

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2022-2023

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II



Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + (2a - 1)y + (\sqrt{2} - 2)z = 2 \\ -ax + ay + 2a^2z = \sqrt{2} \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P2) Calcula los valores de t para los que el rango de la matriz $A \cdot B$ es máximo, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & t-1 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} t+1 & 1 & t \\ 0 & t & -2t+1 \\ t+1 & t+1 & -t-1 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

P3) Calcula la ecuación continua de la recta perpendicular a r y s que corta a ambas, siendo

$$r \equiv \begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ x - 3y + 3z - 8 = 0 \end{cases} \text{ y } s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-0}{-2}$$

(2.5 puntos)

P4) Sean $P(1, 5, -1)$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+4}{2}$.

a) Calcula el punto $Q \in r$ tal que la distancia de P a Q sea mínima.

(1,25 puntos)

b) Halla los puntos Q_1 y Q_2 pertenecientes a r tales que $d(P, Q_1) = d(P, Q_2) = 3\sqrt{2}$:

(1,25 puntos)

P5) Calcule las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \frac{2x-5}{x^2+x-2} dx$

(1.25 puntos)

b) $\int x \ln x dx$

(1.25 puntos)

P6) Estudia la continuidad en $\mathbb{R}$ de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos^2(\pi x) - 1}{1-x} & x < 1 \\ \ln(x \cdot e^{x+1}) - 2x & x \geq 1 \end{cases}.$$

(2.5 puntos)

P7) Se considera la función $f(x) = (x+1)\sin(\pi x)$.

a) Demuestra que es continua en $\mathbb{R}$.

(0.5 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (0,1)$ tal que $f(\alpha) = \frac{3}{4}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(2 puntos)

P8) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = 2 - 2x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = x^4 - x^2$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(2.5 puntos)

SOLUCIONES

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + (2a - 1)y + (\sqrt{2} - 2)z = 2 \\ -ax + ay + 2a^2z = \sqrt{2} \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2a-1 & \sqrt{2}-2 \\ -a & a & 2a^2 \end{pmatrix}$

La matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2a-1 & \sqrt{2}-2 & 2 \\ -a & a & 2a^2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente más sencillo.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2a-1 & \sqrt{2}-2 & 2 \\ -a & a & 2a^2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad 2a-1 \quad \sqrt{2}-2 \quad 2 \\ -2 \quad 2 \quad 2 \quad 0 \\ \hline 0 \quad 2a+1 \quad \sqrt{2} \quad 2 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\{a \neq 0\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + a \cdot \text{Fila } 1^a \\ -a \quad a \quad 2a^2 \quad \sqrt{2} \\ a \quad -a \quad -a \quad 0 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 2a^2 - a \quad \sqrt{2} \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2a+1 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 0 & 2a^2 - a & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula la matriz de coeficientes del sistema equivalente obtenido.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2a+1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2a^2 - a \end{vmatrix} = (2a+1)(2a^2 - a) = a(2a+1)(2a-1)$$

Se anula cuando $\begin{cases} a = 0 \\ 2a+1 = 0 \rightarrow a = -\frac{1}{2} \\ 2a-1 = 0 \rightarrow a = \frac{1}{2} \end{cases}$

Nos surgen 4 situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 0$, $a \neq \frac{-1}{2}$ y $a \neq \frac{1}{2}$

El determinante de A es no nulo, por lo cual su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. Aplicando el teorema de Rouché el sistema es compatible determinado (tiene solución única).

Resolvemos el sistema equivalente obtenido aplicando el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & x-y-z=0 \\ 0 & 2a+1 & \sqrt{2} & 2 & (2a+1)y+\sqrt{2}z=2 \\ 0 & 0 & 2a^2-a & \sqrt{2} & (2a^2-a)z=\sqrt{2} \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \neq 0 \\ a \neq \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-y-z=0 \\ (2a+1)y+\sqrt{2}z=2 \\ \boxed{z=\frac{\sqrt{2}}{2a^2-a}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-y-\frac{\sqrt{2}}{2a^2-a}=0 \\ (2a+1)y+\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2a^2-a}=2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-y=\frac{\sqrt{2}}{2a^2-a} \\ (2a+1)y+\frac{2}{2a^2-a}=2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-y=\frac{\sqrt{2}}{2a^2-a} \\ (2a+1)y=2-\frac{2}{2a^2-a}=\frac{4a^2-2a-2}{2a^2-a} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-y=\frac{\sqrt{2}}{2a^2-a} \\ (2a+1)y=\frac{2(2a^2-a-1)}{2a^2-a}=\frac{2\cdot(a-1)(2a+1)}{2a^2-a} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=y+\frac{\sqrt{2}}{2a^2-a} \\ \boxed{y=\frac{2\cdot(a-1)(2a+1)}{(2a^2-a)(2a+1)}=\frac{2\cdot(a-1)}{2a^2-a}} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{x=\frac{2\cdot(a-1)}{2a^2-a}+\frac{\sqrt{2}}{2a^2-a}=\frac{2a-2+\sqrt{2}}{2a^2-a}}$$

La solución es $x=\frac{2a-2+\sqrt{2}}{2a^2-a}$, $y=\frac{2\cdot(a-1)}{2a^2-a}$, $z=\frac{\sqrt{2}}{2a^2-a}$

CASO 2. $a=0$

La matriz ampliada queda $A/B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \end{array} \right)$

y la matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Por lo que el rango de A es 2 y el de la ampliada es 3. Por el teorema de Rouché el sistema es incompatible.

OTRA FORMA DE RAZONAR LA INCOMPATIBILIDAD DEL SISTEMA

El sistema equivalente triangular queda:

$$\left. \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ y + \sqrt{2}z = 2 \\ 0 = \sqrt{2} \end{array} \right\} \text{¡IMPOSIBLE!}$$

El sistema es incompatible (no tiene solución)

CASO 3. $a = \frac{-1}{2}$

La matriz ampliada queda:

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Fila } 3^a - \sqrt{2} \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \ 0 \ 2 \ 2\sqrt{2} \\ 0 \ 0 \ -2 \ -2\sqrt{2} \\ \hline 0 \ 0 \ 0 \ 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} & & & A/B \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & A & \end{array} \right)$$

Por lo que el rango de A es 2 y el de la ampliada A/B es 2. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas. Por el teorema de Rouché el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resolvemos el sistema a partir del sistema triangular equivalente obtenido.

$$\left. \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ \sqrt{2}z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ z = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow x - y - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = y + \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\text{Soluciones: } \begin{cases} x = \sqrt{2} + \lambda \\ y = \lambda \\ z = \sqrt{2} \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

CASO 4. $a = \frac{1}{2}$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

y la matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Por lo que el rango de A es 2 y el de la ampliada es 3. Por el teorema de Rouché el sistema es incompatible.

OTRA FORMA DE RAZONAR LA INCOMPATIBILIDAD DEL SISTEMA

El sistema equivalente triangular queda:

$$\left. \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ 2y + \sqrt{2}z = 2 \\ 0 = \sqrt{2} \end{array} \right\} \text{¡IMPOSIBLE!}$$

El sistema es incompatible (no tiene solución)

Resumiendo: Si $a \neq 0$, $a \neq \frac{-1}{2}$ y $a \neq \frac{1}{2}$ el sistema es compatible determinado siendo su solución $x = \frac{2a - 2 + \sqrt{2}}{2a^2 - a}$, $y = \frac{2 \cdot (a - 1)}{2a^2 - a}$, $z = \frac{\sqrt{2}}{2a^2 - a}$. Si $a = \frac{1}{2}$ o $a = 0$ el sistema es incompatible. Si $a = \frac{-1}{2}$ el sistema es compatible indeterminado siendo sus soluciones

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} + \lambda \\ y = \lambda \\ z = \sqrt{2} \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}.$$

P2) Calcula los valores de t para los que el rango de la matriz $A \cdot B$ es máximo, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & t-1 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} t+1 & 1 & t \\ 0 & t & -2t+1 \\ t+1 & t+1 & -t-1 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

La matriz $A \cdot B$ es una matriz de dimensiones 3×3 , por lo que su rango máximo posible es 3.

Para que su rango sea máximo su determinante debe ser no nulo.

Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & t-1 \\ 1 & t & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$|B| = \begin{vmatrix} t+1 & 1 & t \\ 0 & t & -2t+1 \\ t+1 & t+1 & -t-1 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t+1 & 1 & t \\ 0 & t & -2t+1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (t+1) [-t(t+1) - 2t+1 - t^2 - (t+1)(-2t+1)] =$$

$$= (t+1) \left[\cancel{-t^2} - t - \cancel{2t+1} - \cancel{t^2} + \cancel{2t^2} - t + \cancel{2t-1} \right] =$$

$$= (t+1) [-2t]$$

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = (1)(t+1)(-2t) = -2t(t+1)$$

$$|A \cdot B| = 0 \Rightarrow -2t(t+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -1 \end{cases}$$

El rango de $A \cdot B$ es máximo cuando el valor de t es distinto de 0 y de -1 .

P3) Calcula la ecuación continua de la recta perpendicular a r y s que corta a ambas, siendo

$$r \equiv \begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ x - 3y + 3z - 8 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-0}{-2}$$

(2.5 puntos)

Estudiamos previamente la posición relativa de las dos rectas.

$$r \equiv \begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ x - 3y + 3z - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + z - 2 \\ x - 3y + 3z - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow y + z - 2 - 3y + 3z - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2y + 4z - 10 = 0 \Rightarrow y - 2z + 5 = 0 \Rightarrow \boxed{y = -5 + 2z} \Rightarrow \boxed{x = -5 + 2z + z - 2 = -7 + 3z} \Rightarrow$$

$$r \equiv \begin{cases} x = -7 + 3\lambda \\ y = -5 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \vec{u}_r = (3, 2, 1) \\ P_r(-7, -5, 0) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-0}{-2} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} \vec{v}_s = (3, -4, -2) \\ Q_s(2, -5, 0) \end{cases}$$

Las coordenadas de los vectores directores de las rectas no son proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (3, 2, 1) \\ \vec{v}_s = (3, -4, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{3} \neq \frac{2}{-4} = \frac{1}{-2}$$

Las rectas son secantes o se cruzan. Realizamos el producto mixto de los vectores directores $\vec{u}_r$, $\vec{v}_s$ y el vector $\overrightarrow{P_r Q_s}$.

$$\overrightarrow{P_r Q_s} = (2, -5, 0) - (-7, -5, 0) = (9, 0, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_r = (3, 2, 1) \\ \vec{v}_s = (3, -4, -2) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (9, 0, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 9 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 36 + 0 + 36 = 0$$

Como el producto mixto es nulo las rectas se cortan.

La recta t que nos piden que hallemos pasa por el punto de corte de las rectas y tendrá como vector director el producto vectorial de los vectores directores de la recta r y s .

Hallamos el punto C de corte de las rectas.

$$s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-0}{-2} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} \vec{v}_s = (3, -4, -2) \\ Q_s(2, -5, 0) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\alpha \\ y = -5 - 4\alpha \\ z = -2\alpha \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 r &\equiv \begin{cases} x = -7 + 3\lambda \\ y = -5 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \\
 s &\equiv \begin{cases} x = 2 + 3\alpha \\ y = -5 - 4\alpha \\ z = -2\alpha \end{cases}
 \end{aligned}
 \Rightarrow \begin{cases} -7 + 3\lambda = 2 + 3\alpha \\ -5 + 2\lambda = -5 - 4\alpha \\ \lambda = -2\alpha \end{cases}
 \Rightarrow \begin{cases} -7 + 3(-2\alpha) = 2 + 3\alpha \\ -5 + 2(-2\alpha) = -5 - 4\alpha \end{cases}
 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -7 - 6\alpha = 2 + 3\alpha \\ -5 - 4\alpha = -5 - 4\alpha \end{cases}
 \Rightarrow \begin{cases} -9 = 9\alpha \\ 0 = 0 \end{cases}
 \Rightarrow \alpha = -1
 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 3 = -1 \\ y = -5 + 4 = -1 \\ z = 2 \end{cases}
 \Rightarrow \boxed{C(-1, -1, 2)}$$

Hallamos el vector director de la recta t .

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}_r &= (3, 2, 1) \\ \vec{v}_s &= (3, -4, -2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{w}_t = \vec{u}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -4i + 3j - 12k - 6k + 6j + 4i = 9j - 18k = (0, 9, -18)$$

Escribimos la ecuación continua de la recta t .

$$\left. \begin{aligned} \vec{w}_t &= (0, 9, -18) \rightarrow \vec{v}_t = (0, 1, -2) \\ M &(-1, -1, 2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{t \equiv \frac{x+1}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}}$$

P4) Sean $P(1,5,-1)$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+4}{2}$.

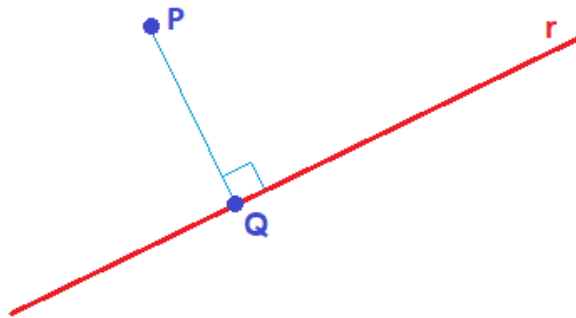
a) Calcula el punto $Q \in r$ tal que la distancia de P a Q sea mínima.

(1,25 puntos)

b) Halla los puntos Q_1 y Q_2 pertenecientes a r tales que $d(P, Q_1) = d(P, Q_2) = 3\sqrt{2}$:

(1,25 puntos)

a) El punto Q buscado es la proyección ortogonal del punto P en la recta r .



Para determinar el punto Q determinamos el plano π perpendicular a la recta que pasa por P. Dicho plano tiene como vector normal el director de la recta.

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+4}{2} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \vec{u}_r = (2,1,2) \\ A_r(1,2,-4) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{u}_r = (2,1,2) \\ P(1,5,-1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: 2x + y + 2z + D = 0 \\ P(1,5,-1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 2 + 5 - 2 + D = 0 \Rightarrow D = -5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi: 2x + y + 2z - 5 = 0$$

El punto Q es el punto de corte del plano π y la recta r .

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+4}{2} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \vec{u}_r = (2,1,2) \\ A_r(1,2,-4) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -4 + 2\lambda \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x + y + 2z - 5 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -4 + 2\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2(1 + 2\lambda) + 2 + \lambda + 2(-4 + 2\lambda) - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + 4\lambda + 2 + \lambda - 8 + 4\lambda - 5 = 0 \Rightarrow 9\lambda = 9 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2 = 3 \\ y = 2 + 1 = 3 \\ z = -4 + 2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(3,3,-2)}$$

b) La recta tiene ecuaciones $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -4 + 2\lambda \end{cases}$

Los puntos están en la recta y tienen coordenadas $Q_1(1+2a, 2+a, -4+2a)$.

$$\overrightarrow{PQ_1} = (1+2a, 2+a, -4+2a) - (1, 5, -1) = (2a, a-3, 2a-3)$$

$$d(P, Q_1) = 3\sqrt{2} \Rightarrow |\overrightarrow{PQ_1}| = 3\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{(2a)^2 + (a-3)^2 + (2a-3)^2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{4a^2 + a^2 + 9 - 6a + 4a^2 + 9 - 12a} = 3\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{9a^2 - 18a + 18} = \sqrt{18} \Rightarrow \begin{cases} 9a^2 - 18a + 18 = 18 \rightarrow 9a^2 - 18a = 0 \rightarrow a^2 - 2a = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases} \\ 0 \\ -(9a^2 - 18a + 18) = 18 \rightarrow 9a^2 - 18a + 36 = 0 \rightarrow \\ \rightarrow a^2 - 2a + 4 = 0 \Rightarrow a = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(4)}}{2} = \text{no solución} \end{cases}$$

Obtenemos dos valores que sustituimos en las ecuaciones de la recta obteniendo los puntos Q_1 y Q_2 .

$$a = 0 \Rightarrow Q_1(1+0, 2+0, -4+0) = (1, 2, -4)$$

$$a = 2 \Rightarrow Q_2(1+4, 2+2, -4+4) = (5, 4, 0)$$

Los puntos buscados son $Q_1(1, 2, -4)$ y $Q_2(5, 4, 0)$

P5) Calcule las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \frac{2x-5}{x^2+x-2} dx$

(1.25 puntos)

b) $\int x \ln x dx$

(1.25 puntos)

a) Aplicamos el método de descomposición en fracciones simples.

$$\int \frac{2x-5}{x^2+x-2} dx = \dots$$

$$x^2+x-2=0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 = x \\ \frac{-1-3}{2} = -2 = x \end{cases}$$

$$\frac{2x-5}{x^2+x-2} = \frac{2x-5}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow \frac{2x-5}{(x-1)(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-5 = A(x+2)+B(x-1) \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \rightarrow -9 = B(-3) \rightarrow B=3 \\ x=1 \rightarrow -3 = 3A \rightarrow A=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x-5}{x^2+x-2} = \frac{-1}{x-1} + \frac{3}{x+2}$$

$$\dots = \int \frac{-1}{x-1} + \frac{3}{x+2} dx = \int \frac{-1}{x-1} dx + \int \frac{3}{x+2} dx = \boxed{-\ln|x-1| + 3\ln|x+2| + K}$$

b)

$$\int x \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \rightarrow v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} = \boxed{\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + K}$$

P6) Estudia la continuidad en $\mathbb{R}$ de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos^2(\pi x) - 1}{1 - x} & x < 1 \\ \ln(x \cdot e^{x+1}) - 2x & x \geq 1 \end{cases}.$$

(2.5 puntos)

En el intervalo $(-\infty, 1)$ la función es composición de funciones continuas, el único problema es cuando se anula el denominador y si eso ocurre en el intervalo $(-\infty, 1)$.

$$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1 \notin (-\infty, 1)$$

En el intervalo $[1, +\infty)$ la función es composición de funciones continuas, el único problema es comprobar que existe el logaritmo neperiano, para ello la expresión $x \cdot e^{x+1}$ debe ser positiva, como la función exponencial siempre es positiva, debe ser positivo el valor de x , lo cual se cumple, pues son valores mayores que 1.

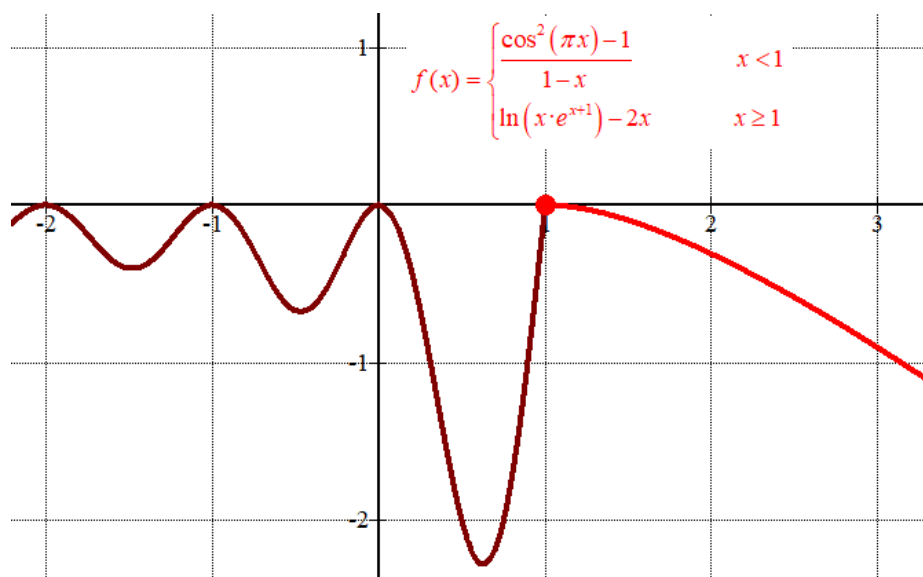
Falta comprobar la continuidad en el cambio de definición $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cos^2(\pi x) - 1}{1 - x} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2 \cos(\pi x)(-\sin(\pi x)\pi)}{-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2\pi \cos(\pi x) \sin(\pi x)}{-1} = 2\pi \cos(\pi) \sin(\pi) = 0$$

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= \ln(1 \cdot e^{1+1}) - 2 \cdot 1 = \ln(e^2) - 2 = 2 - 2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x \cdot e^{x+1}) - 2x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 0$$

La función es continua en $x = 1$. La función es continua en $\mathbb{R}$.



P7) Se considera la función $f(x) = (x+1)\sin(\pi x)$.

a) Demuestra que es continua en $\mathbb{R}$. (0.5 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (0,1)$ tal que $f(\alpha) = \frac{3}{4}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (2 puntos)

a) La función es producto y composición de funciones continuas.
La función es continua en $\mathbb{R}$.

b) Utilizamos el teorema de los valores intermedios (Teorema de Darboux):

Sea f continua en $[a,b]$ y sea m tal que $f(a) < m < f(b)$ entonces existe un valor $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = m$.

Consideramos la función $f(x) = (x+1)\sin(\pi x)$, que es continua en $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

Como $f(0) = (0+1)\sin(\pi \cdot 0) = 0$ y $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}+1\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2}$.

Tenemos que $f(0) = 0 < \frac{3}{4} < f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$.

Aplicando el teorema de los valores intermedios existe $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ tal que $f(\alpha) = \frac{3}{4}$. Este valor α obtenido también está incluido en el intervalo $(0, 1)$.

P8) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = 2 - 2x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = x^4 - x^2$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(2.5 puntos)

Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2 - 2x^2 = x^4 - x^2 \Rightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 = x^2 \rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1 \\ \frac{-1-3}{2} = -2 = x^2 \rightarrow x = \sqrt{-2} = \nexists \end{cases}$$

El área se encuentra entre $x = -1$ y $x = 1$.

Tomando un valor $x = 0$ entre -1 y 1 tenemos que $f(0) = 2 - 2 \cdot 0^2 = 2$ y $g(0) = 0^4 - 0^2 = 0$.

Tenemos que $f(x) > g(x)$ en el intervalo $(-1, 1)$.

El valor del área es la integral definida entre -1 y 1 de $f(x) - g(x)$.

$$\text{Área} = \int_{-1}^1 f(x) - g(x) dx = \int_{-1}^1 2 - 2x^2 - (x^4 - x^2) dx = \int_{-1}^1 2 - 2x^2 - x^4 + x^2 dx =$$

$$= \int_{-1}^1 -x^4 - x^2 + 2 dx = \left[-\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 2x \right]_{-1}^1 = \left[-\frac{1^5}{5} - \frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1 \right] - \left[-\frac{(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^3}{3} + 2(-1) \right] =$$

$$= -\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + 2 - \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + 2 \right) = \frac{44}{15} \approx 2.93 \text{ u}^2$$

