Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2023

# Proves d'accés a la universitat

# Matemáticas

## Serie 2

**Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.**

**Cada cuestión vale 2,5 puntos.**

**Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.**

**Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.**

**1**. Sean $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz identidad de orden dos $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

***a)*** Compruebe que $(A-2I)^2=3I$ . [0,5 puntos]

***b)*** Utilizando la igualdad del apartado anterior, encuentre la matriz inversa de la matriz A en función de las matrices A e I, y compruebe que coincide con la matriz B. [1,25 puntos]

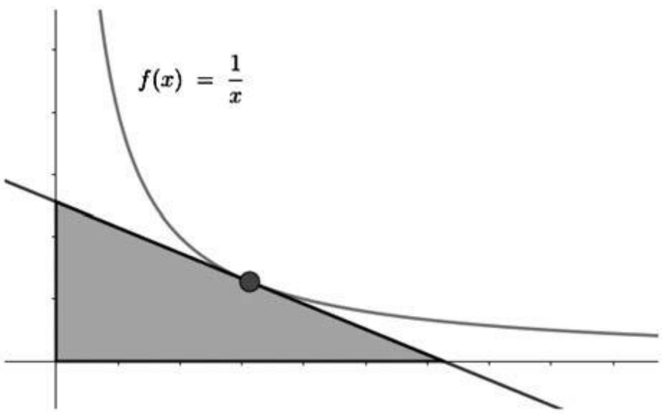
***c)*** Calcule la matriz X que satisface la igualdad $A\cdot X=B$. [0,75 puntos]

**2.** Considere la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

***a)*** Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de abscisa $x=2$ .[0,75 puntos]

***b)*** Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de abscisa $x=k$, donde *k* es un número real positivo. [0,75 puntos]

***c)*** Compruebe que, tal y como puede verse en la figura de abajo, la recta del apartado *b* determina un triángulo de área constante con los semiejes positivos de coordenadas. Calcule este área.



**3.** Considere el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 2x+y=1+z \\ my+z=2-x \\ mz+3=3x+y \end{cases}$, donde $m$ es un número real.

***a)*** Discute el sistema según los valores del parámetro $m$. [1,25 puntos]
***b)*** Resuelve el sistema, si tiene solución, para el caso $m = 1$. [1,25 puntos]

**4**. Considere la función *f(x)* definida por $f(x)=-3x+e^{2x^3-1}$.

***a)*** Justifique que $f(x)=2$ tiene una solución en el intervalo $(-1,0)$. [1,25 puntos]

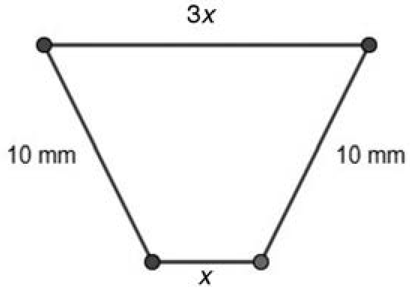
***b)*** Sea la función $h(x)=-3x^2+e^{2x^3-1}$. Calcule el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones *f(x)* y *h(x)*. [1,25 puntos]

**5**. Sean $r_1$ y $r_2$ las rectas definidas por $r_1: x-1=y=-z$ y por $r_2: x=y=z$, respectivamente.

***a)*** Calcule la ecuación paramétrica de la recta que corta perpendicularmente las rectas $r_1$ y $r_2$. [1,75 puntos]

***b)*** Calcule la distancia entre $r_1$ y $r_2$. [0,75 puntos]

**6**. Queremos construir una pieza metálica que tenga por sección un trapecio isósceles con la base superior tres veces más larga que la base inferior. Los otros lados del trapecio miden 10 mm, tal y como se puede observar en la siguiente figura:




***a)*** Exprese la altura del trapecio en función de la longitud $x$ de la base inferior. [0,5 puntos]
***b)*** Calcule la longitud de la base inferior del trapecio de forma que el área de la pieza sea máxima y encuentre el valor de esa área máxima. [2 puntos]

# SOLUCIONES

**1.** Sean $A=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}$ y la matriz identidad de orden dos $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

***a)*** Compruebe que $(A-2I)^2=3I$ . [0,5 puntos]

***b)*** Utilizando la igualdad del apartado anterior, encuentre la matriz inversa de la matriz A en función de las matrices A e I, y compruebe que coincide con la matriz B. [1,25 puntos]

***c)*** Calcule la matriz X que satisface la igualdad $A\cdot X=B$. [0,75 puntos]

a)

$$A-2I=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2&1-0\\3-0&2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\3&0\end{pmatrix}$$

$$(A-2I)^2=\left(\begin{pmatrix}0&1\\3&0\end{pmatrix}\right)^2=\begin{pmatrix}0&1\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+3&0+0\\0+0&3+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=3I$$

b) Desarrollamos la igualdad.

$$(A-2I)^2=3I\Rightarrow(A-2I)(A-2I)=3I\Rightarrow A^2-2AI-2IA+4I^2=3I\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2-2A-2A+4I=3I\Rightarrow A^2-4A=3I-4I\Rightarrow A^2-4A=-I\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4A-A^2=I\Rightarrow A(4I-A)=I\Rightarrow \boxed{A^{-1}=4I-A}$$

Calculamos la expresión de la matriz inversa de *A* y comprobamos que la inversa coincide con la matriz *B*.

$$A^{-1}=4I-A=4\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-2&0-1\\0-3&4-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}=B$$

c) Despejamos X de la ecuación matricial. Sabemos que la matriz A tiene inversa.

$$A\cdot X=B\Rightarrow X=A^{-1}B\Rightarrow\left\{A^{-1}=B\right\}\Rightarrow X=B\cdot B=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

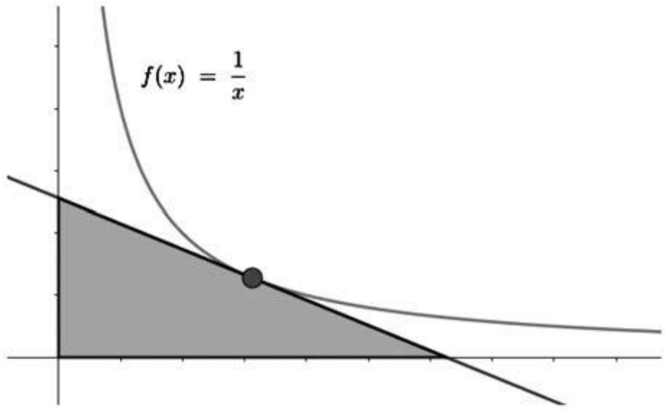
$$\Rightarrow\boxed{X=\begin{pmatrix}4+3&-2-2\\-6-6&3+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-4\\-12&7\end{pmatrix}}$$

**2.** Considere la función $f(x)=\frac{1}{x}$.

***a)*** Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de abscisa $x=2$ .[0,75 puntos]

***b)*** Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de abscisa $x=k$, donde *k* es un número real positivo. [0,75 puntos]

***c)*** Compruebe que, tal y como puede verse en la figura de abajo, la recta del apartado *b* determina un triángulo de área constante con los semiejes positivos de coordenadas. Calcule este área.




a) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función *f(x)* en el punto de abscisa *x = 2* es $y-f(2)=f'(2)(x-2)$.

$$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1} \Rightarrow f'(x)=-x^{-2}=\frac{-1}{x^2}$$

$$\left.\begin{array}{r} f(2)=\frac{1}{2} \\ f'(2)=\frac{-1}{2^2}=\frac{-1}{4} \\ y-f(2)=f'(2)(x-2) \end{array}\right\} \Rightarrow y-\frac{1}{2}=\frac{-1}{4}(x-2) \Rightarrow y-\frac{1}{2}=\frac{-1}{4}x+\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y=\frac{-1}{4}x+1}$$

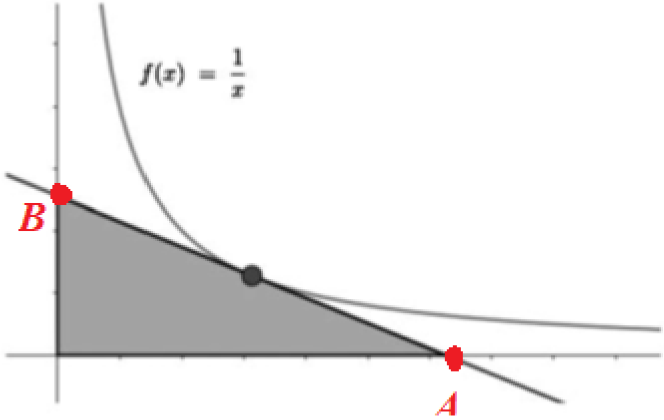
La ecuación de la recta tangente es $y=\frac{-1}{4}x+1$.

b) Repetimos el proceso anterior para un punto de abscisa $x=k$.

$$\left.\begin{array}{r} f(k)=\frac{1}{k} \\ f'(k)=\frac{-1}{k^2} \\ y-f(k)=f'(k)(x-k) \end{array}\right\} \Rightarrow y-\frac{1}{k}=\frac{-1}{k^2}(x-k) \Rightarrow y-\frac{1}{k}=\frac{-1}{k^2}x+\frac{1}{k} \Rightarrow \boxed{y=\frac{-1}{k^2}x+\frac{2}{k}}$$

La recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x=k$ tiene ecuación $y=\frac{-1}{k^2}x+\frac{2}{k}$.

c) Averiguamos los puntos A y B de corte de la recta tangente $y=\frac{-1}{k^2}x+\frac{2}{k}$ con los ejes coordenados.

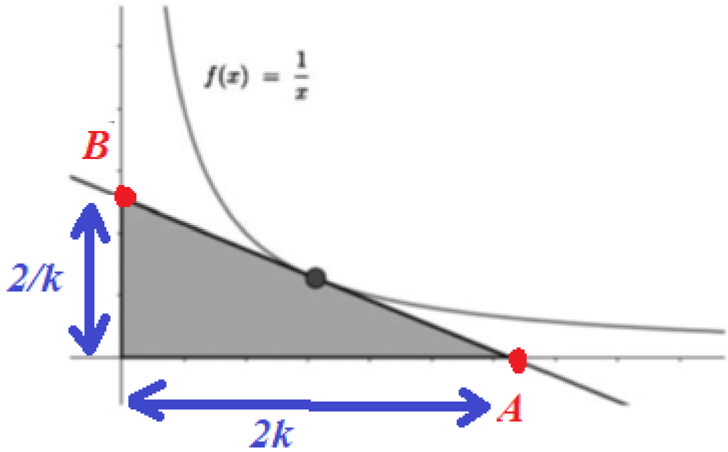



Punto $A$ de corte de la recta tangente con el eje OX.

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{-1}{k^2}x+\frac{2}{k} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-1}{k^2}x+\frac{2}{k}=0 \Rightarrow \frac{2}{k}=\frac{1}{k^2}x \Rightarrow 2k^2=kx \Rightarrow \{k\neq 0\} \Rightarrow x=2k \Rightarrow \boxed{A(2k,0)}$$

Punto $B$ de corte de la recta tangente con el eje OY.

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{-1}{k^2}x+\frac{2}{k} \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{-1}{k^2}\cdot 0+\frac{2}{k}=\frac{2}{k} \Rightarrow \boxed{B\left(0,\frac{2}{k}\right)}$$




El área del triángulo sombreado es la mitad del producto de la base ($2k$) por la altura ($1/k$).

$$Área=\frac{2\cancel{k}\cdot\frac{2}{\cancel{k}}}{2}=\frac{4}{2}=\boxed{2\ u^2}$$

Como comprobamos el valor del área es independiente del valor de $k$ y siempre vale 2 unidades cuadradas.

**3.** Considere el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 2x+y=1+z \\ my+z=2-x \\ mz+3=3x+y \end{cases}$, donde $m$ es un número real.

***a)*** Discute el sistema según los valores del parámetro $m$. [1,25 puntos]
***b)*** Resuelve el sistema, si tiene solución, para el caso $m = 1$. [1,25 puntos]

a) Ordenamos el sistema para establecer la matriz de coeficientes y la matriz ampliada.

$$\begin{cases} 2x+y=1+z \\ my+z=2-x \\ mz+3=3x+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+my+z=2 \\ -3x-y+mz=-3 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ -3 & -1 & m \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 2 \\ -3 & -1 & m & -3 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ -3 & -1 & m \end{vmatrix}=2m^2-3+1-3m-m+2=2m^2-4m$$

$$|A|=0 \Rightarrow 2m^2-4m=0 \Rightarrow 2m(m-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{m=0} \\ m-2=0 \to \boxed{m=2} \end{cases}$$

Estudiamos tres situaciones diferentes.

**CASO 1.** Si $m \neq 0$ y $m \neq 2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3. Al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución)

**CASO 2.** Si $m=0$.

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A es menor de 3.
Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & 0 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 3 & 3 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left.\begin{cases} 2\cdot \text{Fila } 3^a + 3\cdot\text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} -6 & -2 & 0 & -6 \\ 6 & 3 & -3 & 3 \\ \hline 0 & 1 & -3 & -3 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{cases}\right\} \Rightarrow \left( \overbrace{\begin{array}{cccc} \underbrace{\begin{array}{ccc} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}}_{A} & \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 0 \end{array} \end{array}}^{A/B} \right)$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A/B también es 2, los rangos son iguales a 2 pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

**CASO 3.** Si $m=2$.

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A es menor de 3.
Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\cdot \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & 4 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 3 & 3 & 3 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 2^a \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{cases} 2\cdot \text{Fila } 3^a + 3\cdot\text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} -6 & -2 & 4 & -6 \\ 6 & 3 & -3 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 1 & -3 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} 3\cdot \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & 3 & 3 & -9 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -12 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{cases}\right\} \Rightarrow \left( \overbrace{\begin{array}{cccc} \underbrace{\begin{array}{ccc} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}}_{A} & \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ -12 \end{array} \end{array}}^{A/B} \right)$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A/B es 3, los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

*Resumiendo*: Si $m \neq 0$ y $m \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución). Si $m=0$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y si $m=2$ el sistema es incompatible (sin solución).

b) Si $m = 1$ el sistema es compatible determinado. Hallamos su solución.

$$\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+y+z=2 \\ -3x-y+z=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x=2-y-z \\ -3x-y+z=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(2-y-z)+y-z=1 \\ -3(2-y-z)-y+z=-3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4-2y-2z+y-z=1 \\ -6+3y+3z-y+z=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y-3z=-3 \\ 2y+4z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3z+3=y \\ 2y+4z=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(-3z+3)+4z=3 \Rightarrow -6z+6+4z=3 \Rightarrow -2z=-3 \Rightarrow \boxed{z=\frac{3}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=-3\cdot\frac{3}{2}+3=\frac{-3}{2}} \Rightarrow \boxed{x=2-\frac{-3}{2}-\frac{3}{2}=2}$$

La solución del sistema para *m = 1* es $x=2;\ y=\frac{-3}{2};\ z=\frac{3}{2}$.

**4**. Considere la función *f(x)* definida por $f(x) = -3x + e^{2x^3-1}$.

***a)*** Justifique que $f(x) = 2$ tiene una solución en el intervalo $(-1,0)$. [1,25 puntos]

***b)*** Sea la función $h(x) = -3x^2 + e^{2x^3-1}$. Calcule el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones *f(x)* y *h(x)*. [1,25 puntos]

a) Consideramos la función $g(x) = f(x) - 2 = \left(-3x + e^{2x^3-1}\right) - 2 = -3x - 2 + e^{2x^3-1}$

El problema se traduce en buscar un valor en el intervalo $(-1,0)$ donde la función *g(x)* se anule.

Aplicamos el teorema de Bolzano a la función $g(x) = -3x - 2 + e^{2x^3-1}$ en el intervalo $(-1,0)$. Comprobamos que se cumplen las hipótesis de partida del teorema.

1. La función *g(x)* es continua en [–1, 0].
   Es continua pues es la suma de dos funciones continuas: una polinómica (*–3x–2*) y otra exponencial ( $e^{2x^3-1}$ ).
2. La función toma signos diferentes en los extremos del intervalo $(-1,0)$.

$$\left.\begin{array}{l} g(-1) = -3(-1) - 2 + e^{2(-1)^3-1} = 1 + e^{-3} \simeq 1.04 > 0 \\ g(0) = -3\cdot 0 - 2 + e^{2\cdot 0^3-1} = -2 + e^{-1} \simeq -1.63 < 0 \end{array}\right\}$$

Podemos aplicar el teorema de Bolzano y afirmar que existe un valor $c \in (-1,0)$ tal que $g(c) = 0$

.

Y por tanto existe un valor $c \in (-1,0)$ tal que $f(c) = 2$.

b) Hallamos los puntos de corte de las gráficas de las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} h(x) = -3x^2 + e^{2x^3-1} \\ f(x) = -3x + e^{2x^3-1} \\ f(x) = h(x) \end{array}\right\} \Rightarrow -3x^2 + e^{2x^3-1} = -3x + e^{2x^3-1} \Rightarrow -3x^2 = -3x \Rightarrow$$

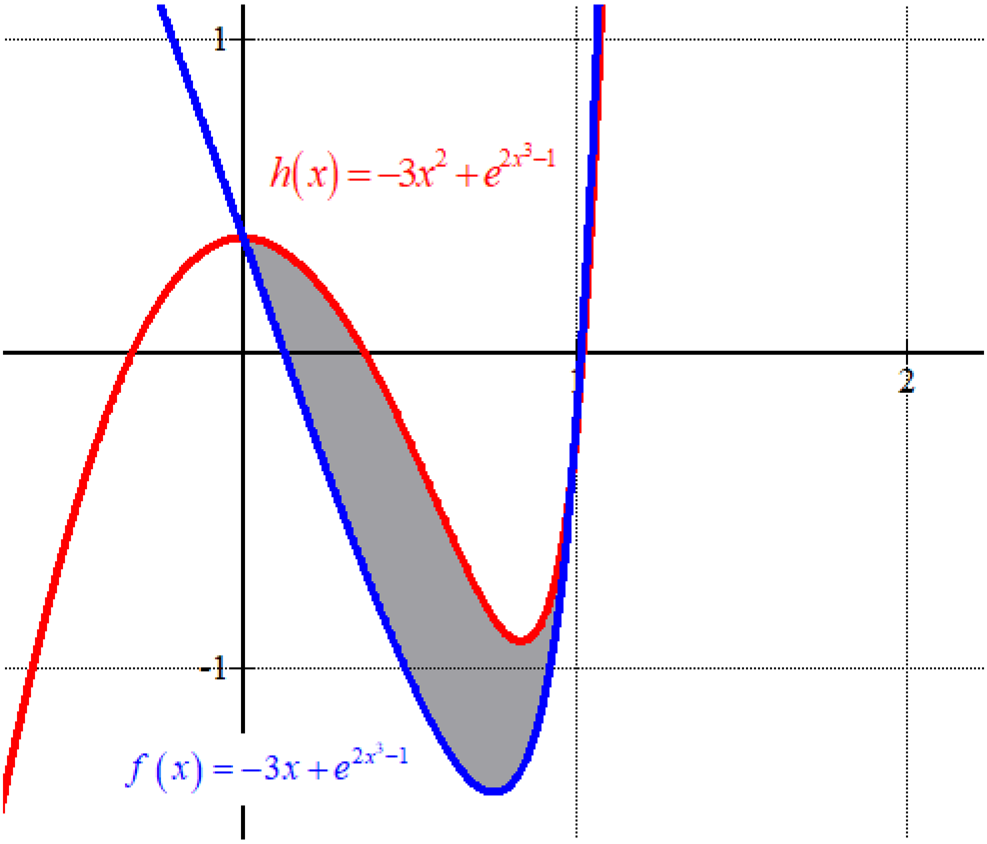
$$\Rightarrow -3x^2 + 3x = 0 \Rightarrow -3x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ x - 1 = 0 \rightarrow \boxed{x=1} \end{cases}$$

El área de la región encerrada entre las dos gráficas es el valor absoluto de la integral definida entre 0 a 1 de la diferencia de las dos funciones. Tomamos valor absoluto para no buscar que función tiene su gráfica situada por encima.

$$\int_0^1 h(x) - f(x)\,dx = \int_0^1 -3x^2 + e^{2x^3-1} - \left(-3x + e^{2x^3-1}\right)dx = \int_0^1 -3x^2 + e^{2x^3-1} + 3x - e^{2x^3-1}dx =$$

$$= \int_0^1 -3x^2 + 3x dx = \left[-x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^1 = \left[-1^3 + \frac{3}{2}\cdot 1^2\right] - \left[-0^3 + \frac{3}{2}\cdot 0^2\right] = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} = \boxed{0.5\ u^2}$$

El área de la región encerrada entre las dos funciones tiene un valor de 0.5 unidades cuadradas.


1
$h(x) = -3x^2 + e^{2x^3-1}$
2
-1
$f(x) = -3x + e^{2x^3-1}$

**5.** Sean $r_1$ y $r_2$ las rectas definidas por $r_1 : x-1=y=-z$ y por $r_2 : x=y=z$, respectivamente.

***a)*** Calcule la ecuación paramétrica de la recta que corta perpendicularmente las rectas $r_1$ y $r_2$. [1,75 puntos]

***b)*** Calcule la distancia entre $r_1$ y $r_2$. [0,75 puntos]

Hallamos un punto y un vector director de cada recta. También sus ecuaciones paramétricas.

$$r_1 : x-1=y=-z \Rightarrow r_1 : \frac{x-1}{1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-0}{-1} \Rightarrow r_1 : \begin{cases} P_1(1,0,0)\in r_1 \\ \vec{u_1}=(1,1,-1) \end{cases} \Rightarrow r_1 : \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=\alpha \\ z=-\alpha \end{cases}$$

$$r_2 : x=y=z \Rightarrow r_2 : \frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-0}{1} \Rightarrow r_2 : \begin{cases} Q_2(0,0,0)\in r_2 \\ \vec{v_2}=(1,1,1) \end{cases} \Rightarrow r_2 : \begin{cases} x=\beta \\ y=\beta \\ z=\beta \end{cases}$$

Estudiamos la posición relativa de las rectas.
Como las coordenadas de sus vectores directores no son proporcionales las rectas ni son paralelas ni coincidentes. Las rectas se cortan o cruzan.

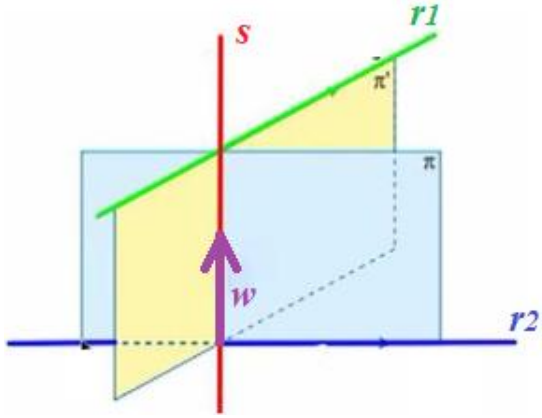
$$\left.\begin{array}{l} \vec{u_1}=(1,1,-1) \\ \vec{v_2}=(1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{1}=\frac{1}{1}\neq\frac{-1}{1}$$

Calculamos el valor del producto mixto $\left[\vec{u_1},\vec{v_2},\overrightarrow{P_1Q_2}\right]$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{P_1Q_2}=(0,0,0)-(1,0,0)=(-1,0,0) \\ \vec{u_1}=(1,1,-1) \\ \vec{v_2}=(1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\vec{u_1},\vec{v_2},\overrightarrow{P_1Q_2}\right]=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0-1-0-1-0-0=-2\neq 0$$

Al ser $\left[\vec{u_1},\vec{v_2},\overrightarrow{P_1Q_2}\right]\neq 0$ las rectas se cruzan.

a) Para hallar la recta *s* que corta perpendicularmente las rectas $r_1$ y $r_2$ seguimos el esquema del dibujo.



Hallamos el vector director $\vec{w}$ de la recta $s$ como el producto vectorial de los vectores directores de las rectas $r_1$ y $r_2$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u_1}=(1,1,-1)\\ \vec{v_2}=(1,1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{w}=\vec{u_1}\times\vec{v_2}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=i-j+k-k-j+i=2i-2j=(2,-2,0)$$

Hallamos el plano π que contiene a la recta $r_2$ y tiene como otro vector director $\vec{w}$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_2}=(1,1,1)\\ \vec{w}=(2,-2,0)\\ Q_2(0,0,0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix} x & y & z\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow 2y-2z-2z+2x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x+2y-4z=0\Rightarrow \boxed{\pi: x+y-2z=0}$$

Hallamos el plano π´ que contiene a la recta $r_1$ y tiene como otro vector director $\vec{w}$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u_1}=(1,1,-1)\\ \vec{w}=(2,-2,0)\\ P_1(1,0,0)\in\pi'\end{array}\right\}\Rightarrow \pi':\begin{vmatrix} x-1 & y & z\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -2 & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow -2y-2z-2z-2(x-1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2y-4z-2x+2=0\Rightarrow -2x-2y-4z+2=0\Rightarrow \boxed{\pi': x+y+2z-1=0}$$

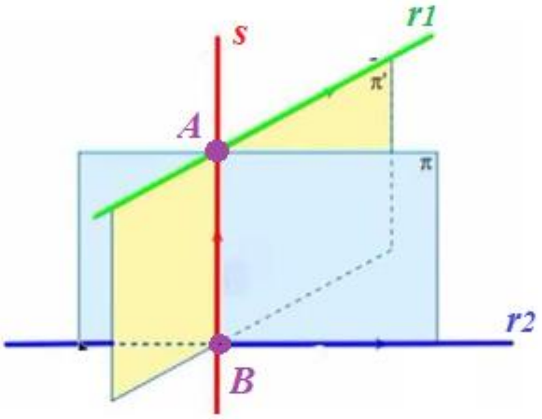
La recta $s$ es la recta donde se cortan los dos planos obtenidos. Por tanto, tiene como ecuación implícita $s:\begin{cases} x+y-2z=0\\ x+y+2z-1=0\end{cases}$.

Hallamos su ecuación paramétrica.

$$s:\begin{cases} x+y-2z=0\\ x+y+2z-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=-y+2z\\ x+y+2z-1=0\end{cases}\Rightarrow -y+2z+y+2z-1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4z-1=0\Rightarrow 4z=1\Rightarrow z=\frac{1}{4}\Rightarrow x=-y+2\frac{1}{4}=\frac{1}{2}-y\Rightarrow \boxed{s:\begin{cases} x=\frac{1}{2}-\lambda\\ y=\lambda \qquad ,\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=\frac{1}{4}\end{cases}}$$

b) La distancia entre las rectas $r_1$ y $r_2$ es la distancia entre los puntos A y B del dibujo.




El punto A es el punto de corte de la recta $r_1$ y el plano π.

$$\left.\begin{array}{l}\pi : x+y-2z=0 \\ r_1 : \begin{cases} x = 1+\alpha \\ y=\alpha \\ z=-\alpha \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow 1+\alpha+\alpha+2\alpha=0 \Rightarrow 4\alpha=-1 \Rightarrow \alpha=\frac{-1}{4} \Rightarrow \boxed{A\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{-1}{4}\right)}$$

El punto B es el punto de corte de la recta $r_2$ y el plano π´.

$$\left.\begin{array}{l} r_2 : \begin{cases} x=\beta \\ y=\beta \\ z=\beta \end{cases} \\ \pi' : x+y+2z-1=0\end{array}\right\} \Rightarrow \beta+\beta+2\beta-1=0 \Rightarrow 4\beta=1 \Rightarrow \beta=\frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)}$$

La distancia entre las rectas es la distancia entre los puntos A y B.

$$\left.\begin{array}{l} A\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{-1}{4}\right) \\ B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{-1}{4}\right) = \left(\frac{-2}{4},0,\frac{2}{4}\right) = \left(\frac{-1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$$

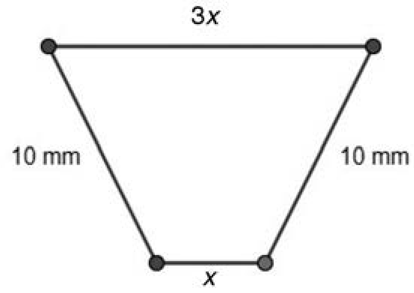
$$d(r_1,r_2) = d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0.707 \text{ unidades}}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Con una fórmula.

$$d(r_1,r_2) = \left|\frac{\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{P_1Q_2}\right]}{\left|\overrightarrow{u_1}\times\overrightarrow{v_2}\right|}\right| = \left|\frac{\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{P_1Q_2}\right]}{\left|\overrightarrow{w}\right|}\right| = \left|\frac{-2}{\sqrt{2^2+(-2)^2+0^2}}\right| = \frac{2}{\sqrt{8}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ unidades}}$$

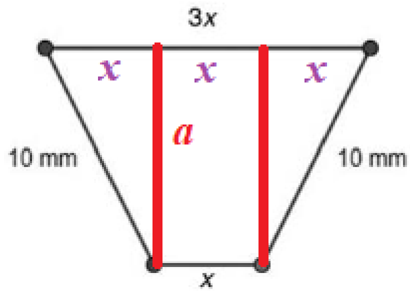
**6**. Queremos construir una pieza metálica que tenga por sección un trapecio isósceles con la base superior tres veces más larga que la base inferior. Los otros lados del trapecio miden 10 mm, tal y como se puede observar en la siguiente figura:




***a)*** Expresse la altura del trapecio en función de la longitud *x* de la base inferior. [0,5 puntos]

***b)*** Calcule la longitud de la base inferior del trapecio de forma que el área de la pieza sea máxima y encuentre el valor de esa área máxima. . [2 puntos]

a) Dibujamos la situación planteada en busca de un triángulo que nos permita hallar la altura pedida.




Consideramos el triángulo rectángulo de catetos *x*, *a* y de hipotenusa 10 y utilizamos el teorema de Pitágoras → $x^2+a^2=10^2 \Rightarrow a^2=100-x^2 \Rightarrow \boxed{a(x)=\sqrt{100-x^2},\ siendo\ 0\le x\le 10}$

b) El área del trapecio es el producto de la media de las dos bases por la altura.

$$Área=A(x)=\frac{x+3x}{2}\cdot a(x)=2x\sqrt{100-x^2}=\sqrt{4x^2\left(100-x^2\right)}=\sqrt{400x^2-4x^4}$$

Buscamos el máximo de esta función. Usamos la derivada.

$$A(x)=\sqrt{400x^2-4x^4}\Rightarrow A'(x)=\frac{800x-16x^3}{2\sqrt{400x^2-4x^4}}$$

$$A'(x)=0\Rightarrow\frac{800x-16x^3}{2\sqrt{400x^2-4x^4}}=0\Rightarrow 800x-16x^3=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16x\left(50-x^2\right)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=0}\\ 50-x^2=0\Rightarrow\boxed{x=\sqrt{50}\simeq 7.07\,mm}\end{cases}$$

El valor *x = 0* no lo tenemos en cuenta pues el área sería 0. El valor negativo de $x=-\sqrt{50}$ tampoco lo tenemos en cuenta, pues no existe una longitud negativa.

Comprobamos si en $x=\sqrt{50}$ hay un máximo estudiando el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $\left(0,\sqrt{50}\right)$ tomamos *x = 1* y la derivada vale

  $A'(1)=\dfrac{800\cdot 1-16\cdot 1^3}{2\sqrt{400\cdot 1^2-4\cdot 1^4}}=\dfrac{784}{+}>0$. La función crece en $\left(0,\sqrt{50}\right)$.
- En el intervalo $\left(\sqrt{50},10\right)$ tomamos *x = 8* y la derivada vale

  $A'(8)=\dfrac{800\cdot 8-16\cdot 8^3}{2\sqrt{400\cdot 8^2-4\cdot 8^4}}=\dfrac{-1792}{+}<0$. La función decrece en $\left(\sqrt{50},10\right)$.

La función cambia de crecer a decrecer en $x=\sqrt{50}$, por lo que la función área tiene un máximo relativo en $x=\sqrt{50}$.
Calculamos el valor de esa área máxima del trapecio de base inferior $x=\sqrt{50}$.

$$\acute{A}rea=A\left(\sqrt{50}\right)=2\sqrt{50}\sqrt{100-\left(\sqrt{50}\right)^2}=2\sqrt{50}\sqrt{50}=\boxed{100\ mm^2}$$

Un trapecio de base inferior $x=\sqrt{50}\simeq 7.1\ mm$ tiene un área máxima con valor 100 mm$^2$.