UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2022-2023**
MATERIA: **MATEMÁTICAS II**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b+c & 2 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} c & 2a+4 \\ 4b+4c+2 & 11 \end{pmatrix}$. Determine los valores de a, b y c sabiendo que dichas matrices verifican simultáneamente estas tres condiciones:

- la matriz AB es simétrica, es decir, coincide con su traspuesta.
- la matriz A + B no tiene inversa.
- la matriz AB − C es igual a la matriz identidad.

.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se quiere construir un depósito de barro cilíndrico de volumen 432π dm^3 para elaborar un vino artesanal usando técnicas antiguas. El depósito se sitúa verticalmente, apoyado sobre su base circular. Se sabe que al utilizar ese material poroso se produce, con el tiempo, una pérdida de líquido a través de la superficie que está en contacto con el vino. Dicha pérdida a través de la pared lateral es de 10 cl por dm^2 y a través del suelo de 20 cl por dm^2.

Calcular las dimensiones que debe tener el depósito para que la filtración de vino sea mínima.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Consideremos las rectas

$$r \equiv \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{1}, \qquad s \equiv \begin{cases} x+2z=1 \\ y-z=1 \end{cases}$$

a) (1 punto) Determine la posición relativa de las rectas r y s, y calcule su intersección si existe.
b) (1 punto) Calcule una ecuación del plano que contiene a r y s.
c) (0.5 puntos) Indique el ángulo que forman las rectas r y s.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se tiene un dado de nueve caras numeradas con los números del 2 al 10, cada uno con igual probabilidad de salir al lanzar el dado.

a) (0.5 puntos) Si se lanza una vez el dado, calcule la probabilidad del suceso “el resultado es un número primo”.
b) (1 punto) Se lanza el dado dos veces consecutivas y se suman los resultados. Calcule la probabilidad de que la suma sea par.
c) (1 punto) Se lanza el dado dos veces consecutivas y la suma de los dos resultados es impar. Calcule la probabilidad de que el resultado del primer lanzamiento haya sido primo.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una empresa conservera fabrica latas de macedonia de frutas (melocotón, pera y piña) de 1 kg. Las latas contienen 750 gramos de fruta y el resto es agua y azúcar. Si la empresa utiliza la misma cantidad de todas las frutas, el coste en fruta por lata para la conservera es de 1.8 euros y, si utiliza 0.25 kg de melocotón y 100 gramos más de piña que de pera, el coste en fruta por lata es de 1.9 euros. Si la empresa paga 18000 euros por un lote compuesto de 3000 kg de melocotón, 3000 kg de pera y 2000 kg de piña, calcule el coste para la empresa de cada kg de melocotón, de pera y de piña.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x) = x^4 - 4x - 1$,

a) (0.5 puntos) Estudie los máximos y los mínimos relativos de *f*.
b) (0.5 puntos) Justifique que la función *f* se anula en un punto del intervalo [0, 2].
c) (0.75 puntos) Justifique que la ecuación $x^4 - 4x - 1 = 0$ solo tiene dos raíces reales.
d) (0.75 puntos) Halle el área comprendida entre la gráfica de la función *f* y la recta $y = -4x$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - z = 4 \end{cases}$ y el punto $A(4, -3, 4)$, se pide:

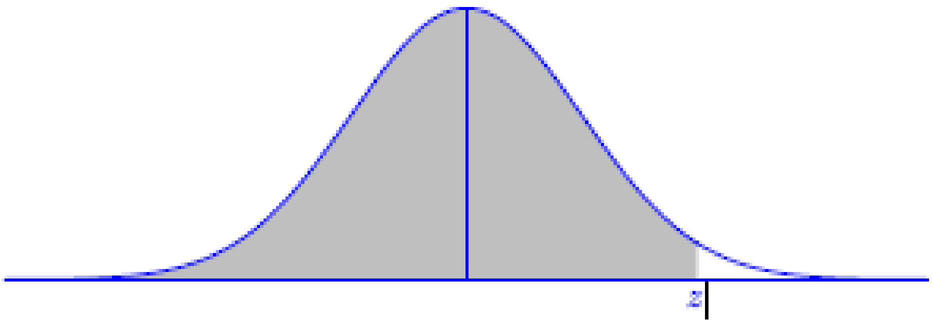
a) (1.25 puntos) Calcular la distancia del punto A a la recta *r*. ¿En qué punto de la recta se alcanza?
b) (1.25 puntos) Calcular el volumen del tetraedro determinado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y el plano perpendicular a *r* que pasa por el punto A.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un determinado jugador de baloncesto tiene un porcentaje de éxito del 85% en tiros libres y del 20% en tiros desde el centro del campo.

a) (1.5 puntos) Para finalizar el calentamiento antes de cada partido el citado jugador lanza cuatro tiros libres y cuatro tiros desde el centro del campo. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte tres de los cuatro tiros libres? ¿Cuál es la probabilidad de que acierte tres de los cuatro tiros desde el centro del campo? ¿Y la de que acierte tres tiros libres y tres desde el centro del campo de los ocho lanzados?
b) (1 punto) Calcule, mediante la aproximación por una normal, la probabilidad de que el citado jugador falle al menos el 20% de los tiros libres de una serie de 200 tiros libres.

Distribución Normal



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0,1)$, $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b+c & 2 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} c & 2a+4 \\ 4b+4c+2 & 11 \end{pmatrix}$. Determine los valores de a, b y c sabiendo que dichas matrices verifican simultáneamente estas tres condiciones:

- la matriz AB es simétrica, es decir, coincide con su traspuesta.
- la matriz A + B no tiene inversa.
- la matriz AB − C es igual a la matriz identidad.

Calculamos la matriz AB.

$$AB=\begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b+c & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+2b+2c & 2a+4 \\ 2+4b+4c & 4+8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+2b+2c & 2a+4 \\ 2+4b+4c & 12 \end{pmatrix}$$

Si la matriz AB es simétrica:

$$AB=\begin{pmatrix} a+2b+2c & 2a+4 \\ 2+4b+4c & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow (AB)^T=\begin{pmatrix} a+2b+2c & 2+4b+4c \\ 2a+4 & 12 \end{pmatrix}$$

$$AB=(AB)^T \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2b+2c & 2a+4 \\ 2+4b+4c & 12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+2b+2c & 2+4b+4c \\ 2a+4 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{2a+4=2+4b+4c \Rightarrow 2a-4b-4c=-2 \Rightarrow \boxed{a-2b-2c=-1}\right.$$

Calculamos la matriz A + B.

$$A+B=\begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b+c & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+a & 4 \\ 2+b+c & 6 \end{pmatrix}$$

Si la matriz A + B no tiene inversa implica que su determinante vale cero.

$$|A+B|=\begin{vmatrix} 1+a & 4 \\ 2+b+c & 6 \end{vmatrix}=6+6a-4(2+b+c)=6+6a-8-4b-4c=-2+6a-4b-4c$$

$$|A+B|=0 \Rightarrow -2+6a-4b-4c=0 \Rightarrow \boxed{3a-2b-2c=1}$$

Calculamos la matriz AB – C.

$$AB-C=\begin{pmatrix} a+2b+2c & 2a+4 \\ 2+4b+4c & 12 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} c & 2a+4 \\ 4b+4c+2 & 11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+2b+c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si la matriz AB − C es igual a la matriz identidad ternemos que:

$$AB-C=I \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2b+c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{a+2b+c=1}$$

Reunimos las tres igualdades obtenidas en un sistema de ecuaciones y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} a-2b-2c=-1 \\ 3a-2b-2c=1 \\ a+2b+c=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=-1+2b+2c \\ 3a-2b-2c=1 \\ a+2b+c=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3(-1+2b+2c)-2b-2c=1 \\ -1+2b+2c+2b+c=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

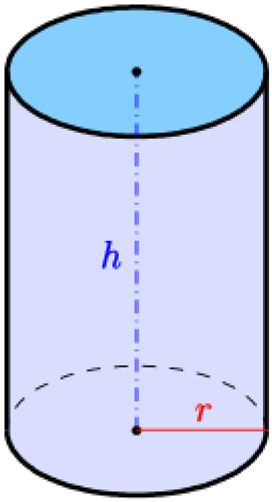
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -3+6b+6c-2b-2c=1 \\ 4b+3c=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4b+4c=4 \rightarrow b+c=1 \rightarrow b=1-c \\ 4b+3c=2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(1-c)+3c=2 \Rightarrow 4-4c+3c=2 \Rightarrow -c=-2 \Rightarrow \boxed{c=2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b=1-2=-1} \Rightarrow \boxed{a=-1+2(-1)+2(2)=1}$$

Los valores buscados son $a = 1$, $b = -1$ y $c = 2$.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Se quiere construir un depósito de barro cilíndrico de volumen 432π dm^3 para elaborar un vino artesanal usando técnicas antiguas. El depósito se sitúa verticalmente, apoyado sobre su base circular. Se sabe que al utilizar ese material poroso se produce, con el tiempo, una pérdida de líquido a través de la superficie que está en contacto con el vino. Dicha pérdida a través de la pared lateral es de 10 cl por dm^2 y a través del suelo de 20 cl por dm^2.
Calcular las dimensiones que debe tener el depósito para que la filtración de vino sea mínima.



Un cilindro viene definido por el radio (r) de la base y la altura (h) como aparece en la figura superior.
La superficie de la base es πr^2 por donde se pierde $20\pi r^2$ cl.
La superficie lateral es $2\pi r\cdot h$ por donde se pierde $2\pi r\cdot h\cdot 10 = 20\pi rh$ cl.

En total se pierde $P(r,h) = 20\pi r^2 + 20\pi rh$.
El volumen del cilindro es $\pi r^2 h$.
Como el cilindro tiene volumen 432π dm^3 tenemos que:

$$\pi r^2 h = 432\pi \Rightarrow r^2 h = 432 \Rightarrow h = \frac{432}{r^2}$$

Lo sustituimos en la función pérdida y tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} P(r,h) = 20\pi r^2 + 20\pi rh \\ h = \dfrac{432}{r^2} \end{array}\right\} \Rightarrow P(r) = 20\pi r^2 + 20\pi r\frac{432}{r^2} = 20\pi r^2 + \frac{8640\pi}{r} = \frac{20\pi r^3 + 8640\pi}{r}$$

Deseamos hallar el mínimo de la función $P(r) = \dfrac{20\pi r^3 + 8640\pi}{r}$.
Hallamos su derivada y la igualamos a cero, en busca de sus puntos críticos.

$$P'(r) = \frac{(60\pi r^2)r - (20\pi r^3 + 8640\pi)}{r^2} = \frac{60\pi r^3 - 20\pi r^3 - 8640\pi}{r^2} = \frac{40\pi r^3 - 8640\pi}{r^2}$$

$$P'(r)=0 \Rightarrow \frac{40\pi r^3-8640\pi}{r^2}=0 \Rightarrow 40\pi r^3-8640\pi=0 \Rightarrow r^3-216=0 \Rightarrow$$

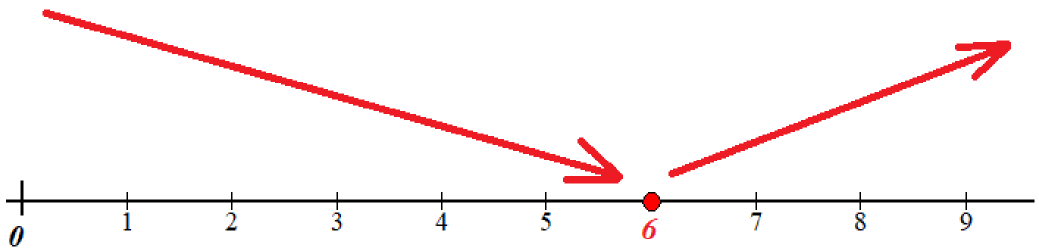
$$\Rightarrow \boxed{r=\sqrt[3]{216}=6}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de *r* = *6*.

En el intervalo (0, 6) tomamos *r* = *1* y la derivada vale $P'(1)=\frac{40\pi \cdot 1^3-8640\pi}{1^2}=-8600\pi<0$.
La función decrece en (0, 6).

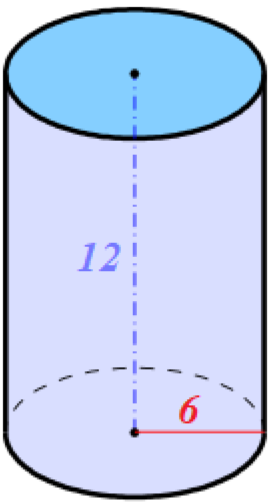
Después de *r* = *6* tomamos *r* = *10* y la derivada vale $P'(10)=\frac{40\pi \cdot 10^3-8640\pi}{10^2}=\frac{31360\pi}{100}>0$.
La función crece a partir de *r* = *6*.

La función decrece antes de *r* = *6* y crece después de *r* = *6*, por lo que la función tiene un mínimo en dicho valor.



Para un radio de 6 dm la altura vale $h=\frac{432}{6^2}=12$ dm.

Las pérdidas son mínimas con un depósito cilíndrico con una base de radio 6 dm y con una altura de 12 dm.



A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Consideremos las rectas

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1}, \qquad s \equiv \begin{cases} x+2z=1 \\ y-z=1 \end{cases}$$

a) (1 punto) Determine la posición relativa de las rectas *r* y *s*, y calcule su intersección si existe.
b) (1 punto) Calcule una ecuación del plano que contiene a *r* y *s*.
c) (0.5 puntos) Indique el ángulo que forman las rectas *r* y *s*.

a) Hallamos un vector director y un punto de cada recta.

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P_r(0,1,2) \\ \overrightarrow{v_r} = (1,-1,1) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x+2z=1 \\ y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-2z \\ y=1+z \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} Q_s(1,1,0) \\ \overrightarrow{u_s} = (-2,1,1) \end{cases}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas ni son paralelas ni coincidentes.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-2,1,1) \\ \overrightarrow{v_r} = (1,-1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-2}{1} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1}$$

Las rectas se cortan o cruzan.
Calculamos el valor del producto mixto $\left[\overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right]$ para decidir si se cortan o cruzan.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-2,1,1) \\ \overrightarrow{v_r} = (1,-1,1) \\ \overrightarrow{P_rQ_s} = (1,1,0)-(0,1,2) = (1,0,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right] = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4+1+1+2=0$$

Como el producto mixto es nulo las rectas se cortan.
Hallamos el punto de corte resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} P_r(0,1,2) \\ \overrightarrow{v_r} = (1,-1,1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\alpha \\ y=1-\alpha \\ z=2+\alpha \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 1-2\lambda=\alpha \\ 1+\lambda=1-\alpha \\ \lambda=2+\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+\lambda = 1-(1-2\lambda) \\ \lambda = 2+1-2\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+\lambda = 1-1+2\lambda \rightarrow -\lambda = -1 \rightarrow \lambda = 1 \\ 3\lambda = 3 \rightarrow \lambda = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1-2 = -1 \\ y = 1+1 = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-1,2,1)}$$

El punto A de corte de las rectas r y s es el punto $A(-1,2,1)$.

b) El plano que contiene a las rectas r y s tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas y contiene el punto $A(-1,2,1)$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{u_s} = (-2,1,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{v_r} = (1,-1,1) \\ A(-1,2,1) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+1+y-2+2(z-1)-(z-1)+2(y-2)+x+1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+1+y-2+2z-2-z+1+2y-4+x+1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi : 2x+3y+z-5 = 0}$$

c) El ángulo que forman las rectas es el formado por sus vectores directores.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-2,1,1) \\ \overrightarrow{v_r} = (1,-1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{v_r}\right) = \frac{\left|\overrightarrow{u_s} \cdot \overrightarrow{v_r}\right|}{\left|\overrightarrow{u_s}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_r}\right|} = \frac{\left|(-2,1,1)(1,-1,1)\right|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{v_r}\right) = \frac{|-2-1+1|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}} = \frac{|-2|}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \boxed{\left(\overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{v_r}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) \simeq 61.87^{\circ}}$$

El ángulo formado por las rectas r y s es de, aproximadamente, 61.87º.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Se tiene un dado de nueve caras numeradas con los números del 2 al 10, cada uno con igual probabilidad de salir al lanzar el dado.
a) (0.5 puntos) Si se lanza una vez el dado, calcule la probabilidad del suceso "el resultado es un número primo".
b) (1 punto) Se lanza el dado dos veces consecutivas y se suman los resultados. Calcule la probabilidad de que la suma sea par.
c) (1 punto) Se lanza el dado dos veces consecutivas y la suma de los dos resultados es impar. Calcule la probabilidad de que el resultado del primer lanzamiento haya sido primo.

a) Para sacar un número primo debe salir 2, 3, 5 o 7. Hay 4 resultados favorables de 9 posibles. Aplicamos la regla de Laplace:

$$P(\text{Sacar nº primo}) = \boxed{\frac{4}{9} \simeq 0.4444}$$

b) Al repetir el lanzamiento dos veces los resultados posibles son:

2 2, 2 3, 2 4, 2 5, 2 6, 2 7, 2 8, 2 9, 2 10
3 2, 3 3, 3 4, 3 5, 3 6, 3 7, 3 8, 3 9, 3 10
….
10 2, 10 3, 10 4, 10 5, 10 6, 10 7, 10 8, 10 9, 10 10

Un total de 9 · 9 = 81 resultados posibles.
De todos ellos la suma es par cuando los dos resultados son pares o los dos impares.
Es muy largo escribir todos los resultados favorables. Lo resolvemos de otra forma.
Llamamos P1 y P2 a sacar par en el primer lanzamiento o en el segundo.
Llamamos I1 e I2 a sacar impar en el primer o segundo lanzamiento.

$$P(Suma\ par) = P(P1 \cap P2) + P(I1 \cap I2) = P(P1)P(P2) + P(I1)P(I2) =$$

$$= \frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9} + \frac{4}{9}\cdot\frac{4}{9} = \boxed{\frac{41}{81} \simeq 0.5062}$$

c) Nos piden calcular $P(\Pr imo1/Suma\,impar)$. Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Primo1/Suma impar}) = \frac{P(\text{Primo1} \cap \text{Suma impar})}{P(\text{Suma impar})} = \frac{}{1 - P(\text{Suma par})}$$

Calculamos $P(\text{Primo1} \cap \text{Suma impar})$.
El suceso "Primo en primer lanzamiento" y "Suma impar con los dos lanzamientos" se cumple en los siguientes casos:

2 3, 2 5, 2 7, 2 9
3 2, 3 4, 3 6, 3 8, 3 10
5 2, 5 4, 5 6, 5 8, 5 10
7 2, 7 4, 7 6, 7 8, 7 10

El suceso se cumple en 19 de los 81 resultados posibles y su probabilidad es $\frac{19}{81}$.

Continuamos calculando la probabilidad pedida.

$$P(\text{Primo1/Suma impar}) = \frac{P(\text{Primo1} \cap \text{Suma impar})}{P(\text{Suma impar})} = \frac{\frac{19}{81}}{1 - P(\text{Suma par})} =$$

$$= \frac{\frac{19}{81}}{1 - \frac{41}{81}} = \boxed{\frac{19}{40} = 0.475}$$

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Una empresa conservera fabrica latas de macedonia de frutas (melocotón, pera y piña) de 1 kg. Las latas contienen 750 gramos de fruta y el resto es agua y azúcar. Si la empresa utiliza la misma cantidad de todas las frutas, el coste en fruta por lata para la conservera es de 1.8 euros y, si utiliza 0.25 kg de melocotón y 100 gramos más de piña que de pera, el coste en fruta por lata es de 1.9 euros. Si la empresa paga 18000 euros por un lote compuesto de 3000 kg de melocotón, 3000 kg de pera y 2000 kg de piña, calcule el coste para la empresa de cada kg de melocotón, de pera y de piña.

Llamamos "x" al precio del kilo de melocotón, "y" al precio del kilo de pera y "z" al precio del kilo de piña.

"Si la empresa utiliza la misma cantidad de todas las frutas, el coste en fruta por lata para la conservera es de 1.8 euros" → De los 0.750 kilos de fruta del bote se utilizan 0.250 kilos de cada fruta → $0.250x+0.250y+0.250z=1.8$.

"Si utiliza 0.25 kg de melocotón y 100 gramos más de piña que de pera, el coste en fruta por lata es de 1.9 euros" → se utilizan 250 gramos de melocotón y 500 gramos entre pera y piña, como se utilizan 100 gramos más de piña que de pera entonces se utilizan 300 gramos de piña y 200 de pera → $0.25x+0.2y+0.3z=1.9$.

"Si la empresa paga 18000 euros por un lote compuesto de 3000 kg de melocotón, 3000 kg de pera y 2000 kg de piña" → $3000x+3000y+2000z=18000$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 0.250x+0.250y+0.250z=1.8 \\ 0.25x+0.2y+0.3z=1.9 \\ 3000x+3000y+2000z=18000 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=7.2 \\ 25x+20y+30z=190 \\ 3x+3y+2z=18 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=7.2 \\ 5x+4y+6z=38 \\ 3x+3y+2z=18 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=7.2-y-z \\ 5x+4y+6z=38 \\ 3x+3y+2z=18 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5(7.2-y-z)+4y+6z=38 \\ 3(7.2-y-z)+3y+2z=18 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 36-5y-5z+4y+6z=38 \\ 21.6-3y-3z+3y+2z=18 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -y+z=2 \\ -z=-3.6 \rightarrow \boxed{z=3.6} \end{array}\right\} \Rightarrow -y+3.6=2 \Rightarrow -y=-1.6 \Rightarrow \boxed{y=1.6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=7.2-1.6-3.6=2}$$

El precio del melocotón es 2 €/kg, el de la pera es 1.6 €/kg y el de la piña es 3.6 €/kg.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sea la función $f(x) = x^4 - 4x - 1$,
a) (0.5 puntos) Estudie los máximos y los mínimos relativos de *f*.
b) (0.5 puntos) Justifique que la función *f* se anula en un punto del intervalo [0, 2].
c) (0.75 puntos) Justifique que la ecuación $x^4 - 4x - 1 = 0$ solo tiene dos raíces reales.
d) (0.75 puntos) Halle el área comprendida entre la gráfica de la función *f* y la recta $y = -4x$.

a) Obtenemos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 4x^3 - 4 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4x^3 - 4 = 0 \Rightarrow x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1} = 1$$

Sustituimos *x = 1* en la segunda derivada.

$$f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(1) = 12 \cdot 1^2 = 12 > 0 \rightarrow x = 1 \text{ es mínimo relativo}$$

Sabemos que $f(1) = 1^4 - 4 \cdot 1 - 1 = -4$.
La función tiene un mínimo relativo en el punto (1, –4). La función no tiene máximo relativo.

b) Aplicamos el teorema de Bolzano a la función en el intervalo [0, 2].
La función es continua en el intervalo pues es una función polinómica.
La función toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0^4 - 4 \cdot 0 - 1 = -1 < 0 \\ f(2) = 2^4 - 4 \cdot 2 - 1 = 7 > 0 \end{array}\right\}$$

Aplicando el teorema de Bolzano existe $c \in (0, 2)$ tal que *f(c) = 0*.

c) Buscamos el otro valor que anula la función antes de *x = 0*.
Tomamos el intervalo [-2, 0].
La función es continua en el intervalo.
La función toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0^4 - 4 \cdot 0 - 1 = -1 < 0 \\ f(-2) = (-2)^4 - 4 \cdot (-2) - 1 = 23 > 0 \end{array}\right\}$$

Aplicando el teorema de Bolzano existe $c' \in (-2, 0)$ tal que *f(c´) = 0*.

Hemos demostrado que tiene dos raíces. Solo tiene esas dos pues la función decrece antes de 1 (solo puede cortar una vez el eje de abscisas) y crece después de 1 (solo puede cortar una vez el eje de abscisas).

d) Hallamos los puntos de corte de las gráficas de la función y la recta dada.

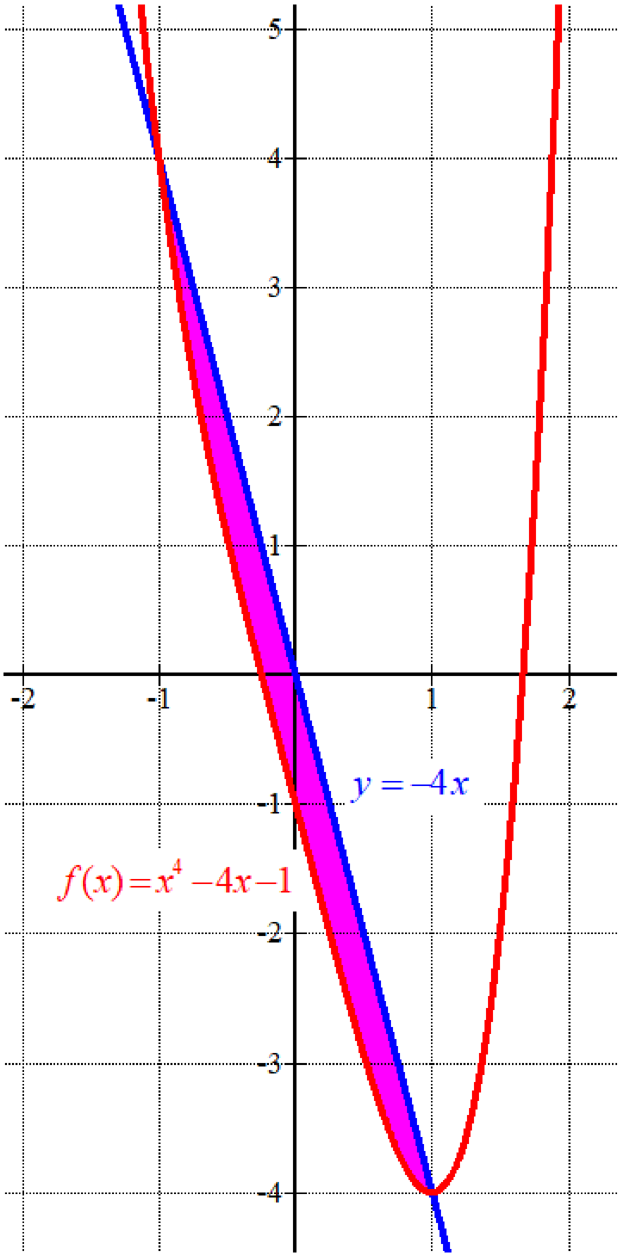
$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^4 - 4x - 1 \\ y = -4x \end{array}\right\} \Rightarrow x^4 - 4x - 1 = -4x \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x = \sqrt[4]{1} = \pm 1$$

El área pedida es el valor absoluto de la integral definida entre –1 y 1 de la diferencia de las dos funciones.

$$\int_{-1}^{1} x^4-4x-1-(-4x)\,dx=\int_{-1}^{1} x^4-1dx=\left[\frac{x^5}{5}-x\right]_{-1}^{1}=$$

$$=\left[\frac{1^5}{5}-1\right]-\left[\frac{(-1)^5}{5}-(-1)\right]=\frac{1}{5}-1+\frac{1}{5}-1=\frac{2}{5}-2=\frac{-8}{5}=-1.6$$

El área comprendida entre la gráfica de la función *f* y la recta $y=-4x$ tiene un valor de 1.6 unidades cuadradas.



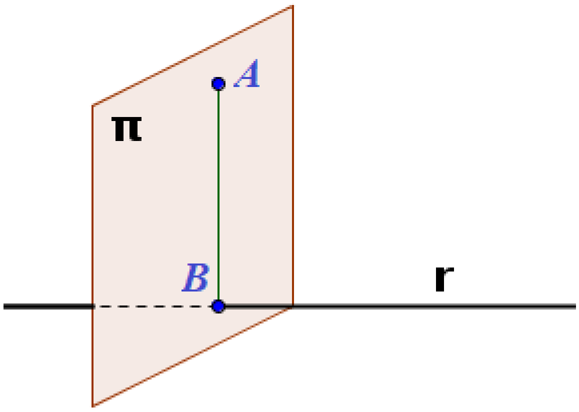
B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z=2 \\ x-z=4 \end{cases}$ y el punto $A(4,-3,4)$, se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular la distancia del punto A a la recta *r*. ¿En qué punto de la recta se alcanza?

b) (1.25 puntos) Calcular el volumen del tetraedro determinado por los planos *x = 0*, *y = 0*, *z = 0* y el plano perpendicular a *r* que pasa por el punto A.

a) Obtendremos la proyección ortogonal del punto A en la recta *r*.



Hallamos el plano π perpendicular a la recta *r* que pasa por el punto A. Este plano tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=2 \\ x-z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ x=4+z \end{cases} \Rightarrow 4+z+y+z=2 \Rightarrow 2z+y=-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=-2-2z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=4+\lambda \\ y=-2-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P_r(4,-2,0) \\ \vec{v}_r=(1,-2,1) \end{cases}$$

$$\pi \equiv \begin{cases} \vec{n}=\vec{v}_r=(1,-2,1) \\ A(4,-3,4)\in\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi \equiv x-2y+z+D=0 \\ A(4,-3,4)\in\pi \end{cases} \Rightarrow 4-2(-3)+4+D=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14+D=0 \Rightarrow D=-14 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x-2y+z-14=0}$$

Hallamos las coordenadas del punto B intersección del plano π y la recta *r*.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x-2y+z-14=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=4+\lambda \\ y=-2-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 4+\lambda-2(-2-2\lambda)+\lambda-14=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4+\lambda+4+4\lambda+\lambda-14=0 \Rightarrow 6\lambda-6=0 \Rightarrow 6\lambda=6 \Rightarrow \lambda=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4+1 = 5 \\ y = -2-2 = -4 \Rightarrow \boxed{B(5,-4,1)} \\ z = 1 \end{cases}$$

La distancia del punto A a la recta *r* es la distancia del punto A al punto B. Este valor es el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = (5,-4,1)-(4,-3,4) = (1,-1,-3)$$

$$d(A,r) = d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2+(-1)^2+(-3)^2} = \boxed{\sqrt{11} \simeq 3.3166\, unidades}$$

Esta distancia se alcanza en el punto $B(5,-4,1)$ de la recta *r*.

b) El plano perpendicular a *r* que pasa por el punto A tiene ecuación $\pi \equiv x-2y+z-14=0$.
Nos piden hallar el volumen del tetraedro determinado por los planos *x = 0, y = 0, z = 0* y $\pi \equiv x-2y+z-14=0$.
Hallamos las coordenadas de los vértices del tetraedro.
Los tres planos *x = 0, y = 0, z = 0* se cortan en el punto O(0, 0, 0).
Punto de corte del plano *x = 0, y = 0* y $\pi \equiv x-2y+z-14=0$.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x-2y+z-14=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow z-14=0 \Rightarrow z=14 \Rightarrow \boxed{C(0,0,14)}$$

Punto de corte del plano *x = 0,* z = *0* y $\pi \equiv x-2y+z-14=0$.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x-2y+z-14=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2y-14=0 \Rightarrow -2y=14 \Rightarrow y=-7 \Rightarrow \boxed{D(0,-7,0)}$$

Punto de corte del plano y = *0,* z = *0* y $\pi \equiv x-2y+z-14=0$.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x-2y+z-14=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x-14=0 \Rightarrow x=14 \Rightarrow \boxed{E(14,0,0)}$$

Tenemos que hallar el volumen del tetraedro OCDE. Dicho volumen es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $\left[\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OE}\right]$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OC} = (0,0,14)-(0,0,0) = (0,0,14) \\ \overrightarrow{OD} = (0,-7,0)-(0,0,0) = (0,-7,0) \\ \overrightarrow{OE} = (14,0,0)-(0,0,0) = (14,0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OE}\right] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 14 \\ 0 & -7 & 0 \\ 14 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 14\cdot 7\cdot 14 = \boxed{1372}$$

El volumen del tetraedro OCDE es $\frac{1372}{6} = \frac{686}{3} \simeq 228.67\ u^2$.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Un determinado jugador de baloncesto tiene un porcentaje de éxito del 85% en tiros libres y del 20% en tiros desde el centro del campo.
a) (1.5 puntos) Para finalizar el calentamiento antes de cada partido el citado jugador lanza cuatro tiros libres y cuatro tiros desde el centro del campo. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte tres de los cuatro tiros libres? ¿Cuál es la probabilidad de que acierte tres de los cuatro tiros desde el centro del campo? ¿Y la de que acierte tres tiros libres y tres desde el centro del campo de los ocho lanzados?
b) (1 punto) Calcule, mediante la aproximación por una normal, la probabilidad de que el citado jugador falle al menos el 20% de los tiros libres de una serie de 200 tiros libres.

a) X = Número de aciertos en tiros libres. Y = Número de aciertos en tiros desde el centro del campo.

X es una variable binomial con parámetros n = 4 y p = 0.85. X = B(4, 0.85).
Y es una variable binomial con parámetros n = 4 y p = 0.2. Y = B(4, 0.2).

Debemos calcular $P(X=3)$.

$$P(X=3)=\binom{4}{3}\cdot 0.85^3\cdot 0.15^1 \simeq \boxed{0.3685}$$

Debemos calcular $P(Y=3)$.

$$P(Y=3)=\binom{4}{3}\cdot 0.2^3\cdot 0.8^1 \simeq \boxed{0.0256}$$

Debemos calcular $P((X=3)\cap(Y=3))$.

$$P((X=3)\cap(Y=3))=P(X=3)\cdot P(Y=3)=0.368475\cdot 0.0256\simeq \boxed{0.0094}$$

b) Consideramos la variable binomial X = Número de fallos en tiros libres de un total de 200 intentos. Los parámetros son n = 200 y p = 0.15. X = B(200, 0.15)

Aproximamos esta variable binomial por una normal de parámetros $\mu = np = 200\cdot 0.15 = 30$ y $\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{200\cdot 0.85\cdot 0.15}\simeq 5.05$. Y = N(30, 5.05).

Nos piden calcular la probabilidad de fallar al menos el 20 % de los tiros → 0.20 · 200 = 40 tiros, es decir fallar 40 tiros o más.

Nos piden calcular $P(X\geq 40)$.

$$P(X\geq 40)=\{\text{Corrección de Yates}\}=P(Y\geq 39.5)=\{Tipificamos\}=$$

$$=P\left(Z\geq \frac{39.5-30}{5.05}\right)=P(Z\geq 1.88)=1-P(Z\leq 1.88)=$$

$$=\begin{Bmatrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{Bmatrix}=1-0.9699=\boxed{0.0301}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	$\boxed{0,08}$	0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	[illegible]	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	[illegible]	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	[illegible]	0,6
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	[illegible]	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	[illegible]	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	[illegible]	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	[illegible]	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	[illegible]	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	[illegible]	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	[illegible]	0,8
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	[illegible]	0,8
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	[illegible]	0,8
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	[illegible]	0,9
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	[illegible]	0,9
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	[illegible]	0,9
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	[illegible]	0,9
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	[illegible]	0,9
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	[illegible]	0,9
$\boxed{1,8}$	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9699	0,9
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9