uc3m Universidad Carlos III de Madrid	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2022-2023** MATERIA: MATEMÁTICAS II	

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la matriz real $A=\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ a & 3 & -6 \\ a+1 & 1 & a \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Estudiar el rango de la matriz A en función del parámetro *a*.
b) (1 punto) Calcular, en el caso de que exista, la inversa de A para *a* = *0*.
c) (0.5 puntos) Resolver el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ para el caso *a* = *1*.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x)=x^3+x^2+x$, se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* con mínima pendiente.
b) (1.25 puntos) Calcular el área de la región acotada comprendida entre la gráfica *f(x)* y la recta $y=x$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean los planos $\pi_1 : y=x$, $\pi_2 : y=x+1$, $\pi_3 : z=-1$ y $\pi_4 : z=1$.

a) (0.5 puntos) Compruebe que son paralelos los planos π_1 y π_2, y que son paralelos los planos π_3 y π_4.
b) (0.5 puntos) Compruebe que los planos π_1 y π_2 son perpendiculares a los planos π_3 y π_4.
c) (0.5 puntos) Halle una recta que sea paralela a los cuatro planos y pase por el punto (1, 0, 2).
d) (1 punto) Halle dos planos perpendiculares a π_1, π_2, π_3 y π_4, que cumplan que el volumen del paralelepípedo comprendido entre los seis planos sea 1.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En los juegos de rol, cada vez que se lanza un ataque este puede resultar en golpe crítico o no.

a) (1.25 puntos) En cierto juego de rol, para determinar si un ataque es crítico o no, se tira una moneda a cara o cruz. Si se obtiene una cruz, el ataque no será crítico. Por contra, si se obtiene una cara, entonces se lanza un dado de 10 caras numeradas del 1 al 10. Solo en caso de que también se obtenga una puntuación mayor o igual a 9 en el dado el ataque es crítico; en caso contrario el ataque no será crítico. Calcule la probabilidad de que, de entre 5 ataques lanzados, se obtengan 3 o menos golpes críticos.

b) (1.25 puntos) En otro juego de rol se sabe que la probabilidad de ataque crítico es del 20%. Aproximando mediante una distribución normal, calcule la probabilidad de que, de entre 100 ataques, se obtengan no menos de 15 y no más de 25 golpes críticos.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un dietista veterinario ha establecido la alimentación diaria (en términos de grasas, carbohidratos y proteínas) de un quebrantahuesos pirenaico que se ha recogido en el hogar de recuperación de fauna en el que trabaja. Se sabe que el quebrantahuesos necesita 500 g de alimento al día y que necesita 2500 Kcal. También se sabe que cada gramo de grasa proporciona 9 Kcal, cada gramo de carbohidratos 4 Kcal y cada gramo de proteínas 4 Kcal. Debido a que el ave ha llegado en un estado de debilidad, el veterinario estima que el consumo de carbohidratos debe ser 40 g más del doble de proteínas. Determine la cantidad de kilocalorías diaria que obtendrá el quebrantahuesos procedentes de grasas, de carbohidratos y de proteínas.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x)=\dfrac{\left|x^2-x-2\right|}{x^2+2x+1}$, se pide:

a) (1 punto) Hallar, si existen, las asíntotas de la gráfica de *f*.

b) (1.5 puntos) Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y calcular, si existen, sus extremos relativos.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la recta $r\equiv\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$ y los planos $\pi: x+2y+2z-1=0$ y $\pi': 2x+2y+z+4=0$, se pide:

a) (0.75 puntos) Comprobar que los planos π y π' se cortan. Hallar el ángulo que forman.

b) (0.75 puntos) Estudiar la posición relativa de r y π. Hallar, si es posible, el punto de corte.

c) (1 punto) Hallar los puntos de la recta r que equidistan de los planos π y π'.

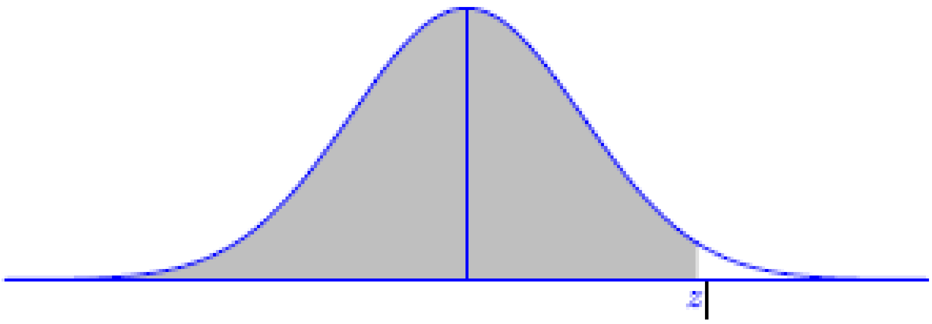
B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Siete de cada veinte personas que entran en cierta joyería acaban comprando algún artículo. El 75% de las personas que se marchan sin comprar nada tienen menos de 50 años y el 80% de las personas que realizan alguna compra tienen al menos 50 años. Entra un cliente en la joyería. Se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea menor de 50 años.

b) (1.25 puntos) Sabiendo que tiene como mínimo 50 años, hallar la probabilidad de que salga de la tienda sin haber comprado nada.

Distribución Normal



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0,1)$, $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la matriz real $A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ a & 3 & -6 \\ a+1 & 1 & a \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Estudiar el rango de la matriz A en función del parámetro *a*.
b) (1 punto) Calcular, en el caso de que exista, la inversa de A para *a = 0*.
c) (0.5 puntos) Resolver el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ para el caso *a = 1*.

a) Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2a & 1 & 1 \\ a & 3 & -6 \\ a+1 & 1 & a \end{vmatrix} = 6a^2 - 6(a+1) + a - 3(a+1) - a^2 + 12a =$$

$$= 6a^2 - 6a - 6 + a - 3a - 3 - a^2 + 12a = 5a^2 + 4a - 9$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 5a^2 + 4a - 9 = 0 \Rightarrow a = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(5)(-9)}}{2(5)} = \frac{-4 \pm 14}{10} = \begin{cases} \frac{-4+14}{10} = \boxed{1 = a} \\ \frac{-4-14}{10} = \boxed{-1.8 = a} \end{cases}$$

Se nos plantean tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $a \neq 1$ y $a \neq -1.8$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3.

CASO 2. Si $a = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3. Su rango es 2 o 1.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Tomamos el menor de orden 2 que resulta de suprimir la fila y columna 3ª → $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5 \neq 0$. El rango de A es 2.

CASO 3. Si $a = -1.8$

El determinante de A es nulo y el rango de A no es 3. Su rango es 2 o 1.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} -3.6 & 1 & 1 \\ -1.8 & 3 & -6 \\ -0.8 & 1 & -1.8 \end{pmatrix}$. Tomamos el menor de orden 2 que resulta de suprimir la fila y columna 3ª → $\begin{vmatrix} -3.6 & 1 \\ -1.8 & 3 \end{vmatrix} = -10.8 + 1.8 = -9 \neq 0$. El rango de A es 2.

Resumiendo: El rango de A es 3 si $a \neq 1$ y $a \neq -1.8$ y el rango de A es 2 si $a = 1$ o $a = -1.8$.

b) Para *a = 0* el determinante de A es no nulo y tiene inversa. La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -6 - 3 = -9 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{Asj\left(A^T\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & 0 \end{pmatrix}}{-9} = \frac{-1}{9}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{-1}{9}\begin{pmatrix} 6 & 1 & -9 \\ -6 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/9 & 1 \\ 2/3 & 1/9 & 0 \\ 1/3 & -1/9 & 0 \end{pmatrix}}$$

c) Para *a = 1* la matriz A tiene determinante nulo y no tiene inversa. La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Resolvemos el sistema.

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x + y + z = 0 \\ x + 3y - 6z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 1^a\, y\, 3^a\, ecuaciones \\ iguales \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x + y + z = 0 \\ x + 3y - 6z = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = -2x - z \\ x + 3y - 6z = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x + 3(-2x - z) - 6z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 6x - 3z - 6z = 0 \Rightarrow -5x - 9z = 0 \Rightarrow -5x = 9z \Rightarrow x = \frac{-9}{5}z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -2\frac{-9}{5}z - z = \frac{18}{5}z - z = \frac{13}{5}z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \frac{-9}{5}\lambda \\ y = \frac{13}{5}\lambda\,,\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}}$$

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dada la función $f(x)=x^3+x^2+x$, se pide:
a) (1.25 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* con mínima pendiente.
b) (1.25 puntos) Calcular el área de la región acotada comprendida entre la gráfica *f(x)* y la recta $y=x$

a) La ecuación de la recta tangente en $x = a$ es $y-f(a)=f'(a)(x-a)$.

Su pendiente es $f'(a)=3a^2+2a+1$.

Si llamamos $g(x)=f'(x)=3x^2+2x+1$ hallamos el mínimo de esta función.

Vemos cuando se anula la derivada de la función *g(x)*.

$$\left.\begin{array}{l} g'(x)=6x+2 \\ g'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 6x+2=0 \Rightarrow 6x=-2 \Rightarrow \boxed{x=\frac{-2}{6}=\frac{-1}{3}}$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada de la función *g(x)*.

$$g''(x)=6 \Rightarrow g''\left(\frac{-1}{3}\right)=6>0 \rightarrow x=\frac{-1}{3} \text{ es mínimo relativo}$$

Hallamos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en $x=\frac{-1}{3}$.

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{-1}{3}\right)=\left(\frac{-1}{3}\right)^3+\left(\frac{-1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}=\frac{-1}{27}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}=\frac{-7}{27} \\ f'\left(\frac{-1}{3}\right)=3\left(\frac{-1}{3}\right)^2+2\left(\frac{-1}{3}\right)+1=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}+1=\frac{2}{3} \\ y-f\left(\frac{-1}{3}\right)=f'\left(\frac{-1}{3}\right)\left(x-\frac{-1}{3}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow y-\frac{-7}{27}=\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y+\frac{7}{27}=\frac{2}{3}x+\frac{2}{9} \Rightarrow \boxed{y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{27}}$$

b) Hallamos los puntos de corte de la gráfica *f(x)* y la recta $y=x$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3+x^2+x \\ y=x \end{array}\right\} \Rightarrow x^3+x^2+x=x \Rightarrow x^3+x^2=0 \Rightarrow$$

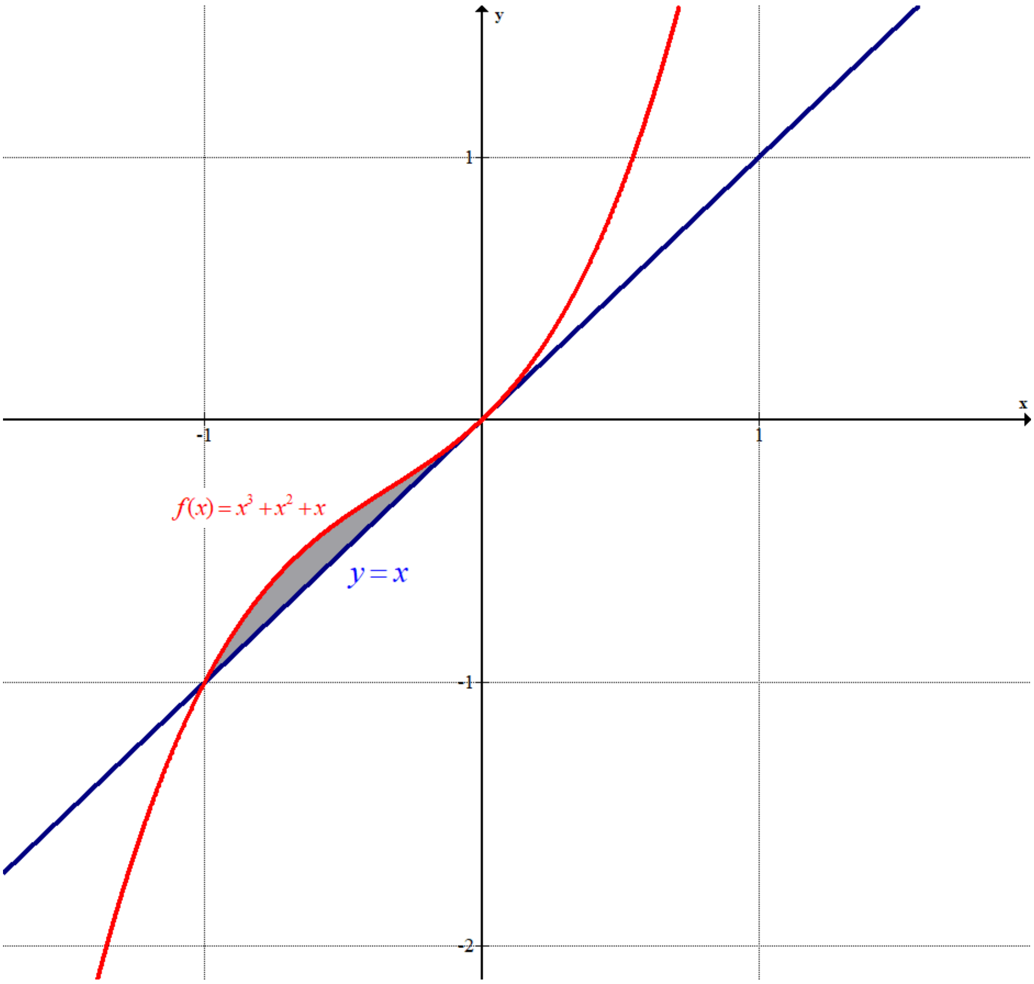
$$\Rightarrow x^2(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ x+1=0 \rightarrow \boxed{x=-1} \end{cases}$$

El área de la región acotada comprendida entre la gráfica *f(x)* y la recta $y=x$ es el valor absoluto de la integral definida entre –1 y 0 de la diferencia entre las dos funciones.

$$\int_{-1}^{0} x^3+x^2+x-xdx=\int_{-1}^{0} x^3+x^2dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}=$$

$$=\left[\frac{0^4}{4}+\frac{0^3}{3}\right]-\left[\frac{(-1)^4}{4}+\frac{(-1)^3}{3}\right]=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{12}\simeq 0.83$$

El área tiene un valor de $\frac{1}{12}\simeq 0.83$ unidades cuadradas.



A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sean los planos $\pi_1 : y = x,\ \pi_2 : y = x+1,\ \pi_3 : z = -1$ y $\pi_4 : z = 1$.
a) (0.5 puntos) Compruebe que son paralelos los planos π_1 y π_2, y que son paralelos los planos π_3 y π_4.
b) (0.5 puntos) Compruebe que los planos π_1 y π_2 son perpendiculares a los planos π_3 y π_4.
c) (0.5 puntos) Halle una recta que sea paralela a los cuatro planos y pase por el punto (1, 0, 2).
d) (1 punto) Halle dos planos perpendiculares a π_1, π_2, π_3 y π_4, que cumplan que el volumen del paralelepípedo comprendido entre los seis planos sea 1.

a) Para que los planos sean paralelos deben tener vectores normales iguales o con coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 : y = x \Rightarrow \pi_1 : -x+y=0 \Rightarrow \overrightarrow{n_1} = (-1,1,0)\\ \pi_2 : y = x+1 \Rightarrow \pi_2 : -x+y-1=0 \Rightarrow \overrightarrow{n_2} = (-1,1,0)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{n_2} \Rightarrow \boxed{\pi_1 \parallel \pi_2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\pi_3 : z = -1 \Rightarrow \pi_3 : z+1=0 \Rightarrow \overrightarrow{n_3} = (0,0,1)\\ \pi_4 : z = 1 \Rightarrow \pi_4 : z-1=0 \Rightarrow \overrightarrow{n_4} = (0,0,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{n_3} = \overrightarrow{n_4} \Rightarrow \boxed{\pi_3 \parallel \pi_4}$$

b) Para que los planos sean perpendiculares lo deben ser sus vectores normales y para ello el producto escalar de sus vectores normales debe ser nulo.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{n_2} = (-1,1,0)\\ \overrightarrow{n_3} = \overrightarrow{n_4} = (0,0,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_3} = (-1,1,0)(0,0,1) = 0+0+0 = 0$$

Los planos π_1 y π_2 son perpendiculares a los planos π_3 y π_4.

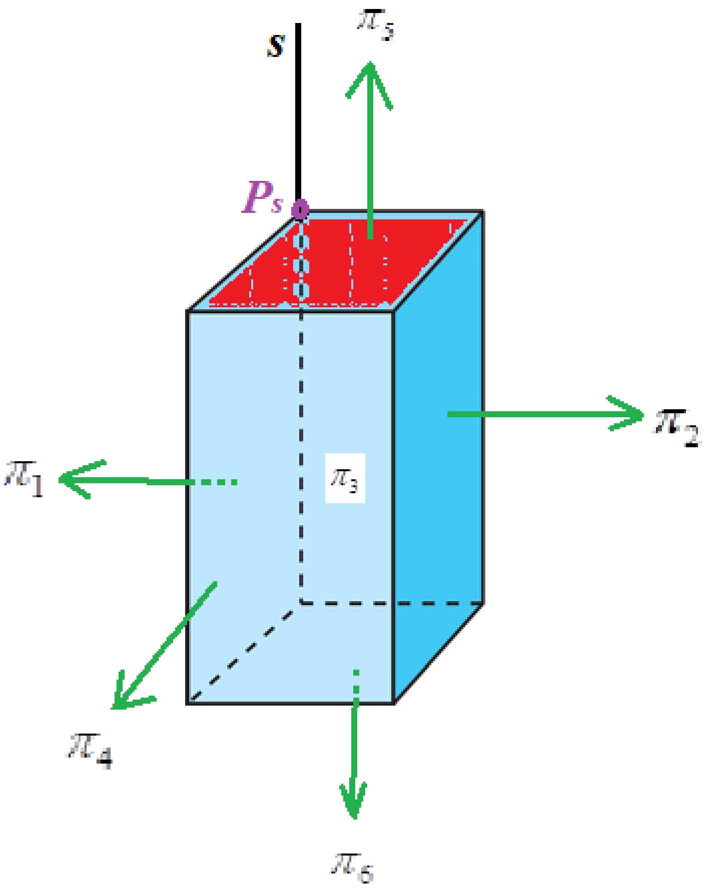
c) Como los planos π_1 y π_3 son perpendiculares la recta *r* buscada debe ser paralela a la recta *s* intersección de los dos planos.

$$s : \begin{cases}\pi_1 : y = x\\ \pi_3 : z = -1\end{cases} \Rightarrow s : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1\end{cases} \Rightarrow s : \begin{cases} P_s(0,0,-1)\\ \overrightarrow{u_s} = (1,1,0)\end{cases}$$

$$r : \begin{cases}(1,0,2) \in r\\ \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{u_s} = (1,1,0)\end{cases} \Rightarrow \boxed{r : \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\end{cases} ,\ \lambda \in \mathbb{R}}$$

d) Los 4 planos π_1, π_2, π_3 y π_4 al ser paralelos dos a dos y perpendiculares entre si forman un prisma sin base ni altura. Nos piden hallar otros dos planos paralelos π_5 y π_6 tales que son la base y la tapa que formen un prisma de volumen 1.
Como nos piden que los planos sean perpendiculares a los dados su vector normal debe ser el vector director de la recta *r* obtenida en el apartado anterior.

Esta situación tiene infinitas soluciones. Fijamos un punto del plano π_5 para limitar el número de soluciones. Por ejemplo que el punto $P_s(0,0,-1)$ que es un punto de corte de los planos π_1 y π_3 pertenece al plano π_5.



$$\left.\begin{array}{l} P_s(0,0,-1)\in\pi_5 \\ \vec{n}=\vec{v_r}=(1,1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P_s(0,0,-1)\in\pi_5 \\ \pi_5: x+y+D=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0+0+D=0 \Rightarrow D=0 \Rightarrow \boxed{\pi_5: x+y=0}$$

El otro plano π_6 debe ser paralelo a π_5 y por tanto tiene el mismo vector normal. Y además el volumen del prisma que forman los seis planos debe tener volumen 1.

$$Volumen = Área\, de\, la\, base \cdot altura = d(\pi_1,\pi_2)\cdot d(\pi_3,\pi_4)\cdot d(\pi_5,\pi_6)$$

Hallamos el valor de cada una de esas distancias.

$$\left.\begin{array}{l} P_s(0,0,-1) \\ \pi_2: -x+y-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow d(\pi_1,\pi_2)=d(P_s,\pi_2)=\frac{|-0+0-1|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} P_s(0,0,-1) \\ \pi_4: z-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow d(\pi_3,\pi_4)=d(P_s,\pi_4)=\frac{|-1-1|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=2$$

Como el volumen debe ser 1 nos queda la igualdad:

$$\left.\begin{array}{l} Volumen = d(\pi_1,\pi_2)\cdot d(\pi_3,\pi_4)\cdot d(\pi_5,\pi_6) \\ Volumen = 1 \\ d(\pi_1,\pi_2) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ d(\pi_3,\pi_4) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2\cdot d(\pi_5,\pi_6) \Rightarrow d(\pi_5,\pi_6) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

El plano está a distancia $\frac{\sqrt{2}}{2}$ del plano paralelo $\pi_5 : x+y=0$.

$$\left.\begin{array}{l} \pi_5 : x+y=0 \\ \pi_5 \parallel \pi_6 \end{array}\right\} \Rightarrow \pi_6 : x+y+D=0$$

$$\left.\begin{array}{l} d(\pi_5,\pi_6) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \pi_6 : x+y+D=0 \\ P_s(0,0,-1) \in \pi_5 \end{array}\right\} \Rightarrow d(\pi_5,\pi_6) = d(P_s,\pi_6) = \frac{|0+0+D|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{|D|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |D| = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} D = 1 \rightarrow \boxed{\pi_6 : x+y+1=0} \\ D = -1 \rightarrow \boxed{\pi_6 : x+y-1=0} \end{cases}$$

Una solución posible al problema son los planos $\pi_5 : x+y=0$ y $\pi_6 : x+y+1=0$ o bien $\pi_5 : x+y=0$ y $\pi_6 : x+y-1=0$.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
En los juegos de rol, cada vez que se lanza un ataque este puede resultar en golpe crítico o no.
a) (1.25 puntos) En cierto juego de rol, para determinar si un ataque es crítico o no, se tira una moneda a cara o cruz. Si se obtiene una cruz, el ataque no será crítico. Por contra, si se obtiene una cara, entonces se lanza un dado de 10 caras numeradas del 1 al 10. Solo en caso de que también se obtenga una puntuación mayor o igual a 9 en el dado el ataque es crítico; en caso contrario el ataque no será crítico. Calcule la probabilidad de que, de entre 5 ataques lanzados, se obtengan 3 o menos golpes críticos.
b) (1.25 puntos) En otro juego de rol se sabe que la probabilidad de ataque crítico es del 20%. Aproximando mediante una distribución normal, calcule la probabilidad de que, de entre 100 ataques, se obtengan no menos de 15 y no más de 25 golpes críticos.

Llamamos G al suceso "El golpe es crítico"; C al suceso "sacar cara al lanzar la moneda" y D al suceso "sacar 9 o 10 al lanzar el dado de 10 caras".

Sabemos que $P(C)=\dfrac{1}{2}$ y que $P(D)=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$.

Para que el golpe sea crítico debe salir cara y luego sacar 9 o 10 al lanzar el dado.

$$P(G)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{10}=0.1$$

a) Establecemos la distribución binomial X = Número de golpes críticos en 5 ataques lanzados". Sabemos que la probabilidad de éxito es *p = 0.1* y que *n = 5*, por lo que la variable aleatoria $X=B(5,\ 0.1)$.

Nos piden calcular $P(X\le 3)$.

$$P(X\le 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=$$

$$=\binom{5}{0}0.1^0\cdot 0.9^5+\binom{5}{1}0.1^1\cdot 0.9^4+\binom{5}{2}0.1^2\cdot 0.9^3+\binom{5}{3}0.1^3\cdot 0.9^2=\boxed{0.99954}$$

b) Ahora la variable aleatoria es X = Número de golpes críticos en 100 ataques lanzados".
Y tiene como parámetros *p = 0.2* y *n = 100* → *X = B(100, 0.2)*.
Nos piden calcular $P(15\le X\le 25)$.
Para calcular esta probabilidad aproximamos esta variable binomial X a una variable normal Y de parámetros $\mu=np=100\cdot 0.2=20$ y $\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{100\cdot 0.2\cdot 0.8}=4$. Y = N(20, 4)

$$P(15\le X\le 25)=\{\text{Corrección de Yates}\}=P(14.5\le Y\le 25.5)=$$

$$=P(Y\le 25.5)-P(Y\le 14.5)=\{Tipificamos\}=P\left(Z\le\frac{25.5-20}{4}\right)-P\left(Z\le\frac{14.5-20}{4}\right)=$$

$$=P(Z\le 1.375)-P(Z\le -1.375)=P(Z\le 1.375)-P(Z\ge 1.375)=$$

$$=P(Z\le 1.375)-\left[1-P(Z\le 1.375)\right]=2P(Z\le 1.375)-1=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\}=2\cdot\frac{0.9147+0.9162}{2}-1=2\cdot 0.91545-1=\boxed{0.8309}$$

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Un dietista veterinario ha establecido la alimentación diaria (en términos de grasas, carbohidratos y proteínas) de un quebrantahuesos pirenaico que se ha recogido en el hogar de recuperación de fauna en el que trabaja. Se sabe que el quebrantahuesos necesita 500 g de alimento al día y que necesita 2500 Kcal. También se sabe que cada gramo de grasa proporciona 9 Kcal, cada gramo de carbohidratos 4 Kcal y cada gramo de proteínas 4 Kcal. Debido a que el ave ha llegado en un estado de debilidad, el veterinario estima que el consumo de carbohidratos debe ser 40 g más del doble de proteínas. Determine la cantidad de kilocalorías diaria que obtendrá el quebrantahuesos procedentes de grasas, de carbohidratos y de proteínas.

Llamamos "x" al número de gramos de grasas, "y" al número de gramos de carbohidratos y "z" al número de gramos de proteínas.
"el quebrantahuesos necesita 500 g de alimento al día**"** → $x+y+z=500$
"necesita 2500 Kcal. También se sabe que cada gramo de grasa proporciona 9 Kcal, cada gramo de carbohidratos 4 Kcal y cada gramo de proteínas 4 Kcal" → $9x+4y+4z=2500$.
"el consumo de carbohidratos debe ser 40 g más del doble de proteínas**"** → $y=2z+40$**.**

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=500 \\ 9x+4y+4z=2500 \\ y=2z+40 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2z+40+z=500 \\ 9x+4(2z+40)+4z=2500 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+3z=460 \\ 9x+8z+160+4z=2500 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=460-3z \\ 9x+12z=2340 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9(460-3z)+12z=2340 \Rightarrow 4140-27z+12z=2340 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -15z=-1800 \Rightarrow \boxed{z=\frac{1800}{15}=120} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=460-3\cdot 120=100} \\ \boxed{y=2\cdot 120+40=280} \end{cases}$$

En la dieta consume 100 gramos de grasas, 280 de carbohidratos y 120 de proteínas.
Las 2500 kilocalorías diarias provienen 100 · 9 = 900 kilocalorías de las grasas, 280 · 4 = 1120 kilocalorías de los carbohidratos y 120 · 4 = 480 kilocalorías de las proteínas.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x)=\dfrac{\left|x^2-x-2\right|}{x^2+2x+1}$, se pide:

a) (1 punto) Hallar, si existen, las asíntotas de la gráfica de *f*.

b) (1.5 puntos) Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y calcular, si existen, sus extremos relativos.

a) Estudiamos su dominio.

$$x^2+2x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(1)(1)}}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

Dominio de *f(x)* es $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

Expresamos la función como una función a trozos.

$$x^2-x-2=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-2)}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}\dfrac{1+3}{2}=\boxed{2=x}\\ \dfrac{1-3}{2}=\boxed{-1=x}\end{cases}$$

En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomamos $x=-2$ y $(-2)^2-(-2)-2=4>0$. La función es

$$f(x)=\frac{x^2-x-2}{x^2+2x+1}=\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)^2}=\frac{x-2}{x+1}$$

En el intervalo $(-1,2)$ tomamos $x=0$ y $(0)^2-(0)-2=-2<0$. La función es

$$f(x)=\frac{-\left(x^2-x-2\right)}{x^2+2x+1}=\frac{-(x+1)(x-2)}{(x+1)^2}=\frac{-(x-2)}{x+1}=\frac{2-x}{x+1}.$$

En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos $x=3$ y $(3)^2-(3)-2=3>0$. La función es

$$f(x)=\frac{x^2-x-2}{x^2+2x+1}=\frac{x-2}{x+1}.$$

La función $f(x)=\dfrac{\left|x^2-x-2\right|}{x^2+2x+1}$ se puede expresar como $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x+1} & si & x<-1\\ \dfrac{2-x}{x+1} & si & -1<x<2\\ \dfrac{x-2}{x+1} & si & x\geq 2\end{cases}$

Asíntota vertical. $x=a$

¿ $x=-1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{2-x}{x+1}=\frac{3}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{x-2}{x+1}=\frac{-3}{0^-}=+\infty$$

$x=-1$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}-\frac{2}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1-\frac{2}{+\infty}}{1+\frac{1}{+\infty}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{x}-\frac{2}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1-\frac{2}{-\infty}}{1+\frac{1}{-\infty}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

$y=1$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Al tener asíntota horizontal la función no tiene asíntota oblicua.

Resumiendo: La función tiene una asíntota vertical: $x=-1$ y una asíntota horizontal: $y=1$, no tiene asíntota oblicua.

En el intervalo $(-\infty,-1)$ la función es $\frac{x^2}{2+x^2}$ que es continua pues el denominador no se anula.

b) Estudiamos el signo de la derivada.

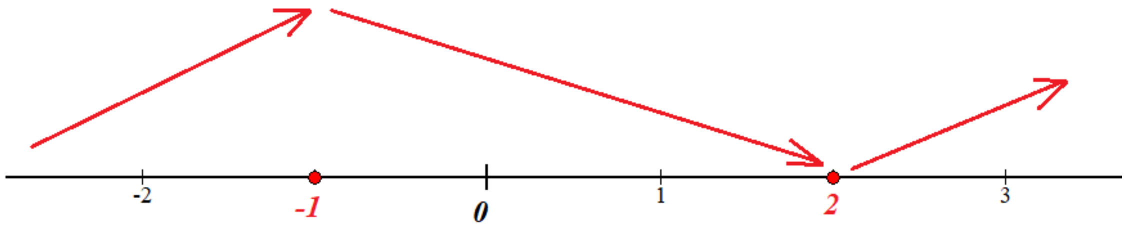
$$f(x)=\begin{cases}\frac{x-2}{x+1} & si \quad x<-1\\ \frac{2-x}{x+1} & si \quad -1<x<2\\ \frac{x-2}{x+1} & si \quad x\ge 2\end{cases}\Rightarrow f\,'(x)=\begin{cases}\frac{x+1-(x-2)}{(x+1)^2}=\frac{3}{(x+1)^2} & si \quad x<-1\\ \frac{-(x+1)-(2-x)}{(x+1)^2}=\frac{-3}{(x+1)^2} & si \quad -1<x<2\\ \frac{3}{(x+1)^2} & si \quad x>2\end{cases}$$

En el intervalo $(-\infty,-1)$ la derivada es $f\,'(x)=\frac{3}{(x+1)^2}$ y siempre es positiva. La función crece en el intervalo $(-\infty,-1)$.

En el intervalo $(-1,2)$ la derivada es $f\,'(x)=\frac{-3}{(x+1)^2}$ y siempre es negativa. La función decrece en el intervalo $(-1,2)$.

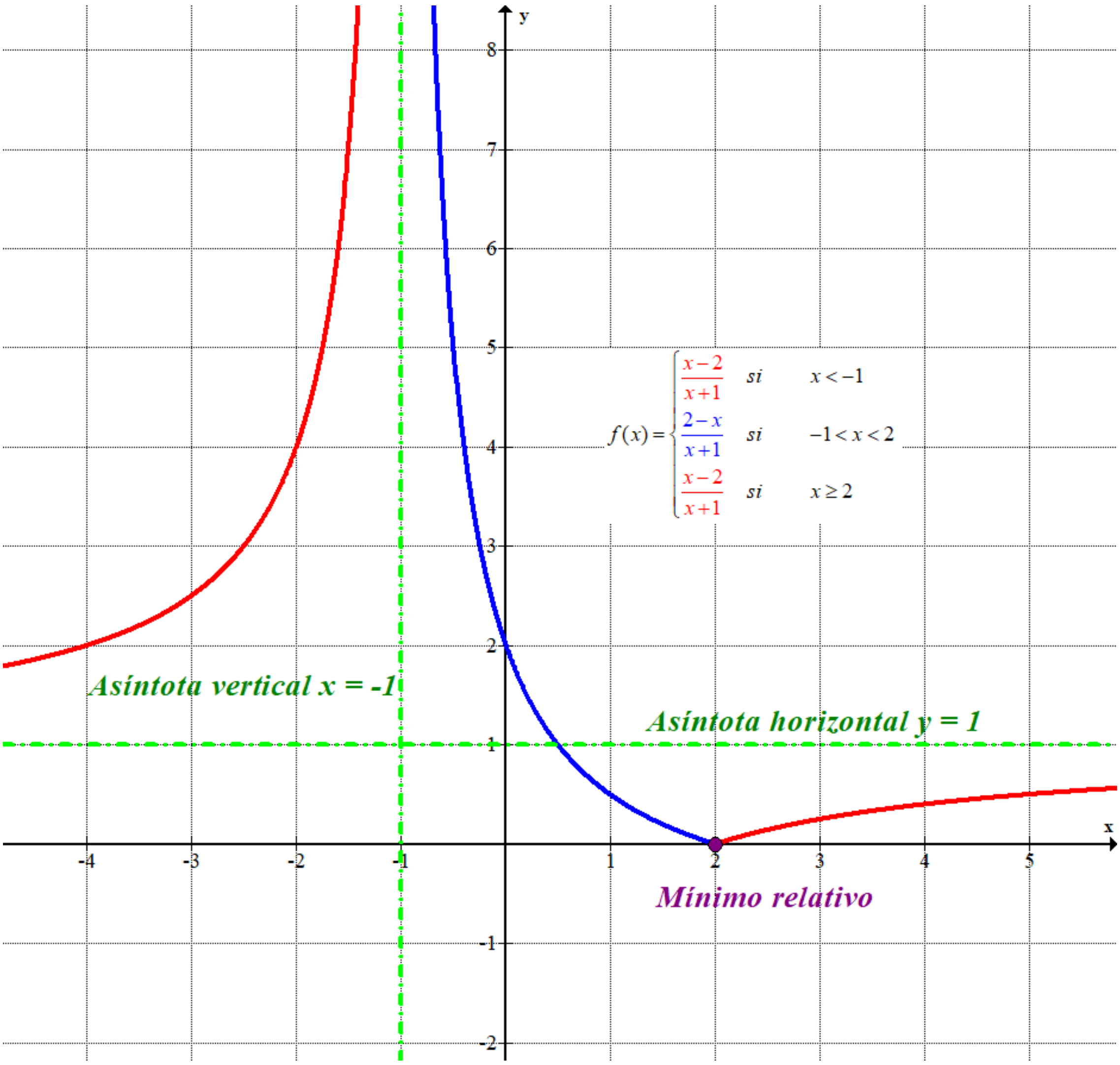
En el intervalo $(2,+\infty)$ la derivada es $f\,'(x)=\frac{3}{(x+1)^2}$ y siempre es positiva. La función crece en el intervalo $(2,+\infty)$.

Resumiendo: La función crece en $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ y decrece en $(-1,2)$.
La función sigue el esquema siguiente.



La función presenta un mínimo relativo en *x* = *2*. Como $f(2)=\dfrac{\left|2^2-2-2\right|}{2^2+2\cdot 2+1}=\dfrac{0}{9}=0$ el mínimo relativo tiene coordenadas (2, 0).
El valor *x* = *–1* no pertenece al dominio de la función, por lo que no es un máximo.

No piden dibujar la gráfica de la función, pero lo hacemos para comprobar la bondad de las respuestas dadas.



B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ y los planos $\pi : x+2y+2z-1=0$ y $\pi' : 2x+2y+z+4=0$, se pide:

a) (0.75 puntos) Comprobar que los planos π y π' se cortan. Hallar el ángulo que forman.

b) (0.75 puntos) Estudiar la posición relativa de r y π. Hallar, si es posible, el punto de corte.

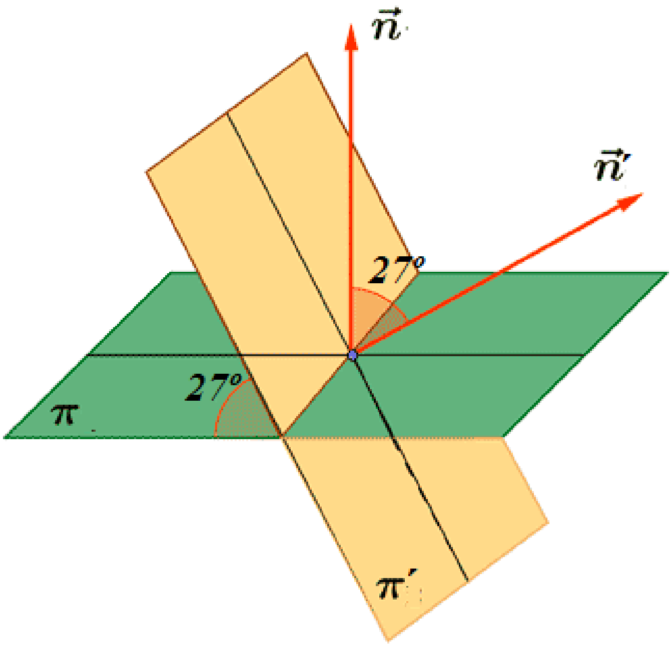
c) (1 punto) Hallar los puntos de la recta r que equidistan de los planos π y π'.

a) Comprobamos que los planos no son paralelos y por tanto se cortan en una recta. Averiguamos el ángulo que forman sus respectivos vectores normales. Si forman un ángulo distinto de 0º o 180º se cortan.

$$\left.\begin{array}{l}\pi : x+2y+2z-1=0 \rightarrow \vec{n}=(1,2,2) \\ \pi' : 2x+2y+z+4=0 \rightarrow \vec{n'}=(2,2,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \cos\left(\vec{n},\vec{n'}\right) = \frac{\vec{n}\cdot\vec{n'}}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{n'}\right|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\left(\vec{n},\vec{n'}\right) = \frac{(1,2,2)(2,2,1)}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \frac{2+4+2}{3\cdot 3} = \frac{8}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\vec{n},\vec{n'}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{8}{9}\right) \simeq 27^{\circ}$$



Los planos se cortan y el ángulo que forman entre ellos es el mismo que forman sus vectores normales, en este caso 27º.

b) Pasamos la recta a las ecuaciones paramétricas.

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P_r(1,0,-2) \\ \vec{v_r} = (3,1,-1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2-\lambda \end{cases}$$

Para que la recta esté contenida en el plano o sea paralela al plano su vector director debe ser perpendicular al vector normal del plano, es decir, su producto escalar debe ser cero.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=(3,1,-1)\\ \vec{n}=(1,2,2)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{v_r}=(1,2,2)(3,1,-1)=3+2-2=3\neq 0$$

Como el producto escalar es no nulo la recta y el plano se cortan.
Obtenemos su punto de corte resolviendo el sistema planteado por sus ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l}\pi : x+2y+2z-1=0\\ r\equiv\begin{cases}x=1+3\lambda\\ y=\lambda\\ z=-2-\lambda\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow 1+3\lambda+2\lambda+2(-2-\lambda)-1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{1}+3\lambda+\cancel{2\lambda}-4-\cancel{2\lambda}-\cancel{1}=0\Rightarrow 3\lambda=4\Rightarrow \lambda=\frac{4}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=1+3\frac{4}{3}=5\\ y=\frac{4}{3}\\ z=-2-\frac{4}{3}=\frac{-10}{3}\end{cases}\Rightarrow \boxed{P\left(5,\frac{4}{3},\frac{-10}{3}\right)}$$

El punto P de corte de recta y plano tiene coordenadas $P\left(5,\frac{4}{3},\frac{-10}{3}\right)$.

c) Un punto Q de la recta $r\equiv\begin{cases}x=1+3\lambda\\ y=\lambda\\ z=-2-\lambda\end{cases}$ tiene coordenadas $Q(1+3\lambda,\lambda,-2-\lambda)$.

Hallamos la distancia de un punto Q de la recta *r* a cada uno de los planos e igualamos las distancias.

$$\left.\begin{array}{l} Q(1+3\lambda,\lambda,-2-\lambda) \\ \pi : x+2y+2z-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow d(Q,\pi)=\frac{|1+3\lambda+2\lambda+2(-2-\lambda)-1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{|5\lambda-4-2\lambda|}{3}=\frac{|3\lambda-4|}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} Q(1+3\lambda,\lambda,-2-\lambda) \\ \pi': 2x+2y+z+4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow d(Q,\pi')=\frac{|2(1+3\lambda)+2\lambda-2-\lambda+4|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{|2+6\lambda+\lambda+2|}{3}=\frac{|7\lambda+4|}{3}$$

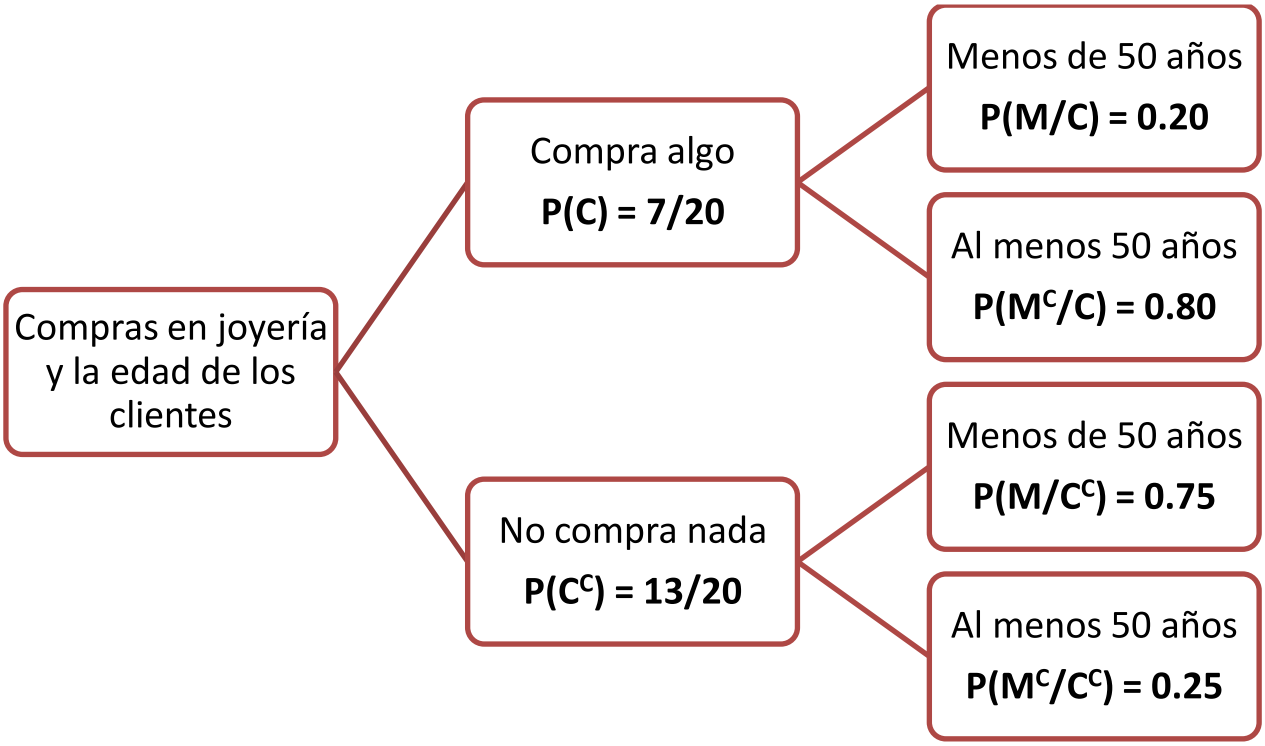
$$d(Q,\pi')=d(Q,\pi) \Rightarrow \frac{|3\lambda-4|}{3}=\frac{|7\lambda+4|}{3} \Rightarrow |3\lambda-4|=|7\lambda+4| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\lambda-4=7\lambda+4 \to -4\lambda=8 \to \lambda=\dfrac{8}{-4}=-2 \to \boxed{Q(-5,-2,0)} \\ 3\lambda-4=-7\lambda-4 \to 10\lambda=0 \to \lambda=0 \to \boxed{Q'(1,0,-2)} \end{cases}$$

Los dos puntos de la recta r equidistantes de los planos π y π´ son $Q(-5,-2,0)$ y $Q'(1,0,-2)$.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Siete de cada veinte personas que entran en cierta joyería acaban comprando algún artículo. El 75% de las personas que se marchan sin comprar nada tienen menos de 50 años y el 80% de las personas que realizan alguna compra tienen al menos 50 años. Entra un cliente en la joyería. Se pide:
a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea menor de 50 años.
b) (1.25 puntos) Sabiendo que tiene como mínimo 50 años, hallar la probabilidad de que salga de la tienda sin haber comprado nada.

Realizamos un diagrama de árbol para organizar toda la información proporcionada.
Llamamos C al suceso "El cliente compra algo en la joyería" y M al suceso "el cliente tiene menos de 50 años".



a) Nos piden calcular $P(M)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(M)=P(C\cap M)+P(C^C\cap M)=P(C)P(M/C)+P(C^C)P(M/C^C)=$$

$$=\frac{7}{20}\cdot 0.2+\frac{13}{20}\cdot 0.75=\boxed{\frac{223}{400}=0.5575}$$

b) Nos piden calcular $P(C^C/M^C)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C^C/M^C)=\frac{P(C^C\cap M^C)}{P(M^C)}=\frac{P(C^C)P(M^C/C^C)}{1-P(M)}=\frac{\frac{13}{20}\cdot 0.25}{1-0.5575}=\boxed{\frac{65}{177}\simeq 0.3672}$$