



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL  
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN  
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS  
CURSO 2022-2023**

**MATEMÁTICAS II**

- Instrucciones:**
- a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**
  - b) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.**
  - c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.
  - d) **Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.**
  - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
  - f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

**BLOQUE A**

**EJERCICIO 1 (2.5 puntos)**

De entre todos los rectángulos de diagonal 10 cm (cada uno), calcula las dimensiones del que tiene mayor área.

**EJERCICIO 2 (2.5 puntos)**

Considera la función  $f(x) = \frac{1}{x|x|}$ , para  $x \neq 0$ .

- a) **[1 punto]** Calcula los intervalos de concavidad y de convexidad de  $f$ , así como los puntos de inflexión de su gráfica, si existen.
- b) **[1,5 puntos]** Estudia y calcula las asíntotas de la función. Esboza su gráfica.

**EJERCICIO 3 (2.5 puntos)**

Determina la función  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , sabiendo que es dos veces derivable, su gráfica pasa por el punto  $(1,0)$ ,  $f'(e) = e$  y  $f''(x) = 2\ln(x) + 1$ , para todo  $x > 0$  ( $\ln$  denota la función logaritmo neperiano).

**EJERCICIO 4 (2.5 puntos)**

Considera las funciones  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por  $f(x) = |x^2 - 1|$  y  $g(x) = x + 5$ .

- a) **[1,25 puntos]** Calcula los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones y esboza el recinto que determinan.
- b) **[1,25 puntos]** Determina el área del recinto anterior.



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO  
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS  
DE ADMISIÓN  
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS  
CURSO 2022-2023**

**MATEMÁTICAS II**

**BLOQUE B**

**EJERCICIO 5 (2.5 puntos)**

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} m+1 & 1 & m-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 1 & m+1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) [1 punto] Calcula  $m$  para que la matriz  $A$  tenga inversa.
- b) [1,5 puntos] Para  $m = 0$ , resuelve, si es posible, la ecuación matricial  $\frac{1}{2}AX + C^4 = B$ .

**EJERCICIO 6 (2.5 puntos)**

Considera las matrices  $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & x \\ z & z & y \end{pmatrix}$ ,  $B = (\alpha \ 1 \ 1)$  y  $C = (1 \ 1 \ 1)$ .

- a) [1,5 puntos] Discute el sistema  $BA = C$ , según los valores de  $\alpha$ .
- b) [1 punto] Resuelve el sistema, si es posible, para  $\alpha = 0$  y para  $\alpha = 1$ .

**EJERCICIO 7 (2.5 puntos)**

Determina el punto simétrico de  $A(2, -4, -3)$  con respecto al plano que contiene a los puntos  $B(1, 1, 2)$ ,  $C(0, 1/3, 1)$  y  $D(-3, 0, 3)$ .

**EJERCICIO 8 (2.5 puntos)**

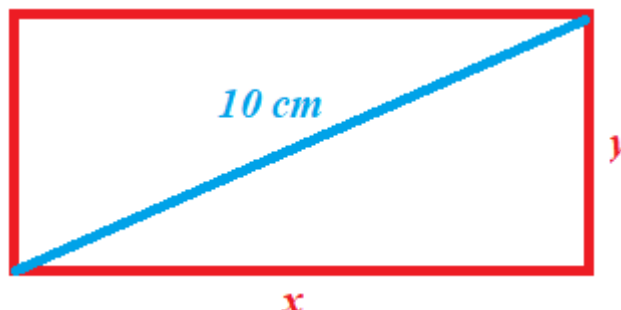
Dados los puntos  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(2, -1, 0)$ ,  $B(3, 0, x)$  y  $C(-x, 1, -1)$ , los vectores  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  y  $\overrightarrow{OC}$  determinan un paralelepípedo.

- a) [1,5 puntos] Calcula los posibles valores de  $x$  sabiendo que el volumen del paralelepípedo es 5 unidades cúbicas.
- b) [1 punto] Para  $x = 1$ , halla el área de la cara del paralelepípedo que contiene a los vértices  $O$ ,  $A$  y  $B$ .

## SOLUCIONES

### **EJERCICIO 1 (2.5 puntos)**

De entre todos los rectángulos de diagonal 10 cm (cada una), calcula las dimensiones del que tiene mayor área.



Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de catetos  $x$ ,  $y$ .

$$x^2 + y^2 = 10^2 \Rightarrow y^2 = 100 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{100 - x^2}$$

El área del rectángulo es  $\text{Base} \cdot \text{altura} = xy$ .

$$A(x) = xy = x\sqrt{100 - x^2} = \sqrt{100x^2 - x^4}; \quad 0 \leq x \leq 10$$

Hallamos los puntos críticos de la función Área.

$$A(x) = \sqrt{100x^2 - x^4} \Rightarrow A'(x) = \frac{200x - 4x^3}{2\sqrt{100x^2 - x^4}}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{200x - 4x^3}{2\sqrt{100x^2 - x^4}} = 0 \Rightarrow 200x - 4x^3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x(50 - x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{Área} = 0 \\ 50 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 50 \rightarrow \boxed{x = \sqrt{50} \approx 7.07} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de  $x = \sqrt{50}$ .

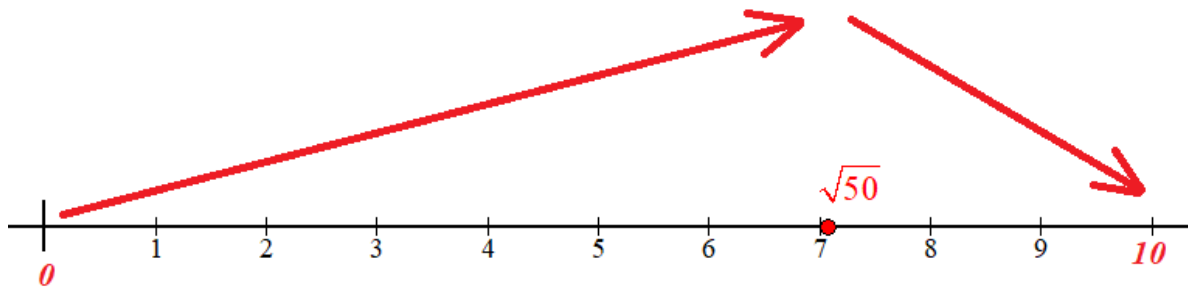
- En el intervalo  $(0, \sqrt{50})$  tomamos  $x = 5$  y la derivada vale

$$A'(5) = \frac{200 \cdot 5 - 4 \cdot 5^3}{2\sqrt{100 \cdot 5^2 - 5^4}} = \frac{500}{+} > 0. \text{ La función crece en } (0, \sqrt{50}).$$

- En el intervalo  $(\sqrt{50}, 10)$  tomamos  $x = 8$  y la derivada vale

$$A'(8) = \frac{200 \cdot 8 - 4 \cdot 8^3}{2\sqrt{100 \cdot 8^2 - 8^4}} = \frac{-448}{+} < 0. \text{ La función decrece en } (\sqrt{50}, 10).$$

La función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un máximo en  $x = \sqrt{50}$ .

Para  $x = \sqrt{50}$  tenemos que  $y = \sqrt{100 - x^2} = \sqrt{100 - (\sqrt{50})^2} = \sqrt{50}$

El rectángulo de área máxima con diagonal 10 cm es un cuadrado de lado  $\sqrt{50} \approx 7.07$  cm.

**EJERCICIO 2 (2.5 puntos)**

Considera la función  $f(x) = \frac{1}{x|x|}$ , para  $x \neq 0$ .

- a) [1 punto] Calcula los intervalos de concavidad y de convexidad de  $f$ , así como los puntos de inflexión de su gráfica, si existen.  
 b) [1,5 puntos] Estudia y calcula las asíntotas de la función. Esboza su gráfica.

a) La función la expresamos como una función a trozos.

$$f(x) = \frac{1}{x|x|} = \begin{cases} \frac{1}{x \cdot (-x)} = \frac{-1}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x \cdot (x)} = \frac{1}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Calculamos la derivada segunda y averiguamos cuando se anula.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x^2} = -x^{-2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x^2} = x^{-2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x^{-3} & \text{si } x < 0 \\ -2x^{-3} & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} -6x^{-4} = \frac{-6}{x^4} & \text{si } x < 0 \\ 6x^{-4} = \frac{6}{x^4} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Esta expresión de la segunda derivada nunca se anula y en cada intervalo no cambia su signo.

- En el intervalo  $(-\infty, 0)$  tomamos  $x = -1$  y la derivada segunda vale

$$f''(-1) = \frac{-6}{(-1)^4} = -6 < 0. \text{ La función es cóncava } (\cap) \text{ en el intervalo } (-\infty, 0).$$

- En el intervalo  $(0, +\infty)$  tomamos  $x = 1$  y la derivada segunda vale  $f''(1) = \frac{6}{1^4} = 6 > 0$ .

La función es convexa ( $\cup$ ) en el intervalo  $(0, +\infty)$ .

La función es cóncava ( $\cap$ ) en el intervalo  $(-\infty, 0)$  y convexa ( $\cup$ ) en el intervalo  $(0, +\infty)$ . No presenta puntos de inflexión, pues  $x = 0$  no pertenece al dominio de la función.

b) **Asíntota vertical.**  $x = a$

¿  $x = 0$  es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$x = 0$  es asíntota vertical

**Asíntota horizontal.**  $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

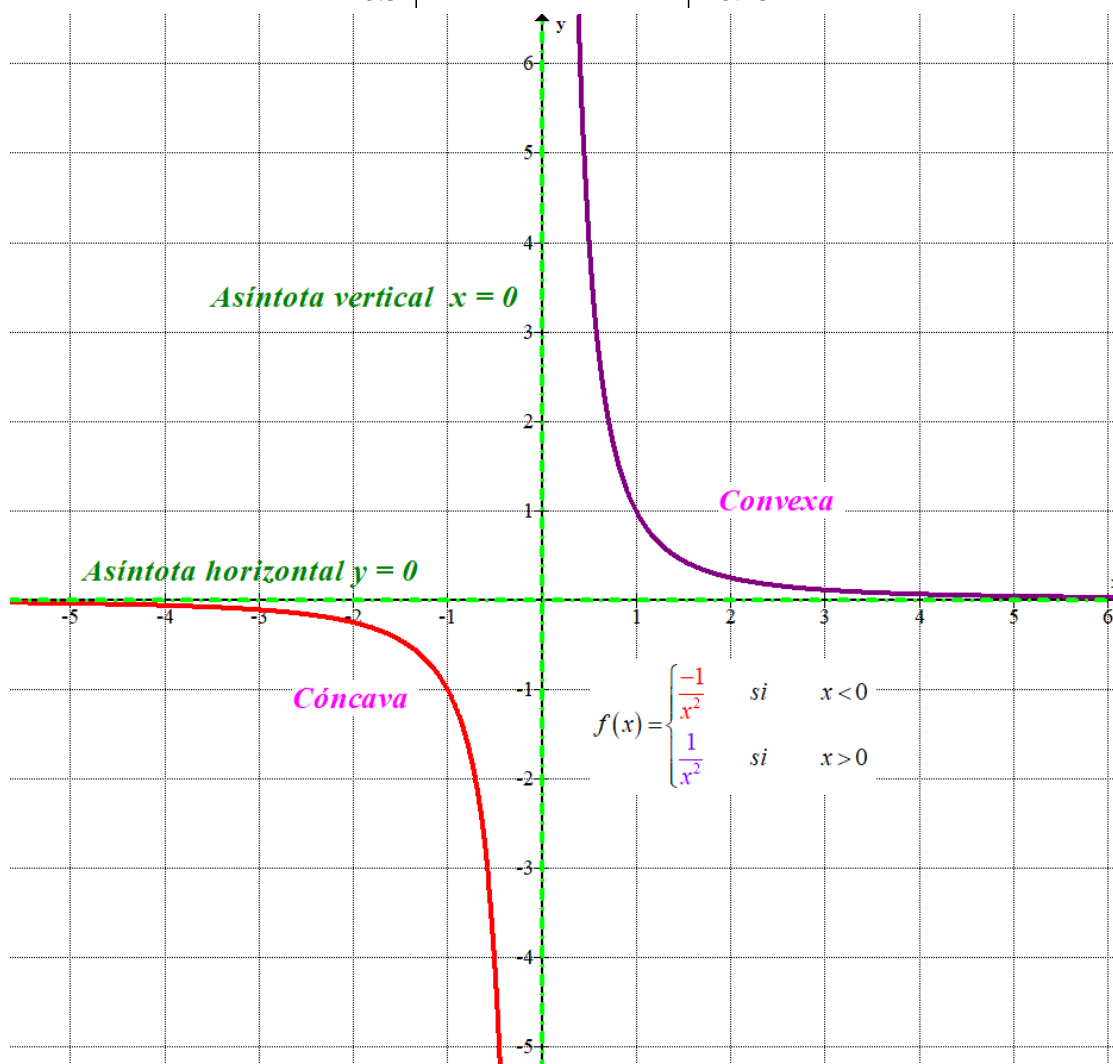
$y = 0$  es asíntota horizontal.

**Asíntota oblicua.**  $y = mx + n$

No tiene pues existe asíntota horizontal.

Hacemos una tabla de valores y la representamos.

$x < 0$		$x > 0$	
$x$	$y = \frac{-1}{x^2}$	$x$	$y = \frac{1}{x^2}$
-2	-0.25	0.5	4
-1	-1	1	1
-0.5	-4	2	0.25



**EJERCICIO 3 (2.5 puntos)**

Determina la función  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , sabiendo que es dos veces derivable, su gráfica pasa por el punto  $(1, 0)$ ,  $f'(e) = e$  y  $f''(x) = 2 \ln(x) + 1$ , para todo  $x > 0$  ( $\ln$  denota la función logaritmo neperiano).

Si la segunda derivada es  $f''(x) = 2 \ln(x) + 1$  su integral será la derivada primera.

$$f'(x) = \int f''(x) dx = \int 2 \ln(x) + 1 dx = 2 \int \ln x dx + \int dx = \dots$$

$$\int \ln x dx = \left. \begin{array}{l} \text{Integral por partes} \\ u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{array} \right\} = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x$$

$$\dots = 2(x \ln x - x) + x = 2x \ln x - 2x + x = 2x \ln x - x + A$$

Si  $f'(e) = e$  entonces:

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 2x \ln x - x + A \\ f'(e) = e \end{array} \right\} \Rightarrow e = 2e \ln e - e + A \Rightarrow e = 2e - e + A \Rightarrow \boxed{A = 0}$$

La primera derivada queda  $f'(x) = 2x \ln x - x$

Si la primera derivada es  $f'(x) = 2x \ln x - x$  su integral será la función.

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int 2x \ln x - x dx = 2 \int x \ln x dx - \int x dx = \dots$$

$$\int x \ln x dx = \left. \begin{array}{l} \text{Integral por partes} \\ u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \rightarrow v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}$$

$$\dots = 2 \left( \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right) - \frac{x^2}{2} = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} = x^2 \ln x - x^2 + B$$

La función tiene la expresión  $f(x) = x^2 \ln x - x^2 + B$ .

Si su gráfica pasa por el punto  $(1,0) \rightarrow f(1) = 0$ .

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 \ln x - x^2 + B \\ f(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 1^2 \ln 1 - 1^2 + B \Rightarrow \boxed{B=1}$$

La función tiene la expresión  $f(x) = x^2 \ln x - x^2 + 1$ .



**EJERCICIO 4 (2.5 puntos)**

Considera las funciones  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por  $f(x) = |x^2 - 1|$  y  $g(x) = x + 5$ .

a) [1,25 puntos] Calcula los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones y esboza el recinto que determinan.

b) [1,25 puntos] Determina el área del recinto anterior.

a) Expresamos la función  $f(x)$  como una función a trozos.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

$$f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Buscamos los puntos de corte de las gráficas.

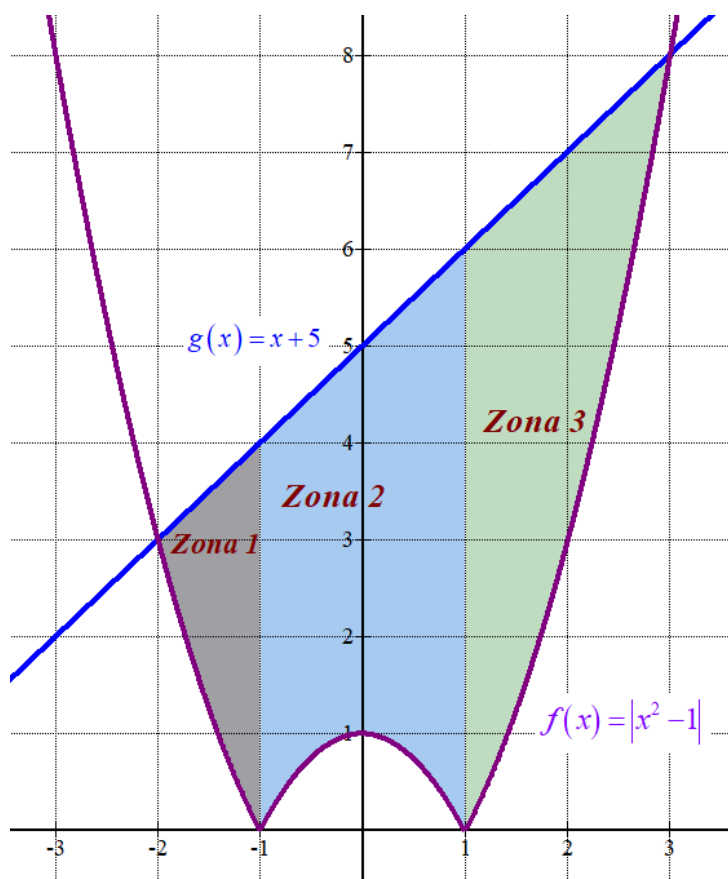
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = |x^2 - 1| \\ g(x) = x + 5 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow |x^2 - 1| = x + 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = x + 5 \rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{1+5}{2} = 3 = x \\ \frac{1-5}{2} = -2 = x \end{cases} \\ x^2 - 1 = -(x + 5) \rightarrow x^2 + x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{2} = \text{No existe} \end{cases}$$

Como  $g(3) = 3 + 5 = 8$  y  $g(-2) = -2 + 5 = 3$  los puntos de corte de las gráficas son  $P(3, 8)$  y  $Q(-2, 3)$ .

Hacemos una tabla de valores y esbozamos las gráficas y el recinto que delimitan.

$x$	$y =  x^2 - 1 $	$x$	$y = x + 5$
-2	3	-2	3
-1	0	-1	4
0	1	0	5
1	0	1	6
3	8	3	8



- b) El recinto del cual queremos hallar el área lo dividimos en tres zonas. Calculamos el área de cada una de ellas

Zona 1:

$$\int_{-2}^{-1} x + 5 - (x^2 - 1) dx = \int_{-2}^{-1} x + 5 - x^2 + 1 dx = \int_{-2}^{-1} -x^2 + x + 6 dx =$$

$$= \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{-2}^{-1} = \left[ -\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 6(-1) \right] - \left[ -\frac{(-2)^3}{3} + \frac{(-2)^2}{2} + 6(-2) \right] =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 6 - \frac{8}{3} - 2 + 12 = 4 - \frac{7}{3} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{13}{6}}$$

Zona 2:

$$\int_{-1}^1 x + 5 - (-x^2 + 1) dx = \int_{-1}^1 x + 5 + x^2 - 1 dx = \int_{-1}^1 x^2 + x + 4 dx =$$

$$= \left[ \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x \right]_{-1}^1 = \left[ \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 4 \cdot 1 \right] - \left[ \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 4(-1) \right] =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 4 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 4 = 8 + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{26}{3}}$$

Zona 3:

$$\begin{aligned}\int_1^3 x+5-(x^2-1)dx &= \int_1^3 x+5-x^2+1dx = \int_1^3 -x^2+x+6dx = \\ &= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+6x\right]_1^3 = \left[-\frac{3^3}{3}+\frac{3^2}{2}+6\cdot 3\right]-\left[-\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}+6\cdot 1\right] = \\ &= -9+\frac{9}{2}+18+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-6 = 3+\frac{8}{2}+\frac{1}{3} = 7+\frac{1}{3} = \boxed{\frac{22}{3}}\end{aligned}$$

El área del recinto es la suma de estos tres valores:  $\frac{13}{6} + \frac{26}{3} + \frac{22}{3} = \frac{109}{6} \approx 18.16$  unidades cuadradas.

## BLOQUE B

**EJERCICIO 5 (2.5 puntos)**

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} m+1 & 1 & m-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 1 & m+1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) [1 punto] Calcula  $m$  para que la matriz  $A$  tenga inversa.b) [1,5 puntos] Para  $m = 0$ , resuelve, si es posible, la ecuación matricial  $\frac{1}{2}AX + C^4 = B$ .a) Para que la matriz  $A$  tenga inversa su determinante debe ser no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} m+1 & 1 & m-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = (m+1)^2 + m-1 + m-1 - (m-1)^2 - (m+1) - (m+1) =$$

$$= m^2 + 2m + 1 + 2m - 2 - (m^2 - 2m + 1) - 2m - 2 =$$

$$= \cancel{m^2} + 2m + \cancel{1} + 2m - 2 - \cancel{m^2} + \cancel{2m} - \cancel{1} - \cancel{2m} - 2 = 4m - 4$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 4m - 4 = 0 \Rightarrow 4m = 4 \Rightarrow \boxed{m=1}$$

El determinante de  $A$  se anula para  $m = 1$ . La matriz  $A$  tiene inversa para cualquier valor de  $m$  distinto de 1.

b) Para  $m = 0$  la matriz  $A$  tiene inversa. Despejamos  $X$  en la ecuación matricial.

$$\frac{1}{2}AX + C^4 = B \Rightarrow \frac{1}{2}AX = B - C^4 \Rightarrow AX = 2(B - C^4) \Rightarrow X = 2A^{-1}(B - C^4)$$

Calculamos la inversa de  $A$ .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 = -4 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{-4} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de X.

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$C^4 = C^2 \cdot C^2 = I \cdot I = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B - C^4 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = 2A^{-1}(B - C^4) = 2 \cdot \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 2+4 & -8 \\ 2-4 & -8-4 & -4 \\ -2 & 8+2 & 4-8 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 6 & -8 \\ -2 & -12 & -4 \\ -2 & 10 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

**EJERCICIO 6 (2.5 puntos)**

Considera las matrices  $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & x \\ z & z & y \end{pmatrix}$ ,  $B = (\alpha \ 1 \ 1)$  y  $C = (1 \ 1 \ 1)$ .

a) [1,5 puntos] Discute el sistema  $BA = C$ , según los valores de  $\alpha$ .

b) [1 punto] Resuelve el sistema, si es posible, para  $\alpha = 0$  y para  $\alpha = 1$ .

a) Obtenemos el sistema de ecuaciones asociado a la ecuación matricial.

$$BA = C \Rightarrow (\alpha \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & x \\ z & z & y \end{pmatrix} = (1 \ 1 \ 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x\alpha + y + z \quad y\alpha + x + z \quad z\alpha + x + y) = (1 \ 1 \ 1) \Rightarrow \begin{cases} x\alpha + y + z = 1 \\ y\alpha + x + z = 1 \\ z\alpha + x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ x + y + \alpha z = 1 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es  $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$  y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 + 1 + 1 - \alpha - \alpha - \alpha = \alpha^3 - 3\alpha + 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \alpha^3 - 3\alpha + 2 = 0 \Rightarrow 1 \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 \\ & 1 & 1 & -2 \\ & 1 & 1 & -2 \\ & 1 & 1 & -2 \end{array} \right| \Rightarrow (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - 1 = 0 \rightarrow \boxed{\alpha = 1} \\ \alpha^2 + \alpha - 2 = 0 \rightarrow \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = \boxed{1 = \alpha} \\ \frac{-1-3}{2} = \boxed{-2 = \alpha} \end{cases} \end{cases}$$

Estudiamos tres situaciones diferentes.

**CASO 1.** Si  $\alpha \neq 1$  y  $\alpha \neq -2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

**CASO 2.** Si  $\alpha = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

El sistema queda tan sencillo que lo analizamos sin usar los rangos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \{\text{Tres ecuaciones iguales}\} \Rightarrow x + y + z = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \lambda - \beta \\ y = \beta \\ z = \lambda \end{cases}, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones)

**CASO 3.** Si  $\alpha = -2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos su rango obteniendo una matriz triangular equivalente utilizando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 1}^a + 2 \cdot \text{Fila 2}^a \\ -2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline 2 \quad -4 \quad 2 \quad 2 \\ 0 \quad -3 \quad 3 \quad 3 \rightarrow \text{Nueva Fila 2}^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 1}^a + 2 \cdot \text{Fila 3}^a \\ -2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline 2 \quad 2 \quad -4 \quad 2 \\ 0 \quad 3 \quad -3 \quad 3 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a + \text{Fila 2}^a \\ 0 \quad 3 \quad -3 \quad 3 \\ \hline 0 \quad -3 \quad 3 \quad 3 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 6 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{-2 \quad 1 \quad 1 \quad 1}^{A/B} \\ 0 \quad -3 \quad 3 \quad 3 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 6}_A \end{pmatrix}$$

La matriz A tiene rango 2 y la matriz ampliada A/B tiene rango 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible** (sin solución).

*Resumiendo:* Si  $\alpha \neq 1$  y  $\alpha \neq -2$  el sistema  $BA = C$  tiene una única solución, si  $\alpha = -2$  el sistema no tiene solución y si  $\alpha = 1$  el sistema tiene infinitas soluciones.

- b) Para  $\alpha = 0$  el sistema tiene una única solución la obtenemos a partir del sistema de ecuaciones obtenido en el apartado a).

$$\left. \begin{array}{l} y+z=1 \\ x+z=1 \\ x+y=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y=1-z \\ x+z=1 \\ x+y=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+z=1 \\ x+1-z=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+z=1 \\ x-z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+z=1 \\ x=z \end{array} \right\} \Rightarrow z+z=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2z=1 \Rightarrow \boxed{z=\frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=\frac{1}{2}} \\ \boxed{y=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}} \end{cases}$$

La solución del sistema es  $x = y = z = \frac{1}{2}$

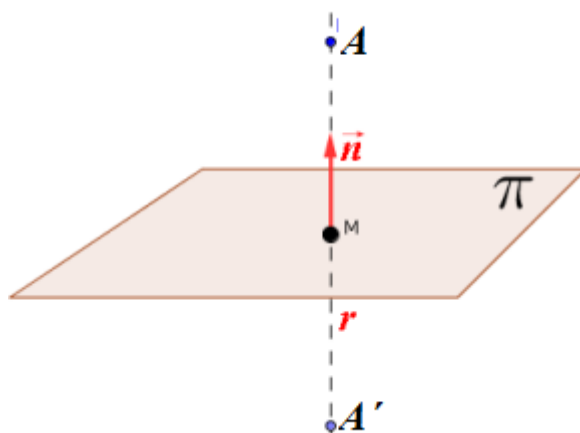
Para  $\alpha = 1$  hemos obtenido las soluciones en el apartado a).

Las soluciones son:  $\begin{cases} x=1-\lambda-\beta \\ y=\beta \\ z=\lambda \end{cases}, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$



**EJERCICIO 7 (2.5 puntos)**

Determina el punto simétrico de  $A(2, -4, -3)$  con respecto al plano que contiene a los puntos  $B(1, 1, 2)$ ,  $C(0, 1/3, 1)$  y  $D(-3, 0, 3)$ .



Hallamos la ecuación del plano  $\pi$  que contiene los puntos B, C y D.

$$\pi : \begin{cases} \vec{u} = \overrightarrow{CB} = (1, 1, 2) - \left(0, \frac{1}{3}, 1\right) = \left(1, \frac{2}{3}, 1\right) \\ \vec{v} = \overrightarrow{BD} = (-3, 0, 3) - (1, 1, 2) = (-4, -1, 1) \\ B(1, 1, 2) \in \pi \end{cases} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 1 & 2/3 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} - 4(y-1) - z + 2 + \frac{8}{3}(z-2) - (y-1) + x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} - 4y + 4 - z + 2 + \frac{8}{3}z - \frac{16}{3} - y + 1 + x - 1 = 0 \Rightarrow \frac{5}{3}x - 5y + \frac{5}{3}z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x - 15y + 5z = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : x - 3y + z = 0}$$

Hallamos la recta  $r$  perpendicular al plano  $\pi$  que pasa por el punto A.

$$\pi : x - 3y + z = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, -3, 1)$$

$$r : \begin{cases} A(2, -4, -3) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{n} = (1, -3, 1) \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -4 - 3\lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases}$$

El punto medio M del segmento  $AA'$  es el punto de corte de la recta  $r$  con el plano  $\pi$ .

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x - 3y + z = 0 \\ r : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -4 - 3\lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2 + \lambda - 3(-4 - 3\lambda) - 3 + \lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + \lambda + 12 + 9\lambda - 3 + \lambda = 0 \Rightarrow 11\lambda + 11 = 0 \Rightarrow 11\lambda = -11 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 1 = 1 \\ y = -4 - 3(-1) = -1 \\ z = -3 - 1 = -4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{M(1, -1, -4)}$$

El punto A' es  $M + \overline{AM}$ .

$$\overline{AM} = (1, -1, -4) - (2, -4, -3) = (-1, 3, -1)$$

$$A' = M + \overline{AM} = (1, -1, -4) + (-1, 3, -1) = (0, 2, -5)$$

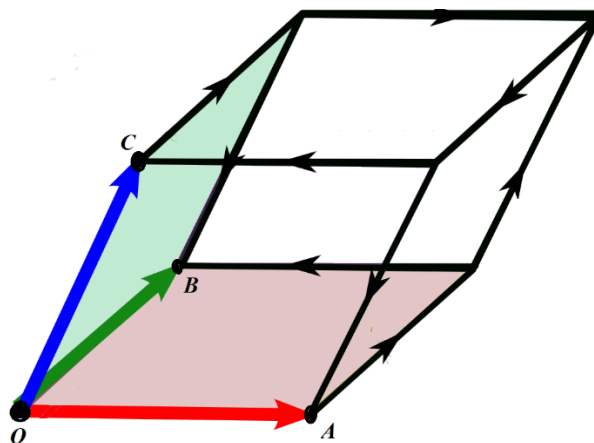
El punto A' simétrico de A con respecto al plano que contiene a los puntos B, C y D tiene coordenadas  $A'(0, 2, -5)$

**EJERCICIO 8 (2.5 puntos)**

Dados los puntos  $O(0,0,0)$ ,  $A(2,-1,0)$ ,  $B(3,0,x)$  y  $C(-x,1,-1)$ , los vectores  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  y  $\overrightarrow{OC}$  determinan un paralelepípedo.

- a) **[1,5 puntos]** Calcula los posibles valores de  $x$  sabiendo que el volumen del paralelepípedo es 5 unidades cúbicas.  
 b) **[1 punto]** Para  $x = 1$ , halla el área de la cara del paralelepípedo que contiene a los vértices  $O$ ,  $A$  y  $B$ .

- a) El volumen del paralelepípedo es el valor absoluto del producto mixto  $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]$ .



$$\overrightarrow{OA} = (2, -1, 0) - (0, 0, 0) = (2, -1, 0)$$

$$\overrightarrow{OB} = (3, 0, x) - (0, 0, 0) = (3, 0, x)$$

$$\overrightarrow{OC} = (-x, 1, -1) - (0, 0, 0) = (-x, 1, -1)$$

$$[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & x \\ -x & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 + x^2 + 0 - 0 - 3 - 2x = x^2 - 2x - 3$$

Como el volumen del paralelepípedo debe valer 5 unidades cúbicas tenemos:

$$|x^2 - 2x - 3| = 5 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 5 \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow \boxed{1} \\ x^2 - 2x - 3 = -5 \rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow \boxed{2} \end{cases}$$

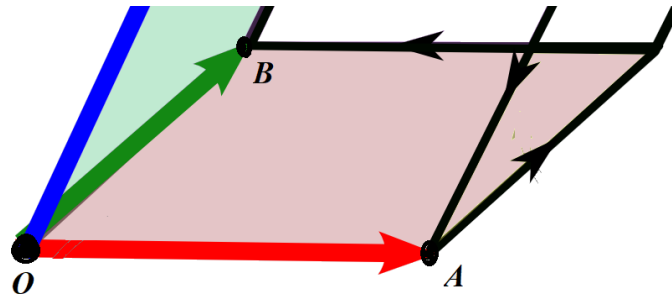
$$\boxed{1} \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{2+6}{2} = \boxed{4=x} \\ \frac{2-6}{2} = \boxed{-2=x} \end{cases}$$

$$\boxed{2} \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \text{No existe}$$

Los dos valores buscados son  $x = -2$  y  $x = 4$ .

- b) Para  $x = 1$  los puntos son  $O(0,0,0)$ ,  $A(2,-1,0)$ ,  $B(3,0,1)$ .

Utilizamos la fórmula del área de un paralelogramo como el módulo del producto vectorial de los vectores  $\overrightarrow{OA}$  y  $\overrightarrow{OB}$  que lo definen.



$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{OA} = (2, -1, 0) \\ \overrightarrow{OB} = (3, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -i + 3k - 2j = (-1, -2, 3)$$

$$\text{Área } OAB = |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 3^2} = \boxed{\sqrt{14} \approx 3.74 \text{ unidades cuadradas}}$$