GENERALITAT VALENCIANA
Conselleria d'Innovació, Universitats, Ciència i Societat Digital

COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JUNY 2023	CONVOCATORIA: JUNIO 2023
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

BAREMO DEL EXAMEN:
El alumnado contestará solo CUATRO problemas entre los OCHO propuestos.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 4 y aproximada a las centésimas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

Problema 1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&m&1\\0&3&0\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}m\\0\\9\end{pmatrix}$:

a) Estudiar cuándo la ecuación matricial $A^2X=B$ tiene solución en función del parámetro real m. (4 puntos)

b) Encontrar todas las soluciones de la ecuación anterior cuando éstas existan. (6 puntos)

Problema 2. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0&\alpha\\-\alpha^2&0\end{pmatrix}$:

a) Obtener la matriz $\left(AB^T+I\right)^{-1}$ donde I es la matriz identidad de las dimensiones adecuadas para realizar la operación. (6 puntos)

b) Comprobar que $C^2=-\alpha^3I$, donde I es la matriz identidad, y calcular C^{13}. (4 puntos)

Problema 3. Dada la recta $r:\begin{cases}x-y=1\\x+2y+z=0\end{cases}$ y los puntos P = (0,0,3) y Q = (2,2,α), obtener:

a) Los valores del parámetro real α, si existen, para los que son paralelas la recta r y la recta que pasa por los puntos P y Q. (6 puntos)

b) La ecuación del plano perpendicular a r y que pasa por P. (4 puntos)

Problema 4. Dada la recta $r:\begin{cases}5x+y+7z=16\\9x-y+7z=12\end{cases}$ y el punto P = (0,5,2) se pide:

a) Comprobar que el punto Q = (2,6,0) pertenece a la recta r y encontrar la recta s que pasa por los puntos P y Q. (2 puntos)

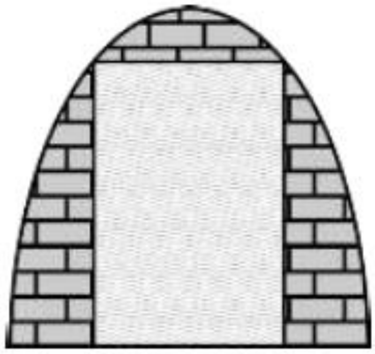
b) Obtener el ángulo que forman la recta r y la recta s. (3 puntos)

c) Obtener la proyección ortogonal del punto P en la recta r. (5 puntos)

Problema 5. Considerar la función $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x+1)$. Obtener:

a) El dominio y las asíntotas de *f(x)*. (2 puntos)
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)*, y sus máximos y mínimos. (4 puntos)
c) El área comprendida entre la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = 1$ y $x = 2$. (4 puntos)

Problema 6. El corte vertical de la entrada a la plaza amurallada de cierto pueblo tiene forma de parábola con ecuación $y=-x^2+12$, donde x e y se miden en metros e $y = 0$ representa el suelo. Se desea poner una puerta rectangular de modo que las dos esquinas superiores estén en la parábola y las inferiores en el suelo. El resto de la entrada va cerrado con piedra. Calcular:



a) Las dimensiones de la puerta para que tenga la mayor superficie posible. (6 puntos)
b) Utilizando la puerta del apartado anterior, obtener el área de la parte frontal de la puerta y el área de la parte frontal de la entrada recubierta por piedra. (4 puntos)

Problema 7. Tenemos dos monedas distintas M_1 y M_2. La probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_1 es x y la probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_2 es y.

a) Si lanzamos las dos monedas al mismo tiempo, calcular las probabilidades de no obtener ninguna cara, de obtener solo una cara y de obtener dos caras. (3 puntos)
b) Después de lanzar las dos monedas, volvemos a lanzar solamente las monedas en las que no hemos obtenido cara. Calcular las probabilidades de que el resultado final haya sido obtener ninguna cara, obtener solo una cara y obtener dos caras. (7 puntos)

Problema 8. Cada fin de semana llegan al aeropuerto de Alicante 161 vuelos. De estos 161 vuelos, 95 proceden del territorio nacional, 50 proceden de la Unión Europea y 16 proceden de países de fuera de la Unión Europea. Sabiendo que el 5% de los vuelos con procedencia nacional, el 4% de los vuelos con procedencia de la Unión Europea y el 6.25% del resto de vuelos se retrasan:

a) Calcular la probabilidad de que durante el fin de semana un vuelo se retrase. (5 puntos)
b) Sabiendo que un vuelo concreto se ha retrasado, calcular la probabilidad de que este vuelo proceda de la Unión Europea. (5 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Soluciones:

Problema 1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & m & 1\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}m\\ 0\\ 9\end{pmatrix}$:

a) Estudiar cuándo la ecuación matricial $A^2X=B$ tiene solución en función del parámetro real m. (4 puntos)

b) Encontrar todas las soluciones de la ecuación anterior cuando éstas existan. (6 puntos)

a) Calculamos la expresión de la matriz A^2.

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & m & 1\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & m & 1\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2+2m & 2\\ 0 & m^2+3 & m\\ 0 & 3m & 3\end{pmatrix}$$

Despejamos X en la ecuación matricial planteada.

$$A^2X=B \Rightarrow X=\left(A^2\right)^{-1}B$$

Comprobamos si existe la inversa de la matriz A^2.

$$\left|A^2\right|=\begin{vmatrix}1 & 2+2m & 2\\ 0 & m^2+3 & m\\ 0 & 3m & 3\end{vmatrix}=3m^2+9-3m^2=9\neq 0$$

Como el determinante de la matriz A^2 no se anula existe su inversa y la ecuación $A^2X=B$ tiene como solución $X=\left(A^2\right)^{-1}B$.

La ecuación $A^2X=B$ tiene solución para cualquier valor del parámetro real m.

b) Hallamos la inversa de la matriz A^2.

$$\left(A^2\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(A^2\right)^T\right)}{\left|A^2\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2+2m & m^2+3 & 3m\\ 2 & m & 3\end{pmatrix}}{9}=$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}m^2+3 & 3m\\ m & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2+2m & 3m\\ 2 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2+2m & m^2+3\\ 2 & m\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 0\\ m & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & m\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0 & 0\\ m^2+3 & 3m\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2+2m & 3m\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\ 2+2m & m^2+3\end{vmatrix}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3m^2+9-3m^2 & -(6+6m-6m) & 2m+2m^2-2m^2-6 \\ 0 & 3 & -m \\ 0 & -3m & m^2+3 \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & -6 & 2m-6 \\ 0 & 3 & -m \\ 0 & -3m & m^2+3 \end{pmatrix}$$

Calculamos la expresión de la matriz X.

$$A^2X=B\Rightarrow X=\left(A^2\right)^{-1}B=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & -6 & 2m-6 \\ 0 & 3 & -m \\ 0 & -3m & m^2+3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9m+18m-54 \\ -9m \\ 9\left(m^2+3\right) \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 27m-54 \\ -9m \\ 9\left(m^2+3\right) \end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix} 3m-6 \\ -m \\ m^2+3 \end{pmatrix}=X}$$

Problema 2. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0&\alpha\\-\alpha^2&0\end{pmatrix}$:

a) Obtener la matriz $\left(AB^T+I\right)^{-1}$ donde I es la matriz identidad de las dimensiones adecuadas para realizar la operación. (6 puntos)

b) Comprobar que $C^2=-\alpha^3 I$, donde I es la matriz identidad, y calcular C^{13}. (4 puntos)

a)

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\end{pmatrix}\Rightarrow B^T=\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$AB^T+I=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0+1&2+0+0\\0+1+1&0-1+0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\2&0\end{pmatrix}$$

$$\left|AB^T+I\right|=\begin{vmatrix}3&2\\2&0\end{vmatrix}=0-4=-4\neq 0\rightarrow \text{Existe la inversa}$$

$$\left(AB^T+I\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(AB^T+I\right)^T\right)}{\left|AB^T+I\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}3&2\\2&0\end{pmatrix}}{-4}=\frac{-1}{4}\begin{pmatrix}0&-2\\-2&3\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\left(AB^T+I\right)^{-1}=\begin{pmatrix}0&1/2\\1/2&-3/4\end{pmatrix}}$$

b) Calculamos la expresión de C^2.

$$C^2=\begin{pmatrix}0&\alpha\\-\alpha^2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\alpha\\-\alpha^2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-\alpha^3&0+0\\0+0&-\alpha^3+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha^3&0\\0&-\alpha^3\end{pmatrix}=-\alpha^3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=-\alpha^3\cdot I$$

Queda comprobado que $C^2=-\alpha^3 I$

Calculamos el valor de C^{13}. Sabemos que $C^2=-\alpha^3 I$.

$$C^{13}=C^2\cdot C^2\cdot C^2\cdot C^2\cdot C^2\cdot C^2\cdot C=\left(-\alpha^3 I\right)\left(-\alpha^3 I\right)\left(-\alpha^3 I\right)\left(-\alpha^3 I\right)\left(-\alpha^3 I\right)\left(-\alpha^3 I\right)C$$

$$C^{13}=\left(-\alpha^3\right)^6 I\cdot C=\alpha^{18}\cdot C=\alpha^{18}\begin{pmatrix}0&\alpha\\-\alpha^2&0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{C^{13}=\begin{pmatrix}0&\alpha^{19}\\-\alpha^{20}&0\end{pmatrix}}$$

Problema 3. Dada la recta $r:\begin{cases} x-y=1 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$ y los puntos P = (0,0,3) y Q = (2,2,α), obtener:

a) Los valores del parámetro real α, si existen, para los que son paralelas la recta r y la recta que pasa por los puntos P y Q. (6 puntos)

b) La ecuación del plano perpendicular a r y que pasa por P. (4 puntos)

a) Hallamos la ecuación de la recta s que pasa por los puntos P y Q.

$$s:\begin{cases} P(0,0,3)\in s \\ Q(2,2,\alpha)\in s \end{cases} \Rightarrow s:\begin{cases} \overrightarrow{v_s}=\overrightarrow{PQ}=(2,2,\alpha)-(0,0,3)=(2,2,\alpha-3) \\ P(0,0,3)\in s \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{s:\begin{cases} x=2\lambda \\ y=2\lambda \\ z=3+(\alpha-3)\lambda \end{cases} \Rightarrow s:\begin{cases} \overrightarrow{v_s}=(2,2,\alpha-3) \\ P(0,0,3)\in s \end{cases}}$$

Hallamos un vector director y un punto de la recta r.

$$r:\begin{cases} x-y=1 \\ x+2y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+y \\ x+2y+z=0 \end{cases} \Rightarrow 1+y+2y+z=0 \Rightarrow z=-1-3y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{r:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1-3\lambda \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(1,1,-3) \\ A_r(1,0,-1) \end{cases}}$$

Para que sean paralelas las rectas deben tener vectores directores de coordenadas proporcionales (indican la misma dirección).

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_s}=(2,2,\alpha-3) \\ \overrightarrow{u_r}=(1,1,-3) \\ \overrightarrow{u_r}\parallel\overrightarrow{v_s} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{1}=\frac{2}{1}=\frac{\alpha-3}{-3} \Rightarrow 2=\frac{\alpha-3}{-3} \Rightarrow \alpha-3=-6 \Rightarrow \boxed{\alpha=-3}$$

Para $\alpha=-3$ podemos afirmar que las rectas r y s son paralelas o coincidentes. Comprobamos que no son coincidentes viendo si el punto P(0, 0, 3) de la recta s pertenece o no a la recta r.

$$\left.\begin{array}{l} ¿P(0,0,3)\in r? \\ r:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1-3\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow ¿\begin{cases} 0=1+\lambda \\ 0=\lambda \\ 3=-1-3\lambda \end{cases}? \Rightarrow ¿\begin{cases} -1=\lambda \\ 0=\lambda \\ 4=-3\lambda \to \lambda=\frac{-4}{3} \end{cases}? \Rightarrow P(0,0,3)\notin r$$

Para $\alpha=-3$ el punto P de la recta s no pertenece a la recta r y podemos afirmar que las rectas r y s son paralelas.

b) El plano π perpendicular a *r* tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$\pi : \begin{cases} P(0,0,3) \in \pi \\ \vec{n} = \overrightarrow{u_r} = (1,1,-3) \end{cases} \Rightarrow \pi : \begin{cases} P(0,0,3) \in \pi \\ \pi : x + y - 3z + D = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 + 0 - 9 + D = 0 \Rightarrow D = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi : x + y - 3z + 9 = 0}$$

Problema 4. Dada la recta $r:\begin{cases}5x+y+7z=16\\ 9x-y+7z=12\end{cases}$ y el punto P = (0,5,2) se pide:

a) Comprobar que el punto Q = (2,6,0) pertenece a la recta r y encontrar la recta s que pasa por los puntos P y Q. (2 puntos)

b) Obtener el ángulo que forman la recta r y la recta s. (3 puntos)

c) Obtener la proyección ortogonal del punto P en la recta r. (5 puntos)

a) Comprobamos que el punto Q = (2,6,0) pertenece a la recta r.

$$\left.\begin{array}{l} r:\begin{cases}5x+y+7z=16\\ 9x-y+7z=12\end{cases}\\ ¿Q(2,6,0)\in r?\end{array}\right\}\Rightarrow ¿\begin{cases}5\cdot 2+6+7\cdot 0=16\\ 9\cdot 2-6+7\cdot 0=12\end{cases}?\Rightarrow\begin{cases}¿10+6=16?\\ ¿18-6=12?\end{cases}$$

Son ciertas las dos igualdades y el punto Q pertenece a la recta r.

Hallamos la ecuación de la recta s que pasa por los puntos P y Q.

$$\left.\begin{array}{l}P(0,5,2)\in s\\ Q(2,6,0)\in s\end{array}\right\}\Rightarrow s:\begin{cases}Q(2,6,0)\in s\\ \overrightarrow{v_s}=\overrightarrow{PQ}=(2,6,0)-(0,5,2)=(2,1,-2)\end{cases}\Rightarrow \boxed{s:\begin{cases}x=2+2\lambda\\ y=6+\lambda\\ z=-2\lambda\end{cases},\lambda\in\mathbb{R}}$$

b) El ángulo que forman las rectas es el formado por sus vectores directores.
Hallamos un vector director de la recta r pasando la ecuación de la recta a paramétricas.

$$r:\begin{cases}5x+y+7z=16\\ 9x-y+7z=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=16-5x-7z\\ 9x-y+7z=12\end{cases}\Rightarrow 9x-(16-5x-7z)+7z=12\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x-16+5x+7z+7z=12\Rightarrow 14x+14z=28\Rightarrow x+z=2\Rightarrow x=2-z\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=16-5(2-z)-7z\Rightarrow y=6-2z\Rightarrow \boxed{r:\begin{cases}x=2-\lambda\\ y=6-2\lambda\\ z=\lambda\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=(-1,-2,1)\\ Q(2,6,0)\in r\end{cases}}$$

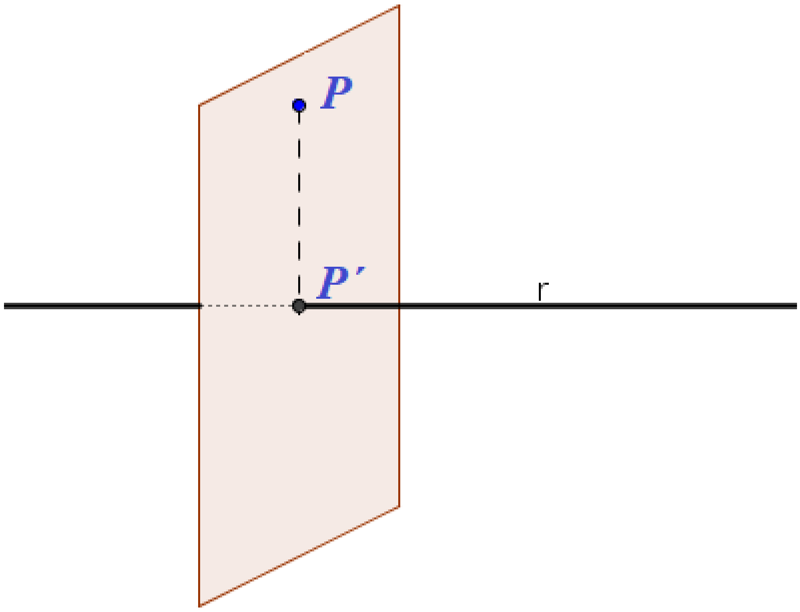
Hallamos el ángulo formado por las dos rectas.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_s}=(2,1,-2)\\ \overrightarrow{u_r}=(-1,-2,1)\end{array}\right\}\Rightarrow\cos\left(\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{u_r}\right)=\frac{\left|\overrightarrow{v_s}\cdot\overrightarrow{u_r}\right|}{\left|\overrightarrow{v_s}\right|\cdot\left|\overrightarrow{u_r}\right|}=\frac{\left|(2,1,-2)(-1,-2,1)\right|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+1^2}}$$

$$\cos\left(\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{u_r}\right)=\frac{|-2-2-2|}{\sqrt{9}\sqrt{6}}=\frac{|-6|}{3\sqrt{6}}=\frac{2}{\sqrt{6}}\Rightarrow\boxed{\left(\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{u_r}\right)=arc\cos\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\simeq 35^{\circ}}$$

El ángulo formado por las rectas r y s es de aproximadamente 35º.

c) Hallamos el punto P´ que es la proyección ortogonal del punto P en la recta r.



Hallamos el plano perpendicular a la recta que pasa por el punto P. Este plano tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}=\overrightarrow{u_r}=(-1,-2,1) \\ P(0,5,2)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi:-x-2y+z+D=0 \\ P(0,5,2)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow -0-10+2+D=0 \Rightarrow D=8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi:-x-2y+z+8=0$$

Hallamos el punto P´ como el punto de corte de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi:-x-2y+z+8=0 \\ r:\begin{cases} x=2-\lambda \\ y=6-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow -2+\lambda-12+4\lambda+\lambda+8=0 \Rightarrow 6\lambda=6 \Rightarrow \lambda=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2-1=1 \\ y=6-2=4 \Rightarrow \boxed{P'(1,4,1)} \\ z=1 \end{cases}$$

La proyección ortogonal del punto P en la recta r es el punto P´(1,4,1).

Problema 5. Considerar la función $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x+1)$. Obtener:

a) El dominio y las asíntotas de *f(x)*. (2 puntos)

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)*, y sus máximos y mínimos. (4 puntos)

c) El área comprendida entre la curva $y=f(x)$ y las rectas $y=0$, $x=1$ y $x=2$. (4 puntos)

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador y los que hacen negativo el contenido del logaritmo.

$$f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x+1)\Rightarrow\begin{cases}x=0\notin Dominio\\ x+1>0\Rightarrow x>-1\end{cases}$$

$$\boxed{\text{Dominio } f(x)=(-1,0)\cup(0,+\infty)}$$

Asíntota vertical. $x=a$

¿$x=0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}+\ln(x+1)=\frac{1}{0}+\ln(1)=\frac{1}{0}=\infty$$

$x=0$ es asíntota vertical

¿$x=-1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x}+\ln(x+1)=\frac{1}{-1}+\ln(0)=-1-\infty=-\infty$$

$x=-1$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\ln(x+1)=\frac{1}{+\infty}+\ln(+\infty)=0+\infty=+\infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}=\frac{1}{+\infty}+\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=0+\frac{\infty}{\infty}=0+Indeterminación(L´Hôpital)=...$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{\infty}=0}$$

$$...=0+0=0$$

Como *m = 0 la* función no tiene asíntota oblicua.

b) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x+1)\Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x+1}$$

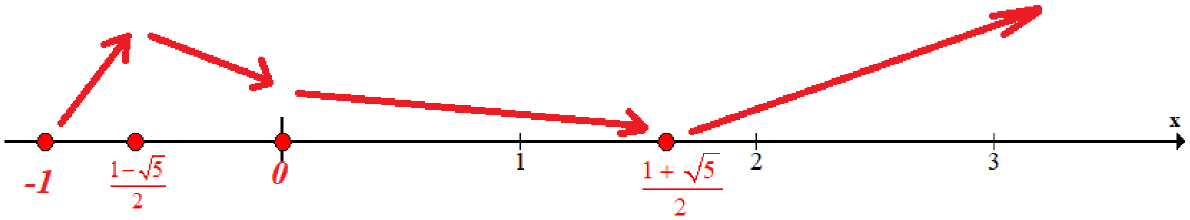
$$f'(x)=0\Rightarrow \frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x+1}=0\Rightarrow \frac{1}{x^2}=\frac{1}{x+1}\Rightarrow x+1=x^2\Rightarrow x^2-x-1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-1)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}=\begin{cases}\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\simeq 1.62=x\\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\simeq -0.62=x\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de –1, 0 y los dos valores obtenidos.

- En el intervalo $(-1,-0.62)$ tomamos *x = 0.8* y la derivada vale $f'(-0.8)=\frac{-1}{(-0.8)^2}+\frac{1}{-0.8+1}=0.4375>0$. La función crece en $(-1,-0.62)$.
- En el intervalo $(-0.62,0)$ tomamos *x = –0.5* y la derivada vale $f'(-0.5)=\frac{-1}{(-0.5)^2}+\frac{1}{-0.5+1}=-2<0$. La función decrece en $(-0.62,0)$.
- En el intervalo $(0,1.62)$ tomamos *x = 1* y la derivada vale $f'(1)=\frac{-1}{1^2}+\frac{1}{1+1}=-0.5<0$. La función decrece en $(0,1.62)$.
- En el intervalo $(1.62,+\infty)$ tomamos *x = 3* y la derivada vale $f'(3)=\frac{-1}{3^2}+\frac{1}{3+1}=\frac{227}{144}>0$. La función crece en $(2,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $\left(-1,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$ y decrece en $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

La función presenta un máximo relativo en $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y un mínimo relativo en $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

c) El área comprendida entre la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = 1$ y $x = 2$ es el valor absoluto de la integral definida entre 1 y 2 de la función.
Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x} + \ln(x+1)\,dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \ln(x+1)\,dx = \ln x + \int \ln(x+1)\,dx = \ldots$$

$$\int \ln(x+1)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln(x+1) \to du = \frac{1}{x+1}dx \\ dv = dx \to v = \int dx = x \end{array} \right\} = x\ln(x+1) - \int x\frac{1}{x+1}dx =$$

$$= x\ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1}dx = x\ln(x+1) - \int \frac{x+1-1}{x+1}dx =$$

$$= x\ln(x+1) - \left[\int \frac{x+1}{x+1}dx - \int \frac{1}{x+1}dx\right] = x\ln(x+1) - \left[\int dx - \int \frac{1}{x+1}dx\right] =$$

$$= x\ln(x+1) - x + \ln(x+1) + K$$

$$\ldots = \ln x + x\ln(x+1) - x + \ln(x+1) + K$$

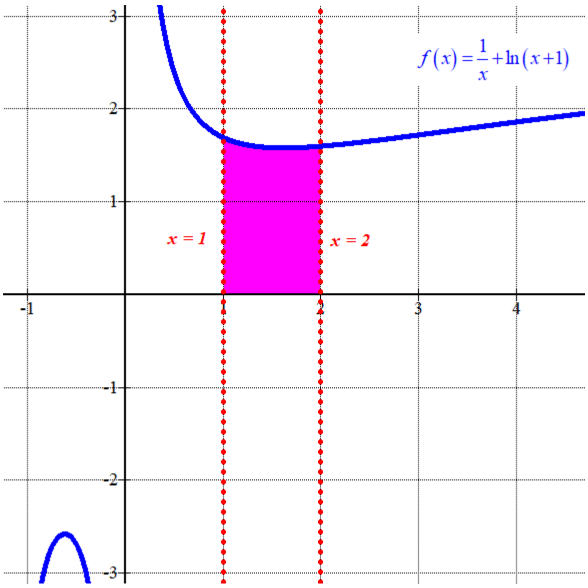
Calculamos la integral definida.

$$\int_1^2 \frac{1}{x} + \ln(x+1)\,dx = \left[\ln x + x\ln(x+1) - x + \ln(x+1)\right]_1^2 =$$

$$= \left[\ln 2 + 2\ln(2+1) - 2 + \ln(2+1)\right] - \left[\ln 1 + \ln(1+1) - 1 + \ln(1+1)\right] =$$

$$= \cancel{\ln 2} + 2\ln 3 + \ln 3 - 2 - 0 - \ln 2 + 1 - \cancel{\ln 2} = -1 + 3\ln 3 - \ln 2 \simeq 1.60$$

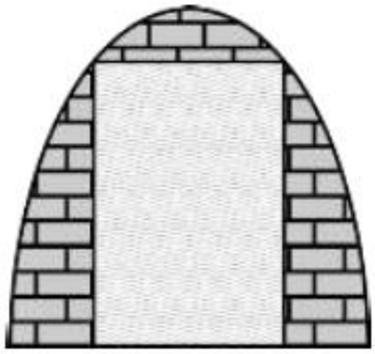
El área de la región comprendida entre la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = 1$ y $x = 2$ tiene un valor aproximado de 1.603 unidades cuadradas.



Problema 6. El corte vertical de la entrada a la plaza amurallada de cierto pueblo tiene forma de parábola con ecuación $y = -x^2 + 12$, donde x e y se miden en metros e $y = 0$ representa el suelo. Se desea poner una puerta rectangular de modo que las dos esquinas superiores estén en la parábola y las inferiores en el suelo. El resto de la entrada va cerrado con piedra. Calcular:

a) Las dimensiones de la puerta para que tenga la mayor superficie posible. (6 puntos)

b) Utilizando la puerta del apartado anterior, obtener el área de la parte frontal de la puerta y el área de la parte frontal de la entrada recubierta por piedra. (4 puntos)



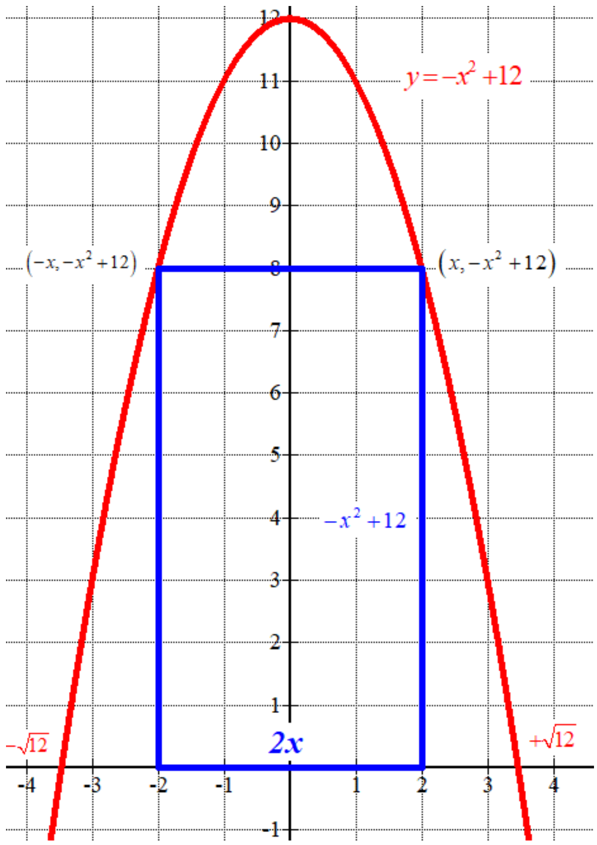
a) Buscamos la expresión de la superficie de la puerta.
Dibujamos la parábola $y = -x^2 + 12$.
Los puntos de corte con el suelo son:

$$\left.\begin{array}{l} y = -x^2 + 12 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -x^2 + 12 = 0 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \pm\sqrt{12}$$

El vértice de la parábola es:

$$\left.\begin{array}{l} y' = -2x \\ y' = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

x	$y = -x^2 + 12$
-4	-4
-2	8
0	12
2	8
4	-4



Dada la simetría de la función el área del rectángulo azul es:

$$Área(x) = Base \cdot altura = 2x \cdot \left(-x^2 + 12\right) = -2x^3 + 24x$$

Buscamos los puntos críticos de la función. Derivamos la función y la igualamos a cero.

$$A(x)=-2x^3+24x \Rightarrow A'(x)=-6x^2+24$$

$$A'(x)=0 \Rightarrow -6x^2+24=0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{4}=\pm 2}$$

Solo nos interesa el valor positivo. Sustituimos este valor en la derivada segunda para ver si $x=2$ es el máximo buscado.

$$A'(x)=-6x^2+24 \Rightarrow A''(x)=-12x \Rightarrow A''(2)=-12\cdot 2=-24<0 \to x=2 \text{ es máximo}$$

Al ser positivo el valor de la derivada segunda la función presenta un valor máximo para $x=2$. La puerta de dimensiones 2 · 2 = 4 metros de base e $y=-2^2+12=8$ metros de altura tiene un área máxima.

b) El área de la parte frontal de la puerta es 4 · 8 = 32 metros cuadrados.
El área de la zona recubierta por ladrillo es la diferencia del área bajo la parábola y el área de la puerta.
Calculamos el valor del área bajo la curva como la integral definida entre $-\sqrt{12}$ y $+\sqrt{12}$ de la función $y=-x^2+12$.

$$\int_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}} -x^2+12dx=\left[-\frac{x^3}{3}+12x\right]_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}}=\left[-\frac{\sqrt{12}^3}{3}+12\sqrt{12}\right]-\left[-\frac{\left(-\sqrt{12}\right)^3}{3}+12\left(-\sqrt{12}\right)\right]=$$

$$=-\frac{12\sqrt{12}}{3}+12\sqrt{12}-\frac{12\sqrt{12}}{3}+12\sqrt{12}=24\sqrt{12}-8\sqrt{12}=\boxed{16\sqrt{12}\simeq 55.426\,m^2}$$

El área de la parte recubierta de piedra es $16\sqrt{12}-32\simeq 23.4256$ metros cuadrados

Problema 7. Tenemos dos monedas distintas M_1 y M_2. La probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_1 es x y la probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_2 es y.
a) Si lanzamos las dos monedas al mismo tiempo, calcular las probabilidades de no obtener ninguna cara, de obtener solo una cara y de obtener dos caras. (3 puntos)
b) Después de lanzar las dos monedas, volvemos a lanzar solamente las monedas en las que no hemos obtenido cara. Calcular las probabilidades de que el resultado final haya sido obtener ninguna cara, obtener solo una cara y obtener dos caras. (7 puntos)

Llamamos C_1, C_2 a sacar cara con la moneda M_1 o M_2.
Sabemos que $P(C_1)=x$ y que $P(C_2)=y$.

a) El suceso "No obtener ninguna cara al lanzar las dos monedas" es $\overline{C_1}\cap\overline{C_2}$.

$$P\left(\overline{C_1}\cap\overline{C_2}\right)=\left\{\begin{matrix} C_1\ y\, C_2 \text{ son independientes} \\ \overline{C_1}\ y\, \overline{C_2} \text{ son independientes}\end{matrix}\right\}=P\left(\overline{C_1}\right)P\left(\overline{C_2}\right)=$$

$$=\left(1-P(C_1)\right)\left(1-P(C_2)\right)=\boxed{(1-x)(1-y)}$$

El suceso "Obtener solo una cara al lanzar las dos monedas" es $\left(C_1\cap\overline{C_2}\right)\cup\left(\overline{C_1}\cap C_2\right)$.

$$P\left[\left(C_1\cap\overline{C_2}\right)\cup\left(\overline{C_1}\cap C_2\right)\right]=P\left(C_1\cap\overline{C_2}\right)+P\left(\overline{C_1}\cap C_2\right)=$$

$$=P(C_1)P\left(\overline{C_2}\right)+P\left(\overline{C_1}\right)P(C_2)=P(C_1)\left[1-P(C_2)\right]+\left[1-P(C_1)\right]P(C_2)=$$

$$=\boxed{x(1-y)+(1-x)y}$$

El suceso "Obtener dos caras al lanzar las dos monedas" es $C_1\cap C_2$.

$$P(C_1\cap C_2)=P(C_1)P(C_2)=\boxed{xy}$$

b) Llamamos CC_1, CC_2 a sacar cara con la moneda M_1 o M_2 en el segundo lanzamiento.
Sabemos que $P(CC_1)=x$ y que $P(CC_2)=y$.

El suceso "No obtener ninguna cara al lanzar las dos monedas de la nueva forma" es $\overline{C_1}\cap\overline{C_2}\cap\overline{CC_1}\cap\overline{CC_2}$.

$$P\left(\overline{C_1}\cap\overline{C_2}\cap\overline{CC_1}\cap\overline{CC_2}\right)=\left\{\begin{matrix} C_1\ y\, C_2 \text{ son independientes} \\ \overline{C_1}\ y\, \overline{C_2} \text{ son independientes}\end{matrix}\right\}=P\left(\overline{C_1}\right)P\left(\overline{C_2}\right)P\left(\overline{CC_1}\right)P\left(\overline{CC_2}\right)=$$

$$=\left(1-P(C_1)\right)\left(1-P(C_2)\right)\left(1-P(CC_1)\right)\left(1-P(CC_2)\right)=\boxed{(1-x)^2(1-y)^2}$$

El suceso "Obtener solo una cara al lanzar las dos monedas de la nueva forma" es $\left(C_1 \cap \overline{C_2} \cap \overline{CC_2}\right) \cup \left(\overline{C_1} \cap C_2 \cap \overline{CC_1}\right) \cup \left(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap CC_1 \cap \overline{CC_2}\right) \cup \left(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \overline{CC_1} \cap CC_2\right)$.

$$P\left[\left(C_1 \cap \overline{C_2} \cap \overline{CC_2}\right) \cup \left(\overline{C_1} \cap C_2 \cap \overline{CC_1}\right) \cup \left(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap CC_1 \cap \overline{CC_2}\right) \cup \left(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \overline{CC_1} \cap CC_2\right)\right] =$$

$$= P\left(C_1 \cap \overline{C_2} \cap \overline{CC_2}\right) + P\left(\overline{C_1} \cap C_2 \cap \overline{CC_1}\right) + P\left(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap CC_1 \cap \overline{CC_2}\right) + P\left(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \overline{CC_1} \cap CC_2\right) =$$

$$= P(C_1) P\left(\overline{C_2}\right) P\left(\overline{CC_2}\right) + P\left(\overline{C_1}\right) P(C_2) P\left(\overline{CC_1}\right) +$$

$$+ P\left(\overline{C_1}\right) P\left(\overline{C_2}\right) P(CC_1) P\left(\overline{CC_2}\right) + P\left(\overline{C_1}\right) P\left(\overline{C_2}\right) P\left(\overline{CC_1}\right) P(CC_2) =$$

$$= x(1-y)(1-y) + (1-x)y(1-x) + (1-x)(1-y)x(1-y) + (1-x)(1-y)(1-x)y =$$

$$= \boxed{x(1-y)^2 + y(1-x)^2 + x(1-x)(1-y)^2 + y(1-x)^2(1-y)}$$

El suceso "Obtener dos caras al lanzar las dos monedas de la nueva forma" es el suceso $(C_1 \cap C_2) \cup \left(C_1 \cap \overline{C_2} \cap CC_2\right) \cup \left(\overline{C_1} \cap C_2 \cap CC_1\right) \cup \left(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap CC_1 \cap CC_2\right)$.

$$P\left[(C_1 \cap C_2) \cup \left(C_1 \cap \overline{C_2} \cap CC_2\right) \cup \left(\overline{C_1} \cap C_2 \cap CC_1\right) \cup \left(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap CC_1 \cap CC_2\right)\right] =$$

$$= P(C_1 \cap C_2) + P\left(C_1 \cap \overline{C_2} \cap CC_2\right) + P\left(\overline{C_1} \cap C_2 \cap CC_1\right) + P\left(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap CC_1 \cap CC_2\right) =$$

$$= xy + x(1-y)y + (1-x)yx + (1-x)(1-y)xy =$$

$$= xy + xy(1-y) + xy(1-x) + xy(1-x)(1-y) =$$

$$= xy[1 + 1 - y + 1 - x + 1 - x - y + xy] = \boxed{xy(4 - 2x - 2y + xy)}$$

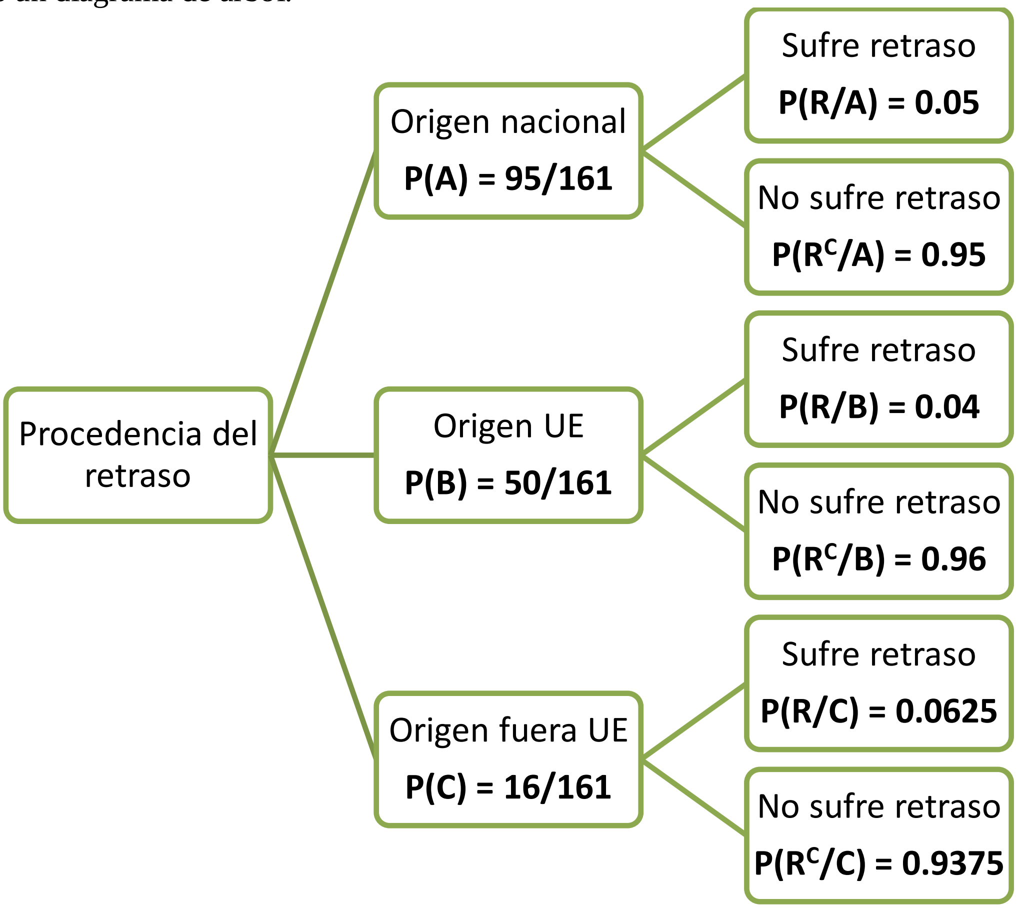
Problema 8. Cada fin de semana llegan al aeropuerto de Alicante 161 vuelos. De estos 161 vuelos, 95 proceden del territorio nacional, 50 proceden de la Unión Europea y 16 proceden de países de fuera de la Unión Europea. Sabiendo que el 5% de los vuelos con procedencia nacional, el 4% de los vuelos con procedencia de la Unión Europea y el 6.25% del resto de vuelos se retrasan:

a) Calcular la probabilidad de que durante el fin de semana un vuelo se retrase. (5 puntos)

b) Sabiendo que un vuelo concreto se ha retrasado, calcular la probabilidad de que este vuelo proceda de la Unión Europea. (5 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(R)=P(A)P(R/A)+P(B)P(R/B)+P(V)P(R/C)=$$

$$=\frac{95}{161}\cdot 0.05+\frac{50}{161}\cdot 0.04+\frac{16}{161}\cdot 0.0625=\boxed{\frac{31}{644}\simeq 0.0481}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/R)=\frac{P(B\cap R)}{P(R)}=\frac{P(B)P(R/B)}{P(R)}=\frac{\frac{50}{161}\cdot 0.04}{\frac{31}{644}}=\boxed{\frac{8}{31}\simeq 0.2581}$$