín, tal y como se muestra en la figura de la derecha, para ahorrarse así uno de los cuatro lados. El precio de la valla que desea utilizar es de 2,5 €/m.



a) ¿Qué dimensiones debe tener el cercado para que el coste sea mínimo? ¿Cuál es ese coste mínimo? [1,75 puntos]

b) Si mantiene la forma rectangular o cuadrada del cercado y hace que uno de los vértices del jardín coincida con un vértice del cercado, ¿cuántos euros se puede ahorrar? Razone cómo pondría el cercado y justifique con cálculos matemáticos las dimensiones de su propuesta. [0,75 puntos]

6. Sean los planos π_1 y π_2, determinados por las ecuaciones $\pi_1: x+y=3$ y $\pi_2: x-z=-2$.

a) Encuentre la ecuación general ($Ax+By+Cz+D=0$) del plano π_3 que es perpendicular a π_1 y π_2, y que pasa por el punto P = (4, 1, 2). [0,75 puntos]

b) Sea *r* la recta de intersección de π_1 y π_2. Calcule la ecuación vectorial de la recta *r*. [0,75 puntos]

c) Calcule el punto Q de la recta *r* que está más cerca del punto P. [1 punto]

SOLUCIONES

1. Calcule los coeficientes *a*, *b*, *c* y *d* de la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ si sabemos que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de inflexión (1, 0) es $y=-3x+3$ y que la función tiene un extremo relativo en el punto de la gráfica de abscisa *x = 0*. [2,5 puntos]

La función tiene un extremo relativo en el punto de la gráfica de abscisa *x = 0* → *f ´(0) = 0.*

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3ax^2+2bx+c \\ f'(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=3a\cdot 0^2+2b\cdot 0+c \Rightarrow \boxed{c=0}$$

La función queda $f(x)=ax^3+bx^2+d$.

La función pasa por el punto (1, 0) → *f(1) = 0.*

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax^3+bx^2+d \\ f(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+d \Rightarrow \boxed{a+b+d=0}$$

La función tiene un punto de inflexión en *x = 1* → *f ´´ (1) = 0.*

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3ax^2+2bx+c \Rightarrow f''(x)=6ax+2b \\ f''(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=6a\cdot 1+2b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6a+2b=0 \Rightarrow 3a+b=0 \Rightarrow \boxed{b=-3a}$$

Si sustituimos este valor en la primera ecuación obtenida.

$$\left.\begin{array}{l} a+b+d=0 \\ b=-3a \end{array}\right\} \Rightarrow a-3a+d=0 \Rightarrow \boxed{d=2a}$$

La función queda $f(x)=ax^3-3ax^2+2a$.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=ax^3-3ax^2+2a$ en el punto $(1,0)$ es $y-f(1)=f'(1)(x-1)$.

$$f(x)=ax^3-3ax^2+2a \Rightarrow f'(x)=3ax^2-6ax \Rightarrow f'(1)=3a-6a=-3a$$

$$\left.\begin{array}{l} y-f(1)=f'(1)(x-1) \\ f(1)=0 \\ f'(1)=-3a \end{array}\right\} \Rightarrow y-0=-3a(x-1) \Rightarrow \boxed{y=-3ax+3a}$$

Como la tangente es $y=-3x+3$ tenemos que *–3a = –3* y que *3a = 3* por lo que *a = 1.*

Los valores buscados son *a = 1, b = –3, c = 0* y *d = 2.*

2. Considere las dos matrices siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule las matrices $A\cdot B$ y $B\cdot A$. [1,5 puntos]

b) Sean C y D dos matrices cuadradas del mismo orden que satisfacen $C\cdot D=C$ y $D\cdot C=D$. Compruebe que las dos matrices son idempotentes.

[1 punto]

NOTA: Una matriz cuadrada se denomina *idempotente* si coincide con su cuadrado.

a)

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4+3-5 & 4+3-10 & 0+0-5 \\ -2-4+5 & -2-4+10 & 0+0+5 \\ 2+3-4 & 2+3-8 & 0+0-4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}=A}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4-2+0 & -6+8+0 & -10+10+0 \\ -2+1+0 & 3-4+0 & 5-5+0 \\ 2-2+1 & -3+8-3 & -5+10-4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{B\cdot A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=B}$$

b)

$$C^2=C\cdot C=\left\{C\cdot D=C\right\}=(C\cdot D)\cdot C=C\cdot D\cdot C=C\cdot(D\cdot C)=\left\{D\cdot C=D\right\}=C\cdot D=\left\{C\cdot D=C\right\}=C$$

$$D^2=D\cdot D=\left\{D\cdot C=D\right\}=(D\cdot C)\cdot D=D\cdot C\cdot D=D\cdot(C\cdot D)=\left\{C\cdot D=C\right\}=D\cdot C=\left\{D\cdot C=D\right\}=D$$

3. Sea $f'(x)=\begin{cases} x-1, & si \quad x\leq 2 \\ \dfrac{1}{x-1}, & si \quad x>2 \end{cases}$ la derivada de una función derivable *f(x)* que pasa por el punto A = (0, 3).

a) Calcule la función *f(x)*. [1,5 puntos]

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la función *f ´(x)* en el punto de abscisa *x* = *3*. [1 punto]

a) Obtenemos la función integrando la función derivada.

$$x\leq 2 \to f(x)=\int f'(x)dx=\int x-1dx=\frac{x^2}{2}-x+A$$

$$x>2 \to f(x)=\int f'(x)dx=\int \frac{1}{x-1}dx=\ln|x-1|+B$$

La función queda $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}-x+A, & si \quad x\leq 2 \\ \ln|x-1|+B, & si \quad x>2 \end{cases}$

Como la función pasa por el punto A(0, 3) → *f(0)* = *3*.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\dfrac{x^2}{2}-x+A \\ f(0)=3 \end{array}\right\} \Rightarrow 3=\frac{0^2}{2}-0+A \Rightarrow A=3$$

La función queda $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}-x+3, & si \quad x\leq 2 \\ \ln|x-1|+B, & si \quad x>2 \end{cases}$

La función es derivable y por tanto debe ser continua en *x* = *2* → $f(2)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)$

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=\dfrac{4}{2}-2+3=3 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2}{2}-x+3=3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} \ln|x-1|+B=\ln|2-1|+B=B \\ f(2)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow B=3$$

La expresión de la función es $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}-x+3, & si \quad x\leq 2 \\ \ln|x-1|+3, & si \quad x>2 \end{cases}$.

b) En el punto de abscisa *x* = *3* la función derivada es $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}$.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f\,'(x)=\dfrac{1}{x-1}$ en el punto de abscisa *x = 3* es $y-f\,'(3)=f\,''(3)(x-3)$.

$$f\,'(x)=\frac{1}{x-1}\Rightarrow f\,'(3)=\frac{1}{3-1}=\frac{1}{2}$$

$$f\,'(x)=\frac{1}{x-1}\Rightarrow f\,''(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}\Rightarrow f\,''(3)=\frac{-1}{(3-1)^2}=-\frac{1}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(3)=\dfrac{1}{2} \\ f\,''(3)=-\dfrac{1}{4} \\ y-f\,'(3)=f\,''(3)(x-3) \end{array}\right\}\Rightarrow y-\frac{1}{2}=\frac{-1}{4}(x-3)\Rightarrow y=\frac{-1}{4}x+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\Rightarrow \boxed{y=\frac{-1}{4}x+\frac{5}{4}}$$

4. Sea el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real λ:

$$\begin{cases} x+2\lambda y+(2+\lambda)z=0 \\ (2+\lambda)x+y+2\lambda z=3 \\ 2\lambda x+(2+\lambda)y+z=-3 \end{cases}$$

a) Discute el sistema para los diferentes valores del parámetro λ. [1,25 puntos]

b) Para el caso $\lambda=-1$, resuelve el sistema, interprétalo geométricamente e identifica su solución. [1,25 puntos]

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda \\ 2\lambda & 2+\lambda & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 2\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda & 3 \\ 2\lambda & 2+\lambda & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda \\ 2\lambda & 2+\lambda & 1 \end{vmatrix}=1+8\lambda^3+(2+\lambda)^3-2\lambda(2+\lambda)-2\lambda(2+\lambda)-2\lambda(2+\lambda)=$$

$$=1+8\lambda^3+(2+\lambda)^3-6\lambda(2+\lambda)=1+8\lambda^3+8+\lambda^3+3\cdot 4\lambda+3\cdot 2\lambda^2-12\lambda-6\lambda^2=$$

$$=1+8\lambda^3+8+\lambda^3+\cancel{12\lambda}+\cancel{6\lambda^2}-\cancel{12\lambda}-\cancel{6\lambda^2}=9\lambda^3+9$$

$$|A|=0 \Rightarrow 9\lambda^3+9=0 \Rightarrow \lambda^3+1=0 \Rightarrow \lambda^3=-1 \Rightarrow \boxed{\lambda=\sqrt[3]{-1}=-1}$$

Se nos plantean dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $\lambda \neq -1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. Si $\lambda=-1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Convertimos el sistema en otro equivalente más sencillo de estudiar.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 3 & -3 & 3 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + 2\cdot \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} -2 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ \hline 0 & -3 & 3 & -3 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\overbrace{\begin{array}{cccc} \underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}}_{A} & \begin{array}{c} 0 \\ 3 \\ 0 \end{array} \end{array}}^{A/B}\right)$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el rango de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

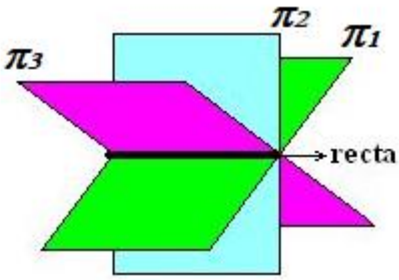
b) Para el caso $\lambda = -1$ el sistema tiene infinitas soluciones. Lo resolvemos utilizando el sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-2y+z=0 \\ 3y-3z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-2y+z=0 \\ y-z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x-2y+z=0 \\ \boxed{y=1+z} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

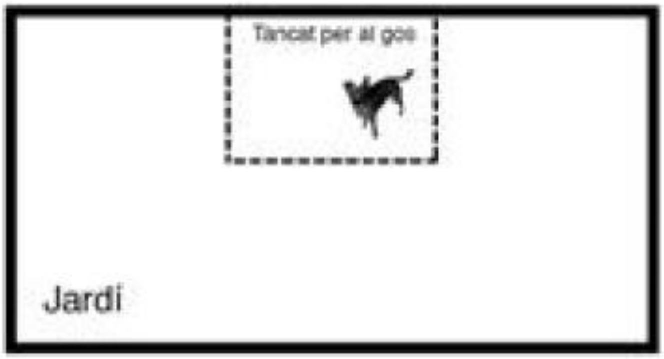
$$\Rightarrow x-2(1+z)+z=0 \Rightarrow x-2-2z+z=0 \Rightarrow \boxed{x=2+z} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=1+\lambda\,, \ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}}$$

Las soluciones del sistema son los infinitos puntos de la recta donde coinciden los tres planos del sistema (cada una de las ecuaciones).

$$\begin{cases} \pi_1: x-2y+z=0 \\ \pi_2: x+y-2z=3 \\ \pi_3: -2x+y+z=-3 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=1+\lambda\,, \ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$$



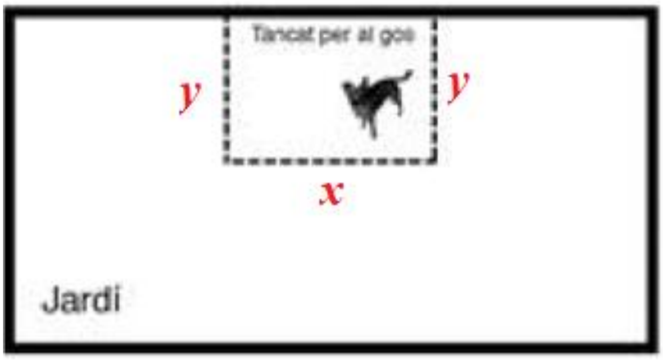
5. Nuria tiene un jardín rectangular y quiere hacer un cercado (rectangular o cuadrado) de 8 m^2 para su perro. Ha pensado en poner el cercado junto al muro del jardín, tal y como se muestra en la figura de la derecha, para ahorrarse así uno de los cuatro lados. El precio de la valla que desea utilizar es de 2,5 €/m.



a) ¿Qué dimensiones debe tener el cercado para que el coste sea mínimo? ¿Cuál es ese coste mínimo? [1,75 puntos]

b) Si mantiene la forma rectangular o cuadrada del cercado y hace que uno de los vértices del jardín coincida con un vértice del cercado, ¿cuántos euros se puede ahorrar? Razone cómo pondría el cercado y justifique con cálculos matemáticos las dimensiones de su propuesta. [0,75 puntos]

a) Llamamos x e y a los dos lados del rectángulo del cercado.



Sabemos que el área del cercado es 8 m^2.

$$xy = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{x}$$

Queremos minimizar el perímetro. Obtenemos su expresión en función de x.

$$\left.\begin{array}{l} P(x,y) = x + 2y \\ y = \dfrac{8}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow P(x) = x + 2\frac{8}{x} = x + \frac{16}{x}$$

Hallamos los puntos críticos de esta función.

$$\left.\begin{array}{r} P(x) = x + \dfrac{16}{x} \Rightarrow P'(x) = 1 - \dfrac{16}{x^2} \\ P'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 - \frac{16}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{16}{x^2} \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow \boxed{x = \pm 4}$$

Solo es posible el valor positivo $x = 4$. Sustituimos este valor en la derivada segunda.

$$P'(x) = 1 - \frac{16}{x^2} = 1 - 16x^{-2} \Rightarrow P''(x) = 32x^{-3} = \frac{32}{x^3} \Rightarrow P''(4) = \frac{32}{4^3} > 0 \rightarrow x = 4 \text{ es mínimo}$$

Para $x = 4$ el perímetro del cercado es mínimo.

Las dimensiones del cercado con perímetro mínimo son $x = 4$ e $y = \frac{8}{4} = 2$

El coste de este cercado es de $2.5(4+2+2)=20$ € .

c) En esta nueva situación nos ahorramos dos lados del cercado.

Sabemos que el área del cercado es 8 m^2.

$$xy=8 \Rightarrow y=\frac{8}{x}$$

Queremos minimizar el perímetro. Obtenemos su expresión en función de *x*.

$$\left.\begin{array}{l} P(x,y)=x+y \\ y=\frac{8}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow P(x)=x+\frac{8}{x}=x+\frac{8}{x}$$

Hallamos los puntos críticos de esta función.

$$\left.\begin{array}{r} P(x)=x+\frac{8}{x} \Rightarrow P'(x)=1-\frac{8}{x^2} \\ P'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1-\frac{8}{x^2}=0 \Rightarrow 1=\frac{8}{x^2} \Rightarrow x^2=8 \Rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{8}}$$

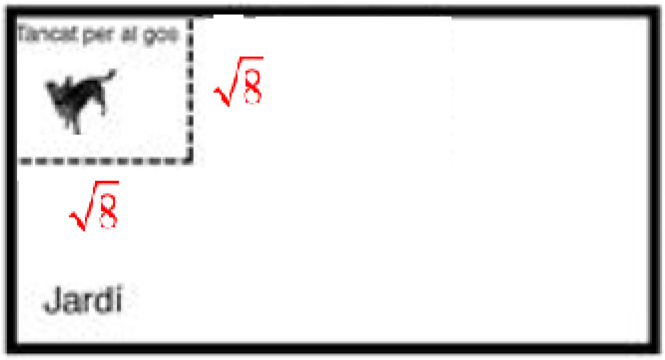
Solo es posible el valor positivo $x=\sqrt{8}$. Sustituimos este valor en la derivada segunda.

$$P'(x)=1-\frac{8}{x^2}=1-8x^{-2} \Rightarrow P''(x)=16x^{-3}=\frac{16}{x^3} \Rightarrow P''(\sqrt{8})=\frac{16}{(\sqrt{8})^3}>0 \to x=\sqrt{8} \text{ es mínimo}$$

Para $x=\sqrt{8}$ el perímetro del cercado es mínimo.

Las dimensiones del cercado con perímetro mínimo son $x=\sqrt{8}$ e $y=\frac{8}{\sqrt{8}}=\sqrt{8}$.

Un cuadrado de lado $\sqrt{8}\simeq 2.83$ *metros* .



El coste de este nuevo cercado es de $2.5\left(2\sqrt{8}\right) \simeq 14.14\,€$.

Nos ahorramos 20 – 14.14 = 5.86 €

6. Sean los planos π_1 y π_2, determinados por las ecuaciones $\pi_1 : x+y=3$ y $\pi_2 : x-z=-2$.

a) Encuentre la ecuación general ($Ax+By+Cz+D=0$) del plano π_3 que es perpendicular a π_1 y π_2, y que pasa por el punto P = (4, 1, 2). [0,75 puntos]

b) Sea *r* la recta de intersección de π_1 y π_2. Calcule la ecuación vectorial de la recta *r*. [0,75 puntos]

c) Calcule el punto Q de la recta *r* que está más cerca del punto P. [1 punto]

a) El plano π_3 que es perpendicular a π_1 y π_2 tiene como vectores directores los vectores normales de los planos π_1 y π_2.

$$\pi_1 : x+y=3 \Rightarrow \overrightarrow{n_1}=(1,1,0)$$

$$\pi_2 : x-z=-2 \Rightarrow \overrightarrow{n_2}=(1,0,-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}=\overrightarrow{n_1}=(1,1,0) \\ \vec{v}=\overrightarrow{n_2}=(1,0,-1) \\ P(4,1,2)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi_3 : \begin{vmatrix} x-4 & y-1 & z-2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

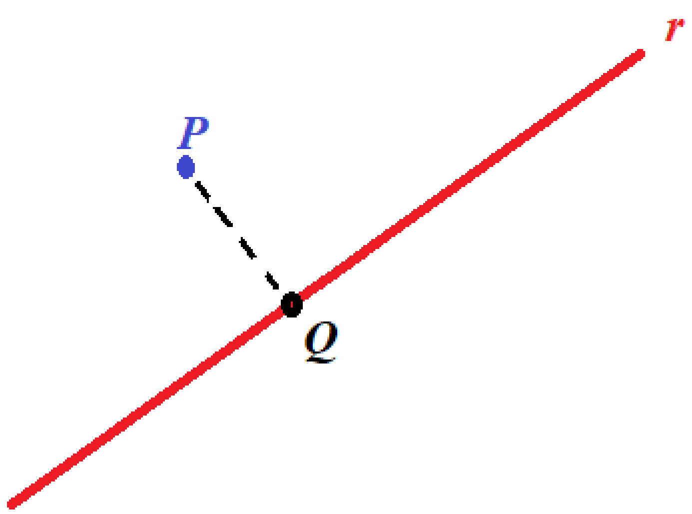
$$\Rightarrow -x+4+0+0-z+2+y-1=0 \Rightarrow \boxed{\pi_3 : -x+y-z+5=0}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 : x+y=3 \\ \pi_2 : x-z=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=3 \\ \boxed{x=-2+z} \end{array}\right\} \Rightarrow -2+z+y=3 \Rightarrow \boxed{y=5-z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r : \begin{cases} x=-2+\lambda \\ y=5-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \boxed{r:\ (x,y,z)=(-2,5,0)+\lambda(1,-1,1)\ \ \lambda\in\mathbb{R}}$$

c) El punto Q de la recta *r* que está más cerca del punto P es la proyección ortogonal del punto P sobre la recta *r*.



Hallamos el plano perpendicular a la recta *r* que pasa por el punto P y el punto Q buscado es la intersección de recta y plano.
El plano perpendicular a la recta *r* que pasa por el punto P tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$r: \ (x,y,z)=(-2,5,0)+\lambda(1,-1,1) \Rightarrow \overrightarrow{v_r}=(1,-1,1)$$

$$\pi:\begin{cases}\vec{n}=\overrightarrow{v_r}=(1,-1,1)\\ P(4,1,2)\in\pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\pi: x-y+z+D=0\\ P(4,1,2)\in\pi\end{cases} \Rightarrow 4-1+2+D=0 \Rightarrow D=-5 \Rightarrow \pi: x-y+z-5=0$$

Hallamos el punto Q intersección de plano y recta.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: x-y+z-5=0\\ r:\begin{cases}x=-2+\lambda\\ y=5-\lambda\\ z=\lambda\end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow -2+\lambda-5+\lambda+\lambda-5=0 \Rightarrow 3\lambda=12 \Rightarrow \lambda=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=-2+4=2\\ y=5-4=1\\ z=4\end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(2,1,4)}$$