UNIVERSIDAD DE MURCIA · Región de Murcia · Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

--207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES--

EBAU2023 - **JUNIO**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Debes responder a un máximo de 4 preguntas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras que haya respondido el estudiante. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro **a**:

$$\left.\begin{array}{l} ax+y+z=1 \\ 2x+y+z=1 \\ x+ay+z=2 \end{array}\right\} \text{(2 puntos)}$$

Resolverlo para a = 0. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Una empresa fabrica relojes smartwatch de dos tamaños de pantalla distintos: el tipo A, de 44 milímetros y el tipo B de 40 milímetros. Su producción semanal debe ser al menos de 10 relojes en total y el número de smartwatch que fabrica la empresa tipo B de 40 mm no puede superar en más de 10 unidades a los de tipo A. Los costes de producción de cada tipo de smartwatch son de 150 € para el tipo A y de 100 € los del B, disponiendo la empresa de un máximo de 6000 € a la semana para el coste total de producción. Además, se conoce que los relojes smartwatch tipo A generan un beneficio de 130 € y los de tipo B de 140 €.

a) Si la empresa quiere maximizar el beneficio, formule el problema que debe resolver y represente la región factible, calculando sus vértices. (1,5 puntos)
b) ¿Cuántos smartwatch de cada tipo habrá que producir a la semana para que el beneficio total de la empresa sea máximo?, ¿Cuál es este beneficio máximo? (1 punto)

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) La función de coste de una empresa es $C(q)=q^3+3q+10$ donde q representa las unidades producidas. Sabiendo que el precio de venta, en euros, de cada unidad producida es *p = 30*, se desea conocer:

a) La función beneficio de esta empresa. (0,5 puntos).
b) El número de unidades producidas que maximiza el beneficio de la empresa. Razone su resultado. (1,5 puntos)
c) El beneficio máximo que puede lograr la empresa. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Sea la función definida a trozos $f(x)=\begin{cases} 2+\sqrt{x} & si \;\; 0<x\le 1 \\ \dfrac{8x-2}{2x} & si \;\; x>1 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad de la función en todo su dominio. (0,5 puntos)
b) Estudiar el crecimiento o decrecimiento de la función en su dominio. (1 punto)
c) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=2$. (1 punto)

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{2x^2}{9-x^2}$, calcule:

a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes. (0,5 puntos)
b) Asíntotas verticales y horizontales. (0,5 puntos)
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
d) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas $f(x)=x^2-2x+2$ y $g(x)=-x^2+6$. Calcular su área.

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$:

a) Calcular $\int f(x)\,dx$. (1 punto)
b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función *f(x)*, el eje de abscisa y las rectas $x=1$ y $x=e$ (1,5 puntos)

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) La Dirección General de Tráfico ha realizado un estudio estadístico en la Región de Murcia sobre el uso del casco de protección por parte de los usuarios de patinetes eléctricos. El estudio estima que el 60 % de los usuarios de estos patinetes son hombres y, de estos, el 30 % usa el casco; mientras que, entre las mujeres que usan este medio para desplazarse, son el 40 % las que usan casco de protección. Si elegimos un usuario de patinete eléctrico al azar.
   i. Calcule la probabilidad de que use casco de protección. (0,5 puntos)
   ii. Sabiendo que el usuario de patinete eléctrico usa casco de protección, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (1 punto)

b) El gasto medio por cliente, en euros, en la lotería de las pasadas Navidades se distribuye según una variable Normal de media desconocida y desviación típica igual de 10 euros. Se elige una muestra aleatoria de 225 clientes, resultando que han tenido un gasto medio de 65 euros. Calcule un intervalo de confianza para el gasto medio de la lotería de Navidad de 2022 con un nivel de confianza del 97% (1 punto)

SOLUCIONES

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro **a**:

$$\left.\begin{array}{l} ax+y+z=1 \\ 2x+y+z=1 \\ x+ay+z=2 \end{array}\right\} \text{(2 puntos)}$$

Resolverlo para a = 0. (0,5 puntos)

La matriz de coeficientes A asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

El determinante de A es $|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}=a+1+2a-1-2-a^2=-a^2+3a-2$.

Veamos cuando se anula.

$$|A|=0 \Rightarrow -a^2+3a-2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(-1)(-2)}}{-2}=\frac{-3\pm 1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=\frac{-3+1}{-2}=1} \\ o \\ \boxed{a=\frac{-3-1}{-2}=2} \end{cases}$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq 1 \quad y \quad a \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $a=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos su rango y la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{llll} Fila\,2^{a}-2\cdot Fila\,1^{a} & & & \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ \hline 0 & -1 & -1 & -1 \to \text{Nueva Fila } 2^{a} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} Fila\,3^{a}-Fila\,1^{a} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}}^{A/B} \\ \begin{matrix} 0 & -1 & -1 & -1 \end{matrix} \\ \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} \quad 1 \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos.
El sistema es INCOMPATIBLE (no tiene solución)

CASO 3. $a=2$
En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos su rango usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Fila\,2^{a}-Fila\,1^{a} \\ \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 2^{a} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2\cdot Fila\,3^{a}-Fila\,1^{a} \\ \begin{array}{cccc} 2 & 4 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 3 & 1 & 3 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{Fila\,3^{a} \leftrightarrow Fila\,2^{a}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 2 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}}^{A/B} \\ \begin{matrix} 0 & 3 & 1 & 3 \end{matrix} \\ \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} \quad 0 \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 al igual que el de A/B, pero el número de incógnitas es 3.
El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (tiene infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $a \neq 1$ *y* $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución). Para $a=1$ es incompatible (sin solución). Para $a=2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

Lo resolvemos para *a* = *0*. Sabemos que es compatible determinado (CASO 1)

$$\left.\begin{array}{r} y+z=1 \\ 2x+y+z=1 \\ x \quad\quad +z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=1-z \\ 2x+y+z=1 \\ x=2-z \end{array}\right\} \Rightarrow 2(2-z)+(1-z)+z=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4-2z+1-z+z=1 \Rightarrow -2z=-4 \Rightarrow \boxed{z=\frac{-4}{-2}=2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{y=1-2=-1} \\ \boxed{x=2-2=0} \end{array}\right.$$

La solución es *x* = *0; y* = *–1;* $z=2$.

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Una empresa fabrica relojes smartwatch de dos tamaños de pantalla distintos: el tipo A, de 44 milímetros y el tipo B de 40 milímetros. Su producción semanal debe ser al menos de 10 relojes en total y el número de smartwatch que fabrica la empresa tipo B de 40 mm no puede superar en más de 10 unidades a los de tipo A. Los costes de producción de cada tipo de smartwatch son de 150 € para el tipo A y de 100 € los del B, disponiendo la empresa de un máximo de 6000 € a la semana para el coste total de producción. Además, se conoce que los relojes smartwatch tipo A generan un beneficio de 130 € y los de tipo B de 140 €.
a) Si la empresa quiere maximizar el beneficio, formule el problema que debe resolver y represente la región factible, calculando sus vértices. (1,5 puntos)
b) ¿Cuántos smartwatch de cada tipo habrá que producir a la semana para que el beneficio total de la empresa sea máximo?, ¿Cuál es este beneficio máximo? (1 punto)

a) Es un problema de programación lineal.
Llamamos x = número de smartwatch del tipo A, y = número de smartwatch del tipo B.

Hacemos una tabla para aclarar los datos.

	Costes de producción	Beneficios
Nº smartwatch del tipo A (x)	150x	130x
Nº smartwatch del tipo B (y)	100y	140y
TOTALES	$150x+100y$	$130x+140y$

Deseamos maximizar el beneficio $B(x,y)=130x+140y$.

Las restricciones nos dan las siguientes inecuaciones.

"*Su producción semanal debe ser al menos de 10 relojes en total*" → $x+y\geq 10$

"*El número de smartwatch que fabrica la empresa tipo B de 40 mm no puede superar en más de 10 unidades a los de tipo A*" → $y\leq 10+x$

"*La empresa dispone de un máximo de 6000 € a la semana para el coste total de producción*" → $150x+100y\leq 6000$

"*El número de smartwatch debe ser positivo o cero*" → $x\geq 0; y\geq 0$

La región factible es la zona del plano que cumple el sistema de inecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\geq 10 \\ y\leq 10+x \\ 150x+100y\leq 6000 \\ x\geq 0; y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y\geq 10-x \\ y\leq 10+x \\ 3x+2y\leq 120 \\ x\geq 0; y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$y = 10 - x$

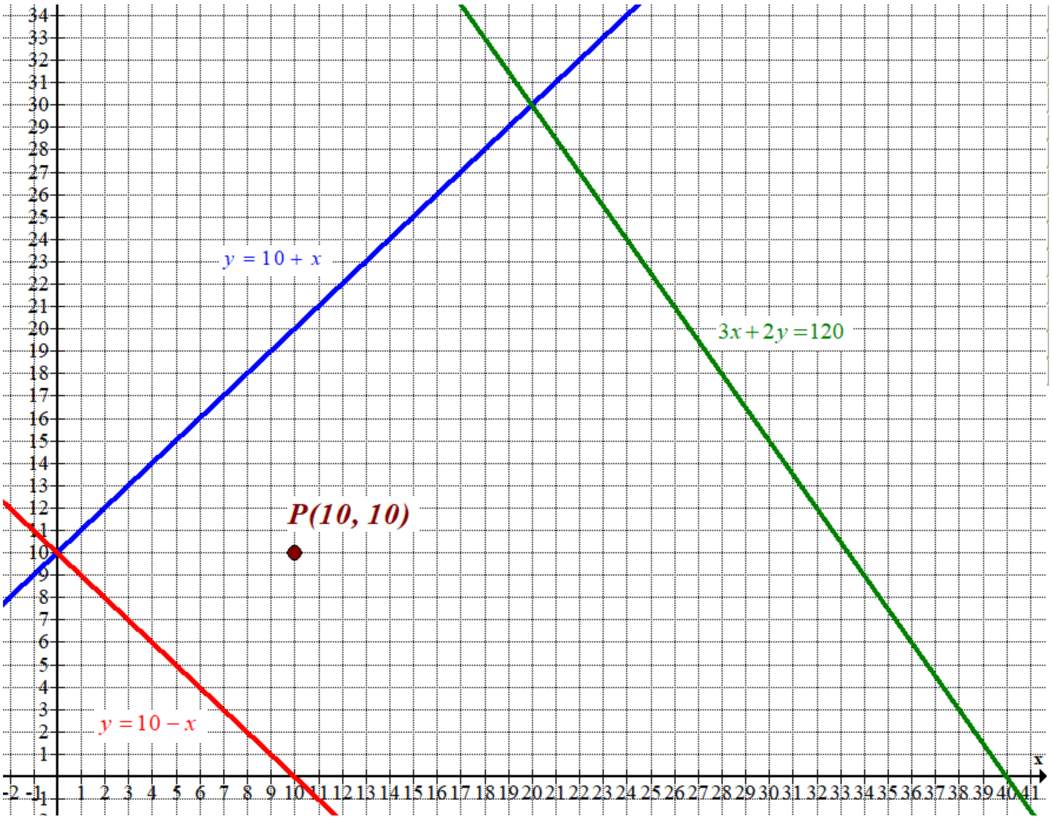
x	$y = 10 - x$
0	10
10	0

$y = 10 + x$

x	$y = 10 + x$
0	10
10	20
20	30

$3x + 2y = 120$

x	$y = \dfrac{120 - 3x}{2}$
0	60
20	30
40	0



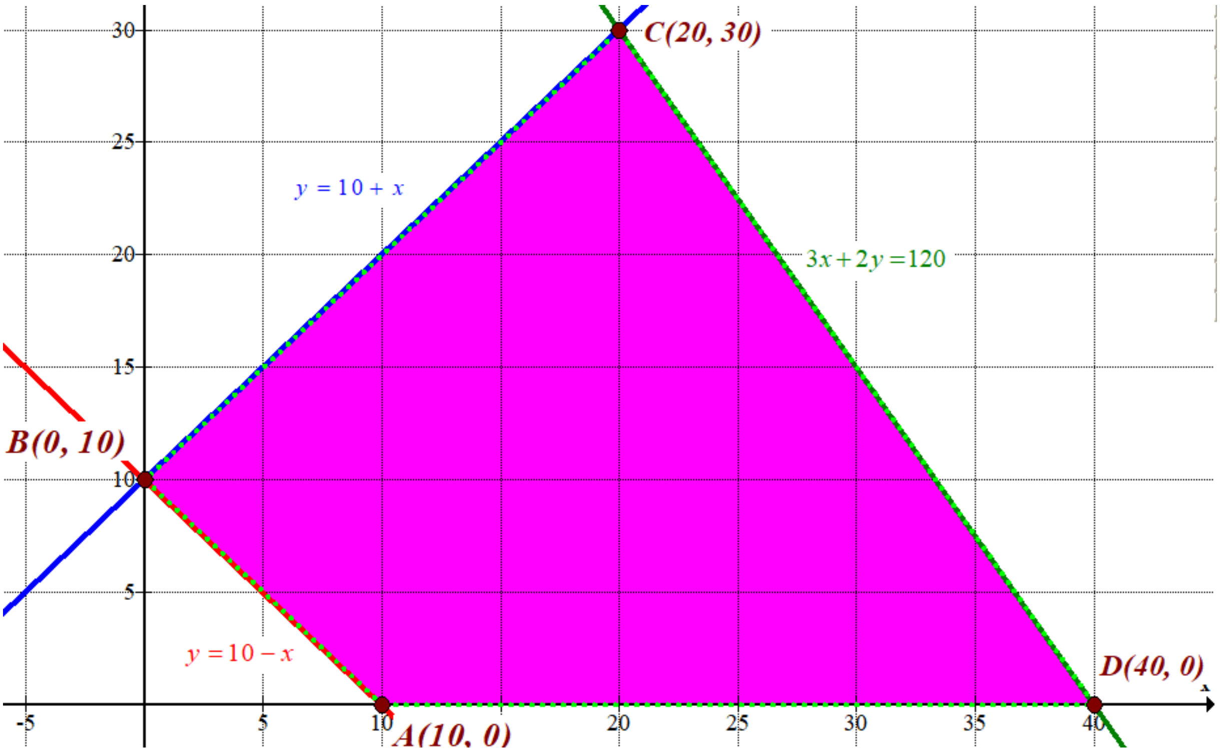
Como las restricciones son: $\left.\begin{array}{l} y \geq 10 - x \\ y \leq 10 + x \\ 3x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$

Entonces es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas **azul y verde** y por encima de la roja.

Comprobamos que el punto P(10, 10) perteneciente a dicha región del plano cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 10 \geq 10 - 10 \\ 10 \leq 10 + 10 \\ 30 + 20 \leq 120 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array}\right\} \text{Se cumplen todas y la región factible es correcta.}$$

Coloreo de rosa la región factible.



Las coordenadas de los vértices son: A(10,0), B(0,10), C(20, 30) y D(40, 0)

b) Valoramos la función beneficio $B(x,y)=130x+140y$ en cada uno de los vértices en busca del máximo valor.

A(10, 0) → $B(10,0)=130\cdot 10+140\cdot 0=1300$

B(0, 10) → $B(0,10)=130\cdot 0+140\cdot 10=1400$

$C(20,30)$ → $B(20,30)=130\cdot 20+140\cdot 30=6800$ ¡Máximo!

D(40, 0) → $B(40,0)=130\cdot 40+140\cdot 0=5200$

El máximo beneficio se obtiene en el punto C(20, 30). Significa fabricar 20 smartwatch del tipo A y 30 del tipo B.

El máximo beneficio es de 6800 euros.

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) La función de coste de una empresa es $C(q) = q^3 + 3q + 10$ donde q representa las unidades producidas. Sabiendo que el precio de venta, en euros, de cada unidad producida es $p = 30$, se desea conocer:

a) La función beneficio de esta empresa. (0,5 puntos).
b) El número de unidades producidas que maximiza el beneficio de la empresa. Razone su resultado. (1,5 puntos)
c) El beneficio máximo que puede lograr la empresa. (0,5 puntos)

a) La función Beneficio es la diferencia entre los ingresos y los costes.
Como q representa las unidades producidas y su precio de venta es de 30 euros por unidad tenemos que los ingresos son $I(q) = 30q$.

$$B(q) = I(q) - C(q) = 30q - \left(q^3 + 3q + 10\right) = -q^3 + 27q - 10$$

b) Derivamos la función y la igualamos a cero en busca de los candidatos a máximos.

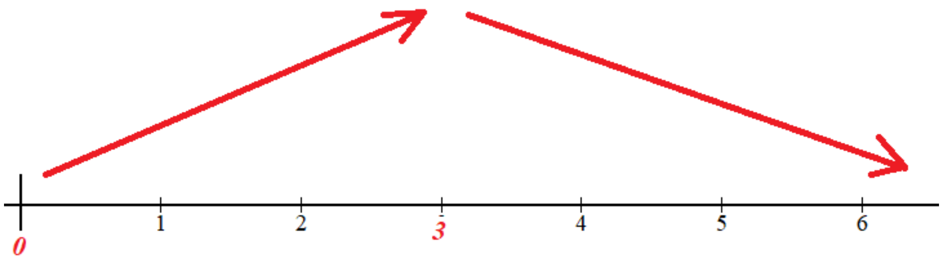
$$B(q) = -q^3 + 27q - 10 \Rightarrow B'(q) = -3q^2 + 27$$

$$B'(q) = 0 \Rightarrow -3q^2 + 27 = 0 \Rightarrow -3q^2 = -27 \Rightarrow q^2 = \frac{-27}{-3} = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = \sqrt{9} = \pm 3$$

Solo tenemos en cuenta el valor positivo, pues el número de unidades producidas no puede tomar un valor negativo.
Comprobamos la evolución de la función antes de $q = 3$ y después de $q = 3$.

En el intervalo (0, 3) tomamos $q = 1$ y su derivada vale $B'(1) = -3 \cdot 1^2 + 27 = 24 > 0$. La función beneficio crece en el intervalo (0, 3).
En el intervalo (3, +∞) tomamos $q = 4$ y su derivada vale $B'(4) = -3 \cdot 4^2 + 27 = -21 < 0$. La función beneficio decrece en el intervalo (3, +∞).



La función presenta un máximo en $q = 3$.
El beneficio es máximo produciendo 3 unidades.

c) El beneficio máximo es de $B(3) = -3^3 + 27 \cdot 3 - 10 = 44$, que significa un beneficio de 44 €.

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Sea la función definida a trozos $f(x)=\begin{cases} 2+\sqrt{x} & si\ \ 0<x\leq 1 \\ \dfrac{8x-2}{2x} & si\ \ x>1 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad de la función en todo su dominio. (0,5 puntos)
b) Estudiar el crecimiento o decrecimiento de la función en su dominio. (1 punto)
c) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=2$. (1 punto)

a) Como la función radical existe entre 0 y 1 el primer trozo es continuo. El segundo trozo (la fracción) también lo es, pues el denominador no se anula a partir de *x* = *1*.
Para que sea continua debe serlo en *x* = *1* y deben coincidir los límites laterales con el valor de la función.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 2+\sqrt{x}=2+\sqrt{1}=3 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{8x-2}{2x}=\dfrac{8-2}{2}=3 \\ f(1)=2+\sqrt{1}=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)=3$$

La función es continua en *x* = *1* y por tanto, es continua en todo su dominio $=(0,+\infty)$

b)
En $(0,1]$ la función es $f(x)=2+\sqrt{x}$.

Su derivada es $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Esta derivada siempre es positiva. La función crece en $(0,1]$.

En $(1,+\infty)$ la función es $f(x)=\dfrac{8x-2}{2x}=\dfrac{4x-1}{x}$.

Su derivada es $f'(x)=\dfrac{4x-1\cdot(4x-1)}{x^2}=\dfrac{4x-4x+1}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}$. Esta derivada siempre es positiva. La función crece en $(1,+\infty)$.

La función es creciente en todo su dominio $=(0,+\infty)$

c) La función en un entorno de *x* = *2* es $f(x)=\dfrac{4x-1}{x}$ y su derivada es $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

La fórmula de la tangente a la gráfica en *x* = *2* es $y-f(2)=f'(2)(x-2)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=\dfrac{4\cdot 2-1}{2}=\dfrac{7}{2} \\ f'(2)=\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4} \\ y-f(2)=f'(2)(x-2) \end{array}\right\} \Rightarrow y-\frac{7}{2}=\frac{1}{4}(x-2) \Rightarrow y-\frac{7}{2}=\frac{x}{4}-\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y=\frac{x}{4}+3}$$

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\frac{2x^2}{9-x^2}$, calcule:

a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes. (0,5 puntos)
b) Asíntotas verticales y horizontales. (0,5 puntos)
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
d) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

a) Comprobamos cuando se anula el denominador de la función.

$$9-x^2=0 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\sqrt{9}=\pm 3$$

El dominio es $\mathbb{R}-\{-3,3\}$.

Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\frac{2x^2}{9-x^2} \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=\frac{0}{9}=0 \Rightarrow A(0,0)$$

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\frac{2x^2}{9-x^2} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2x^2}{9-x^2}=0 \Rightarrow 2x^2=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow A(0,0)$$

El único punto de corte con los ejes es el punto A(0, 0).

b)

Asíntota vertical. $x=a$.

¿ $x=-3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -3} f(x)=\lim_{x\to -3}\frac{2x^2}{9-x^2}=\frac{2\cdot(-3)^2}{9-(-3)^2}=\frac{18}{0}=\infty$$

$x=-3$ es asíntota vertical

¿ $x=3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{2x^2}{9-x^2}=\frac{2\cdot(3)^2}{9-(3)^2}=\frac{18}{0}=\infty$$

$x=3$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{9-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}}{\frac{9}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\frac{9}{x^2}-1}=\frac{2}{\frac{1}{\infty}-1}=\frac{2}{0-1}=-2$$

$y=-2$ es asíntota horizontal.

c) Obtenemos su derivada y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$f(x)=\frac{2x^2}{9-x^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{4x\left(9-x^2\right)-(-2x)2x^2}{\left(9-x^2\right)^2}=\frac{36x-4x^3+4x^3}{\left(9-x^2\right)^2}=\frac{36x}{\left(9-x^2\right)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{36x}{\left(9-x^2\right)^2}=0 \Rightarrow 36x=0 \Rightarrow x=0$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = 0$ y los valores excluidos del dominio: $x = -3$, $x = 3$.

En el intervalo $(-\infty,-3)$ tomo $x = -4$ y la derivada vale $f'(-4)=\frac{36(-4)}{\left(9-(-4)^2\right)^2}=\frac{-144}{49}<0$.

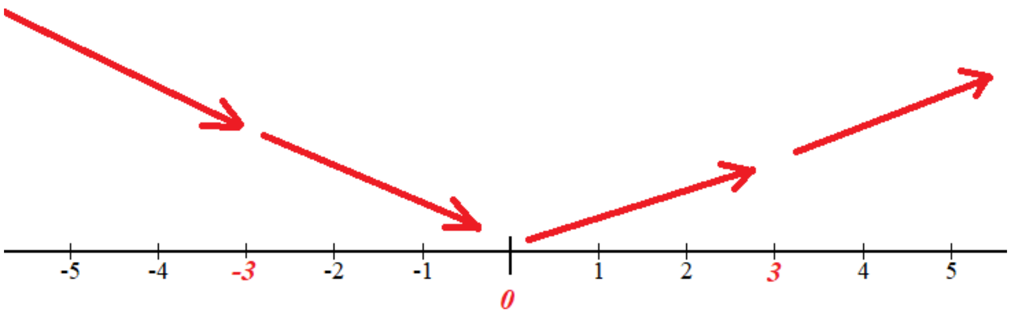
La función decrece en $(-\infty,-3)$.

En el intervalo $(-3,0)$ tomo $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2)=\frac{36(-2)}{\left(9-(-2)^2\right)^2}=\frac{-72}{25}<0$. La función decrece en $(-3,0)$.

En el intervalo $(0,3)$ tomo $x = 2$ y la derivada vale $f'(2)=\frac{36(2)}{\left(9-(2)^2\right)^2}=\frac{72}{25}>0$. La función crece en $(0,3)$.

En el intervalo $(3,+\infty)$ tomo $x = 4$ y la derivada vale $f'(4)=\frac{36(4)}{\left(9-(4)^2\right)^2}=\frac{144}{49}>0$. La función crece en $(3,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $(-\infty,-3)\cup(-3,0)$ y crece en $(0,3)\cup(3,+\infty)$

d) Atendiendo al esquema superior la función presenta un mínimo relativo en $x = 0$.

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas $f(x)=x^2-2x+2$ y $g(x)=-x^2+6$. Calcular su área.

Buscamos los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones.

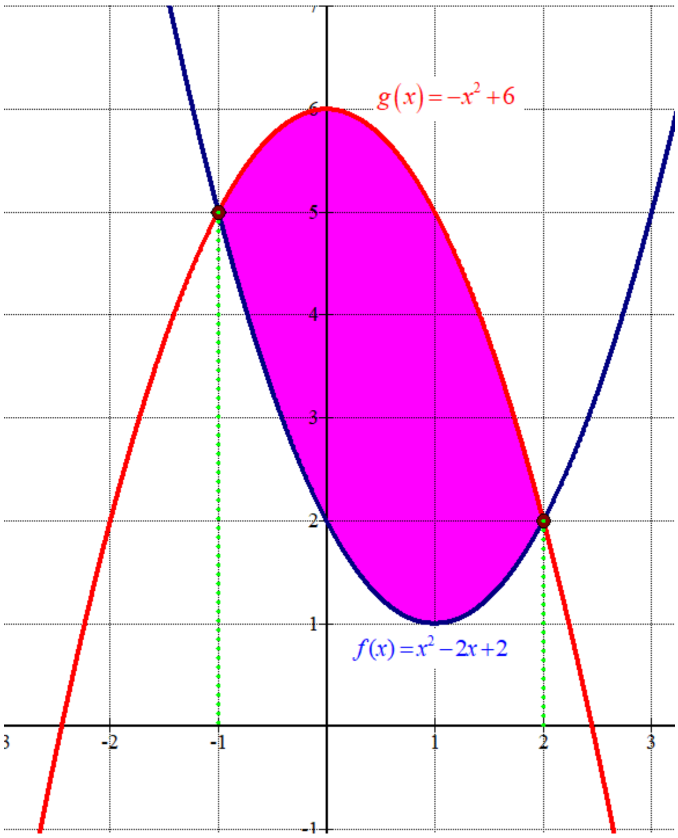
$$f(x)=g(x)\Rightarrow x^2-2x+2=-x^2+6\Rightarrow 2x^2-2x-4=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-x-2=0\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-2)}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1+3}{2}=2=x\\ o\\ \frac{1-3}{2}=-1=x\end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores para cada parábola.

x	$y=x^2-2x+2$
-1	5
0	2
1	1
2	2
-2	10
3	5

x	$y=-x^2+6$
-1	5
0	6
1	5
2	2
-2	2
3	-10



Como la función *g(x)* toma valores superiores a los de *f(x)* en el intervalo del recinto del cual queremos hallar el área, el valor del área es el valor de la integral definida entre *x = –1* y *x = 2* de la diferencia de las dos funciones.

$$g(x)-f(x)=-x^2+6-\left(x^2-2x+2\right)=-2x^2+2x+4$$

$$Área=\int_{-1}^{2}g(x)-f(x)dx=\int_{-1}^{2}-2x^2+2x+4dx=\left[-2\frac{x^3}{3}+2\frac{x^2}{2}+4x\right]_{-1}^{2}=\left[-2\frac{x^3}{3}+x^2+4x\right]_{-1}^{2}=$$

$$=\left[-2\frac{2^3}{3}+2^2+4\cdot 2\right]-\left[-2\frac{(-1)^3}{3}+(-1)^2+4(-1)\right]=-\frac{16}{3}+4+8-\frac{2}{3}-1+4=\boxed{9u^2}$$

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$:

a) Calcular $\int f(x)\,dx$. (1 punto)

b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función *f(x)*, el eje de abscisa y las rectas $x=1$ y $x=e$ (1,5 puntos)

a)

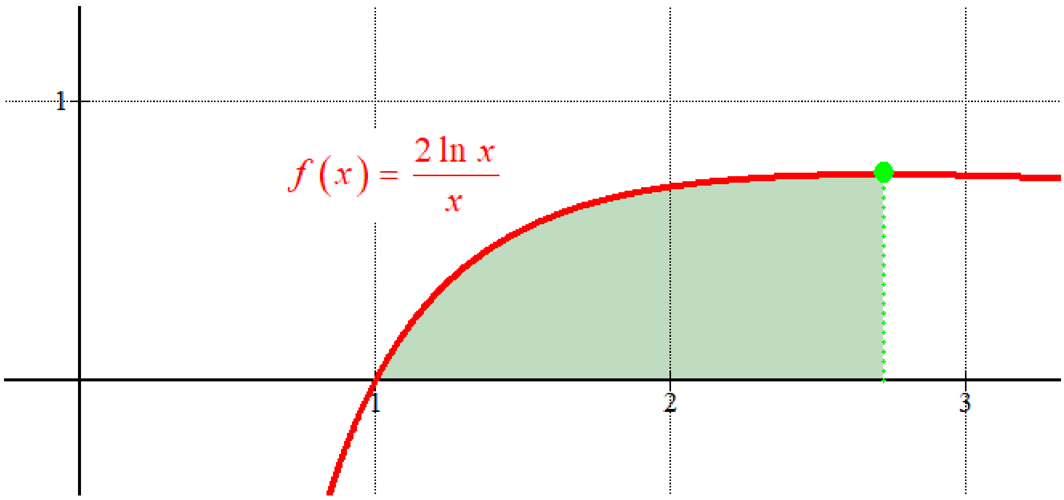
$$\int f(x)\,dx=\int \frac{2\ln x}{x}dx=\left\{\begin{array}{l}\ln x=t\\ \frac{1}{x}dx=dt\to dx=xdt\end{array}\right\}=\int \frac{2t}{\cancel{x}}\cancel{x}dt=\int 2tdt=t^2=(\ln x)^2+C$$

b) Veamos cuando corta la función el eje de abscisa.

$$\left.\begin{array}{l}f(x)=\frac{2\ln x}{x}\\ y=0\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{2\ln x}{x}=0\Rightarrow 2\ln x=0\Rightarrow \ln x=0\Rightarrow x=1$$

Como este valor está en una de las rectas que delimitan la región el área de la región es el valor absoluto de la integral definida entre *x* = *1* y *x* = *e* de $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$.

$$Área=\left|\int_1^e \frac{2\ln x}{x}dx\right|=\left|\left[(\ln(x))^2\right]_1^e\right|=(\ln(e))^2-(\ln(1))^2=1^2-0^2=\boxed{1u^2}$$

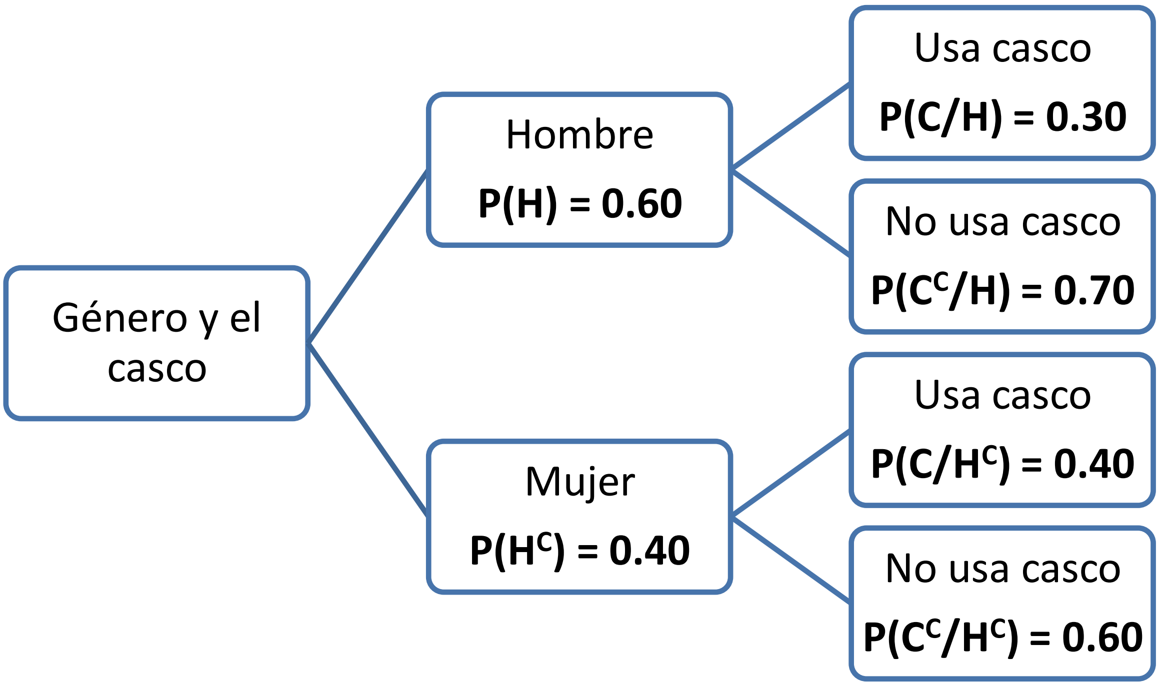


CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)
a) La Dirección General de Tráfico ha realizado un estudio estadístico en la Región de Murcia sobre el uso del casco de protección por parte de los usuarios de patinetes eléctricos. El estudio estima que el 60 % de los usuarios de estos patinetes son hombres y, de estos, el 30 % usa el casco; mientras que, entre las mujeres que usan este medio para desplazarse, son el 40 % las que usan casco de protección. Si elegimos un usuario de patinete eléctrico al azar.
i. Calcule la probabilidad de que use casco de protección. (0,5 puntos)
ii. Sabiendo que el usuario de patinete eléctrico usa casco de protección, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (1 punto)

b) El gasto medio por cliente, en euros, en la lotería de las pasadas Navidades se distribuye según una variable Normal de media desconocida y desviación típica igual de 10 euros. Se elige una muestra aleatoria de 225 clientes, resultando que han tenido un gasto medio de 65 euros. Calcule un intervalo de confianza para el gasto medio de la lotería de Navidad de 2022 con un nivel de confianza del 97% (1 punto)

a) Llamamos H al suceso "ser hombre" y C al suceso "usar casco de protección".

Realizamos un diagrama de árbol de la situación planteada.



Con los datos contenidos en el diagrama respondemos a las preguntas planteadas.

i. Nos piden $P(C)$. Usamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(C)=P(H)P(C/H)+P(H^C)P(C/H^C)=$$
$$=0.60\cdot 0.30+0.40\cdot 0.40=\boxed{0.34}$$

ii. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(H^C / C\right) = \frac{P\left(H^C \cap C\right)}{P(C)} = \frac{P\left(H^C\right)P\left(C / H^C\right)}{P(C)} = \frac{0.40 \cdot 0.40}{0.34} = \boxed{\frac{8}{17} \simeq 0.4706}$$

b) Sea X la variable aleatoria que da el gasto medio por cliente, en euros, en la lotería de las pasadas Navidades.
Sabemos que sigue una N(**μ**, 10).

La muestra es de 225 hogares → $n = 225$, $\bar{x} = 65$ €

Para un nivel de confianza del 97%

$$1 - \alpha = 0{,}97 \rightarrow \alpha = 0{,}03 \rightarrow \alpha/2 = 0'015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}17}$$

El error del intervalo viene dado por la fórmula:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{10}{\sqrt{225}} \simeq 1.4467$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(65 - 1.4467, 65 + 1.4467\right) = \left(63.5533, 66.4467\right)$$

El gasto en lotería con un nivel de confianza del 97 % se sitúa entre 63.55 € y 66.45 €.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	[illegible]
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	[illegible]	0.
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	[illegible]	0.
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	[illegible]	0.
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	[illegible]	0.
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	[illegible]	0.
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	[illegible]	0.
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	[illegible]	0.
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	[illegible]	0.
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	[illegible]	0.
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	[illegible]	0.
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	[illegible]	0.
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	[illegible]	0.
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	[illegible]	0.
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	[illegible]	0.
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	[illegible]	0.
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	[illegible]	0.
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	[illegible]	0.
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	[illegible]	0.
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	[illegible]	0.
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	[illegible]	0.
[illegible]	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	[illegible]	0.
2.1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9850	0.
[illegible]	[illegible]	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	[illegible]	0.