

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2020-2021 MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	
---	--	--

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 2 & a & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Determine los valores del parámetro real a para los que la matriz A no es invertible.
- Para $a = 1$, calcule la matriz inversa A^{-1} y obtenga la matriz X tal que $AX = B$.

A.2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

- Calcule las asíntotas de $f(x)$.
- Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

A.3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sea $f(x) = x^2 + ax$ donde a es un parámetro real.

- Determine el valor de a para que la función $f(x)$ tenga una primitiva $F(x)$ que verifique $F(0) = 3$ y $F(2) = 9$.
- Para $a = -2$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$, $x = 3$.

A.4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Una urna contiene 9 bolas blancas y 3 negras. Se seleccionan al azar consecutivamente y sin reemplazamiento dos bolas. Calcule la probabilidad de que

- La segunda bola seleccionada sea negra.
- Ambas bolas seleccionadas sean negras, dado que la segunda bola seleccionada es negra.

A.5. (Calificación máxima: 2 puntos)

Una máquina de empaquetar mantequilla la corta en barras. El peso de una barra de mantequilla se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica 4 gramos.

- Se analiza el peso de 15 barras. La media muestral resulta ser 254 gramos. Determine un intervalo de confianza con un nivel del 95% para la media poblacional.
- Para una muestra de 25 barras, se sabe que la media poblacional del peso de una barra de mantequilla es 250 gramos. Calcule la probabilidad de que la media muestral no sea menor que 248 gramos.

B.1. (Calificación máxima: 2 puntos)

- a) Represente la región S del plano delimitada por las inecuaciones

$$-2x + y \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad x + y \leq 3, \quad x \geq 0$$

y calcule las coordenadas de sus vértices

- b) Determine el máximo y el mínimo de la función
- $f(x, y) = x + y$
- sobre la región S.

B.2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se desea rellenar una piñata para un cumpleaños con juguetes de 1, 2 y 5 euros. Por cada cinco juguetes de 5 euros debe haber un juguete de 2 euros, por cada dos juguetes de 2 euros debe haber tres de 1 euro. Si para rellenar la piñata se compran juguetes por valor de 228 euros, ¿cuántos juguetes de 1, 2 y 5 euros habría que comprar para introducir en la piñata?

B.3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = ax^2 + \frac{b}{x} + 2x$$

donde a y b son parámetros reales.

- a) Calcule a , b para que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(1, 2)$ sea paralela a la $y = -4x$.
- b) Determine todos los valores de a y b para que $f(x)$ tenga un punto de inflexión en el punto $(1, 2)$.

B.4. (Calificación máxima: 2 puntos)Sean A y B dos sucesos con $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A/\bar{B}) = \frac{4}{5}$

- a) Calcule $P(A \cap \bar{B})$
- b) ¿Son A y B incompatibles? Justifique la respuesta.

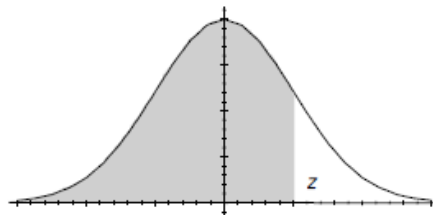
Nota: $\bar{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.**B.5. (Calificación máxima: 2 puntos)**

Para que una determinada marca de chocolate estudie entre sus clientes la demanda de sus cajas de bombones, se desea estimar la proporción de cajas grandes en relación al número de cajas de bombones vendidas, P.

- a) Sabiendo que la proporción poblacional de la demanda es $P = 0,2$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de ventas de cajas de bombones para garantizar que, con una confianza del 99 %, el margen de error en la estimación no supera el 8 %.
- b) Tomada al azar una muestra de 200 cajas de bombones vendidas, se encontró que 25 habían sido cajas grandes. Determine un intervalo de confianza al 95% para la proporción de cajas grandes en relación a la venta total de cajas de bombones.

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z .



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES**A.1. (Calificación máxima: 2 puntos)**

Se considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 2 & a & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- a) Determine los valores del parámetro real a para los que la matriz A no es invertible.
 b) Para $a = 1$, calcule la matriz inversa A^{-1} y obtenga la matriz X tal que $AX = B$.

a) Para que la matriz A sea invertible debe tener determinante no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 2 & a & 6 \end{vmatrix} = 6a^2 + 16 + 12a - 12a - 24 - 4a^2 = 2a^2 - 8$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2a^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2(a^2 - 4) = 0 \Rightarrow a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{4} = \pm 2}$$

La matriz A no es invertible para $a = -2$ y $a = 2$.

b) Para $a = 1$ la matriz A tiene inversa.

La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 6 + 16 + \cancel{12} - \cancel{12} - 24 - 4 = -6 \neq 0. \text{ Calculamos la inversa de } A.$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}}{-6} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -4 & -6 & 8 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1 & -1/3 \\ 2/3 & 1 & -4/3 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

La matriz A es invertible despejamos X de la ecuación matricial $AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$.

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -4 & -6 & 8 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} 6 - 24 + 4 \\ -12 - 24 + 16 \\ 0 + 12 - 6 \end{pmatrix} = \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} -14 \\ -20 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 10/3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$3 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 1 \rightarrow 3 \times 1$

A.2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

a) Calcule las asíntotas de $f(x)$.b) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.a) El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{1\}$.**Asíntotas verticales.** $x = a$ $x = 1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{(1-x)^2} = \frac{1^3}{(1-1)^2} = \frac{1}{0} = \infty$$

 $x = 1$ es asíntota vertical.**Asíntota horizontal.** $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(1-x)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3} - \frac{2x}{x^3} + \frac{1}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \frac{1}{\frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty}} = \frac{1}{0} = \infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^2 - 2x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3 - 2x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} - \frac{2x^2}{x^3} + \frac{x}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1 - \frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty}} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 2x + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 + 2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{2 - \frac{1}{\infty}}{1 - \frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty}} = 2$$

La asíntota oblicua es $y = x + 2$

b) Obtenemos los puntos críticos de la función buscando los valores que anulan la derivada.

$$f(x) = \frac{x^3}{(1-x)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(1-x)^2 - 2(1-x)(-1)x^3}{(1-x)^4} = \frac{3x^2(1-x) + 2x^3}{(1-x)^3} = \frac{3x^2 - 3x^3 + 2x^3}{(1-x)^3}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \frac{-x^3 + 3x^2}{(1-x)^3} \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-x^3 + 3x^2}{(1-x)^3} = 0 \Rightarrow -x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2(-x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ -x+3=0 \rightarrow \boxed{x=3} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x=0$, $x=1$ y $x=3$.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x=-1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = \frac{-(-1)^3 + 3(-1)^2}{(1-(-1))^3} = \frac{4}{8} > 0, \text{ la función crece en el intervalo } (-\infty, 0).$$

- En el intervalo $(0, 1)$ tomamos $x=0.5$ y la derivada vale

$$f'(0.5) = \frac{-0.5^3 + 3 \cdot 0.5^2}{(1-0.5)^3} = \frac{0.75}{0.125} = 1 > 0, \text{ la función crece en el intervalo } (0, 1).$$

- En el intervalo $(1, 3)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale

$$f'(2) = \frac{-2^3 + 3 \cdot 2^2}{(1-2)^3} = \frac{4}{-1} = -4 < 0, \text{ la función decrece en el intervalo } (1, 3).$$

- En el intervalo $(3, +\infty)$ tomamos $x=4$ y la derivada vale

$$f'(4) = \frac{-4^3 + 3 \cdot 4^2}{(1-4)^3} = \frac{-16}{-27} > 0, \text{ la función crece en el intervalo } (3, +\infty).$$

Resumiendo: La función crece en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y decrece en $(1, 3)$.

A.3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sea $f(x) = x^2 + ax$ donde a es un parámetro real.

- a) Determine el valor de a para que la función $f(x)$ tenga una primitiva $F(x)$ que verifique $F(0) = 3$ y $F(2) = 9$.
- b) Para $a = -2$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$, $x = 3$.

a) Hallamos la primitiva de la función.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int x^2 + ax dx = \frac{x^3}{3} + a \frac{x^2}{2} + K$$

Nos piden que $F(0) = 3$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \frac{x^3}{3} + a \frac{x^2}{2} + K \\ F(0) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{0^3}{3} + a \frac{0^2}{2} + K = 3 \Rightarrow \boxed{K = 3}$$

La primitiva queda $F(x) = \frac{x^3}{3} + a \frac{x^2}{2} + 3$.

Nos piden que $F(2) = 9$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \frac{x^3}{3} + a \frac{x^2}{2} + 3 \\ F(2) = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2^3}{3} + a \frac{2^2}{2} + 3 = 9 \Rightarrow \frac{8}{3} + 2a + 3 = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a = 6 - \frac{8}{3} \Rightarrow \boxed{a = \frac{10/3}{2} = \frac{5}{3}}$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{5}{3} \frac{x^2}{2} + 3 = \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{6} + 3$

- b) Para $a = -2$ la función es $f(x) = x^2 - 2x$. Hallamos los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje de abscisas ($y = 0$).

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 - 2x \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 0} \\ x - 2 = 0 \rightarrow \boxed{x = 2} \end{array} \right.$$

Como el valor $x = 2$ está entre 0 y 3 la región acotada del plano delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$, $x = 3$ la dividimos en dos partes: de 0 a 2 y de 2 a 3. Hallamos el área de cada parte y el área pedida es la suma de las dos áreas.

$$\int_0^2 x^2 - 2x dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^2 = \left[\frac{2^3}{3} - 2^2 \right] - \left[\frac{0^3}{3} - 0^2 \right] = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}$$

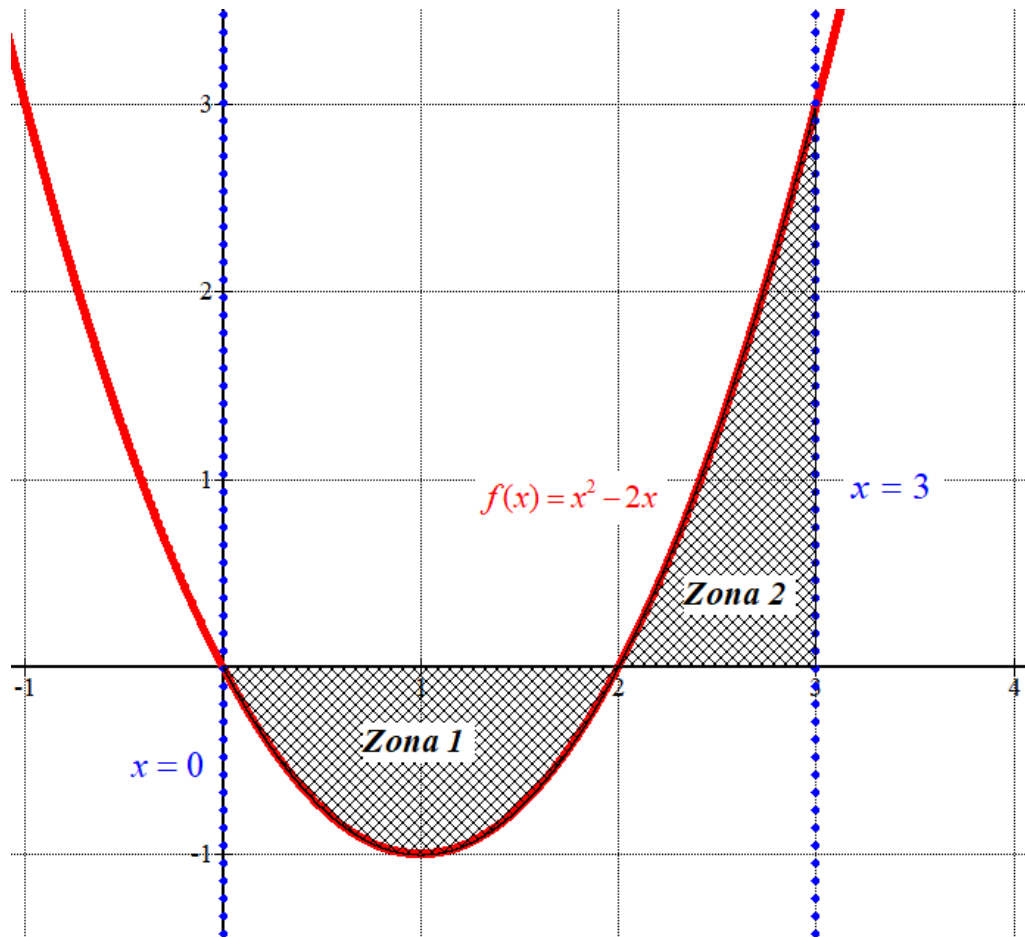
$$\text{Área1} = \left| \int_0^2 x^2 - 2x dx \right| = \left| -\frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3}$$

$$\int_2^3 x^2 - 2x dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_2^3 = \left[\frac{3^3}{3} - 3^2 \right] - \left[\frac{2^3}{3} - 2^2 \right] = 9 - 9 - \left[\frac{8}{3} - 4 \right] = \frac{4}{3}$$

$$\text{Área2} = \left| \int_2^3 x^2 - 2x dx \right| = \left| \frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3}$$

El área total es la suma: $\text{Área} = \text{Área1} + \text{Área2} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \approx 2.66 \text{ unidades}$

No lo pide, pero dibujamos el recinto para comprobar la solución obtenida.

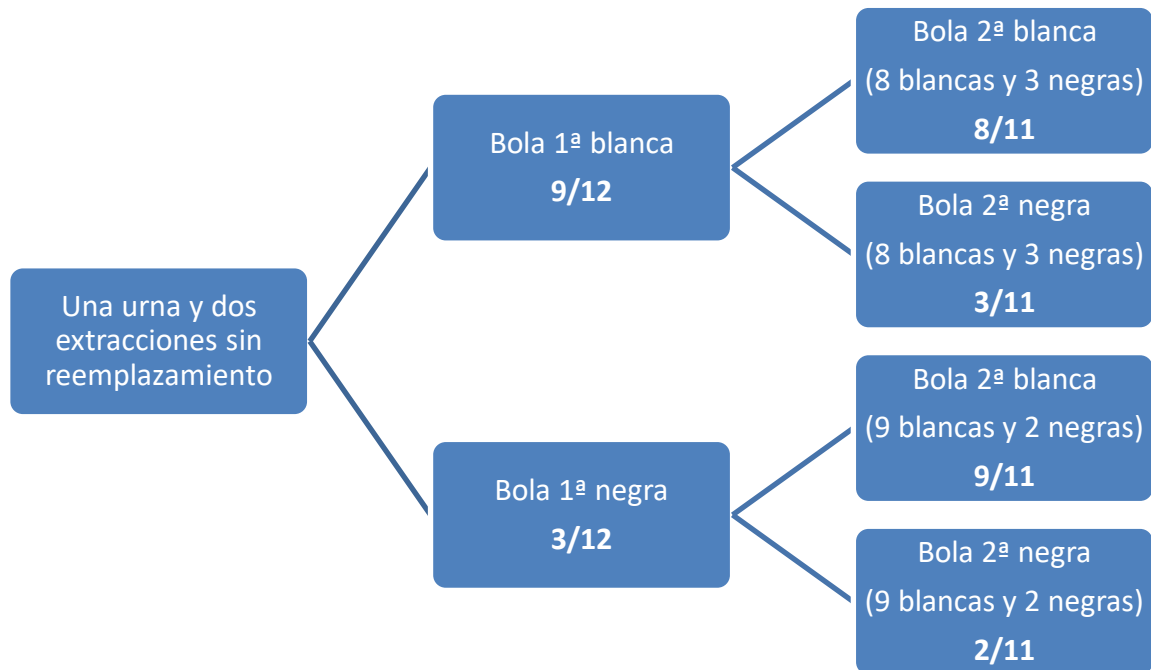


A.4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Una urna contiene 9 bolas blancas y 3 negras. Se seleccionan al azar consecutivamente y sin reemplazamiento dos bolas. Calcule la probabilidad de que

- La segunda bola seleccionada sea negra.
- Ambas bolas seleccionadas sean negras, dado que la segunda bola seleccionada es negra.

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos B1 al suceso “1ª bola blanca”, N1 al suceso “1ª bola negra” y de forma análoga B2 al suceso “2ª bola blanca”, N2 al suceso “2ª bola negra”.

- Utilizamos la información del diagrama de árbol y el teorema de la probabilidad total.

$$P(N2) = P(B1)P(N2/B1) + P(N1)P(N2/N1) = \frac{9}{12} \cdot \frac{3}{11} + \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} = \frac{1}{4} = 0.25$$

- Nos piden la probabilidad de que haya salido la primera bola negra sabiendo que la segunda ha sido negra $\rightarrow P(N1/N2)$

Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(N1/N2) = \frac{P(N1 \cap N2)}{P(N2)} = \frac{P(N1)P(N2/N1)}{P(N2)} = \frac{\frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11}}{0.25} = \frac{2}{11} \approx 0.18$$

A.5. (Calificación máxima: 2 puntos)

Una máquina de empaquetar mantequilla la corta en barras. El peso de una barra de mantequilla se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica 4 gramos.

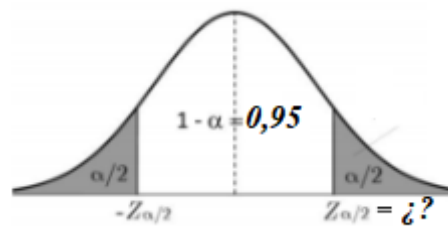
- a) Se analiza el peso de 15 barras. La media muestral resulta ser 254 gramos. Determine un intervalo de confianza con un nivel del 95% para la media poblacional.
 b) Para una muestra de 25 barras, se sabe que la media poblacional del peso de una barra de mantequilla es 250 gramos. Calcule la probabilidad de que la media muestral no sea menor que 248 gramos.

a) X = El peso en gramos de una barra de mantequilla. $X = N(\mu, 4)$.

Tamaño de muestra = $n = 15$ y $\bar{x} = 254$ gramos.

Con un nivel de confianza del 95% calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$



Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{4}{\sqrt{15}} \approx 2,0243$$

El intervalo de confianza es

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (254 - 2,0243, 254 + 2,0243) = (251,9757, 256,0243)$$

- b) La distribución de medias $\bar{X}_{25}$ sigue una distribución normal de la misma media 250 gramos y desviación típica $\frac{4}{\sqrt{25}} = 0,8$ gramos.

$$\bar{X}_{25} = N(250, 0,8)$$

La probabilidad de que la media muestral no sea menor que 248 gramos es la probabilidad de que la media muestral sea mayor o igual que 248 gramos

$$\rightarrow P(\bar{X}_{25} \geq 248)$$

$$P(\bar{X}_{25} \geq 248) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \geq \frac{248 - 250}{0,8}\right) =$$

$$= P(Z \geq -2,5) = P(Z \leq 2,5) = \{Miramos en la tabla N(0,1)\} = \boxed{0,9938}$$



z	,00	,0
0,0	0,0000	0,0
0,1	0,3980	0,0
0,2	0,7993	0,0
0,3	0,5793	0,0
0,4	0,6554	0,0
0,5	0,6915	0,0
0,6	0,7257	0,0
0,7	0,7580	0,0
0,8	0,7881	0,0
0,9	0,8159	0,0
1,0	0,8413	0,0
1,1	0,8643	0,0
1,2	0,8849	0,0
1,3	0,9032	0,0
1,4	0,9192	0,0
1,5	0,9332	0,0
1,6	0,9452	0,0
1,7	0,9554	0,0
1,8	0,9641	0,0
1,9	0,9713	0,0
2,0	0,9772	0,0
2,1	0,9821	0,0
2,2	0,9861	0,0
2,3	0,9893	0,0
2,4	0,9918	0,0
2,5	0,9938	0,0
2,6	0,9953	0,0
2,7	0,9965	0,0

B.1. (Calificación máxima: 2 puntos)

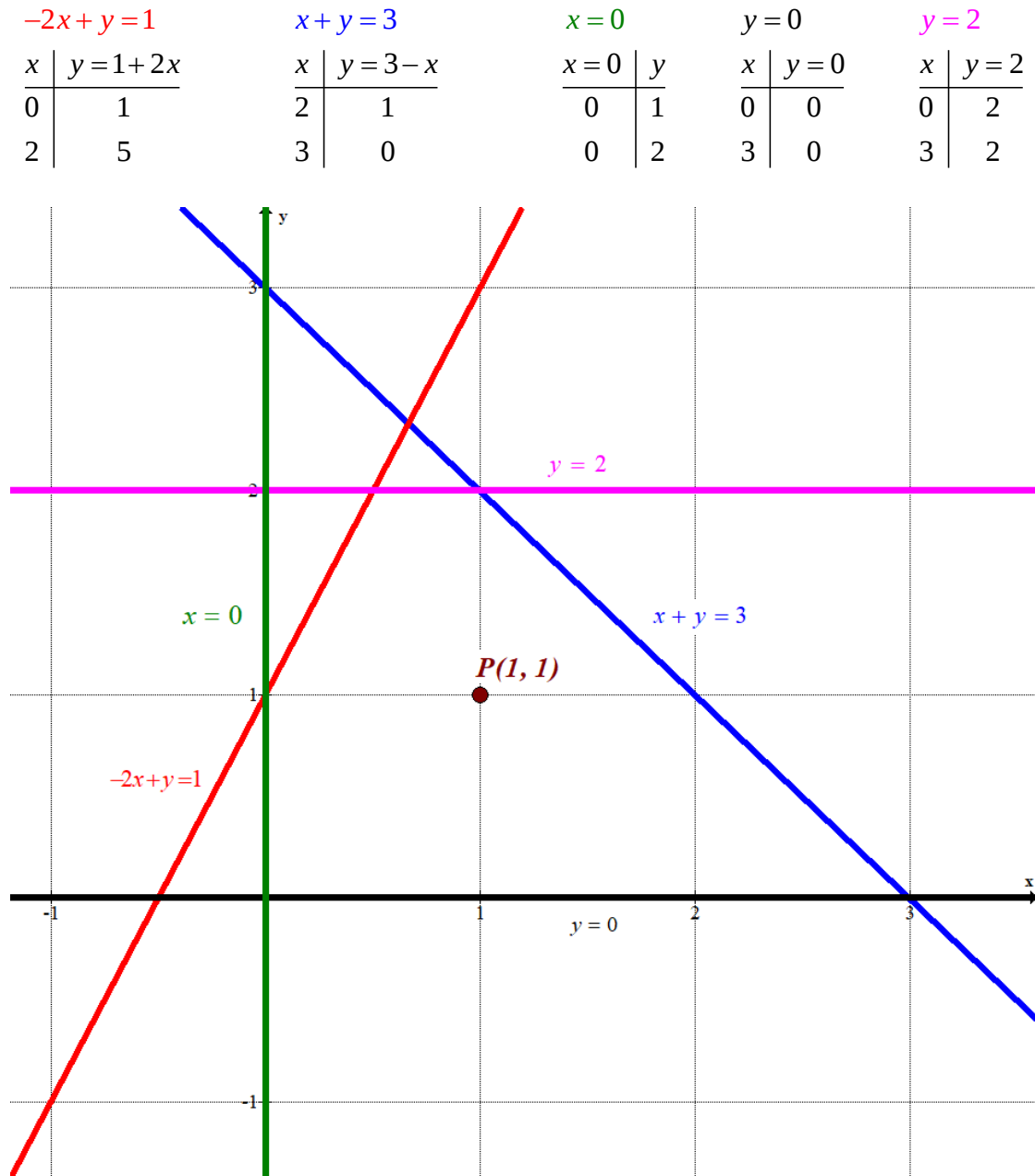
a) Represente la región S del plano delimitada por las inecuaciones

$$-2x + y \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad x + y \leq 3, \quad x \geq 0$$

y calcule las coordenadas de sus vértices

b) Determine el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x + y$ sobre la región S.

a) Representamos las rectas que delimitan la región S.

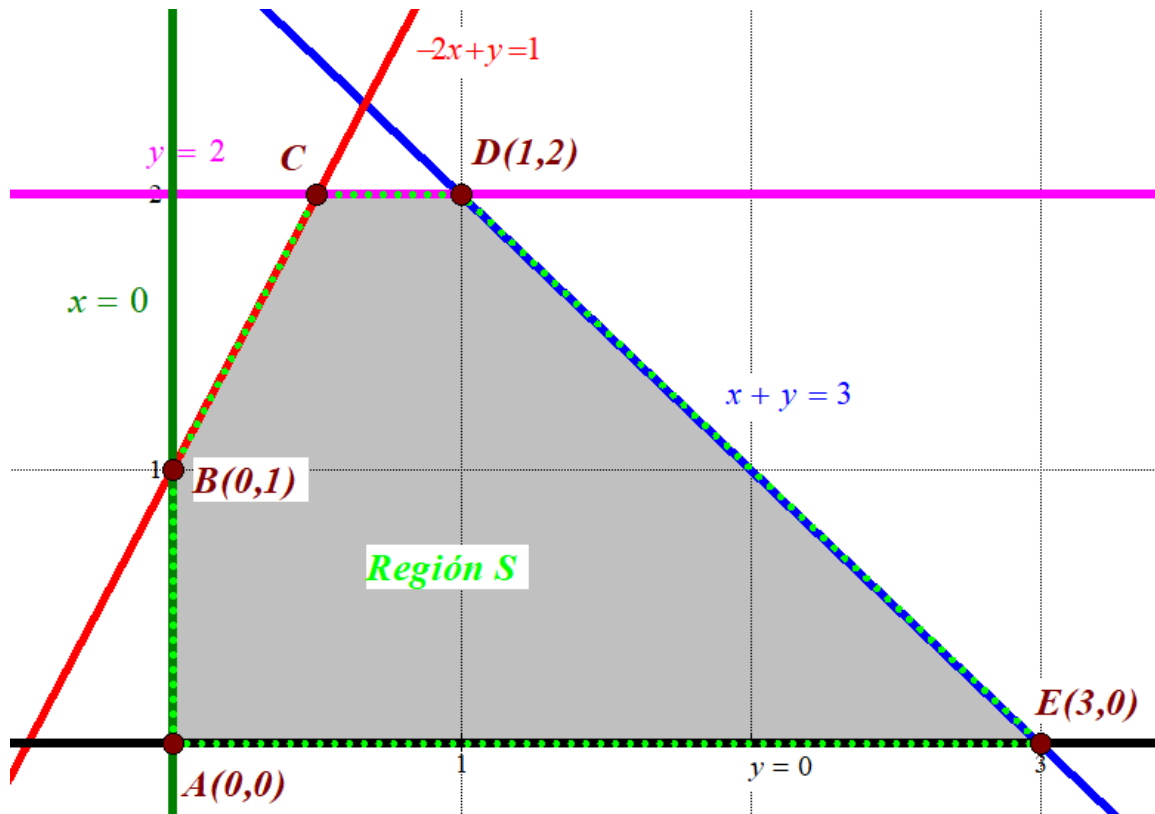


Como las inecuaciones son $-2x + y \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$, $x + y \leq 3$, $x \geq 0$ la región S está situada por debajo de las dos rectas oblicuas (roja y azul), a la derecha de la recta vertical verde y entre las líneas horizontales (rosa y negra).

Comprobamos que el punto $P(1, 1)$ perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$-2 \cdot 1 + 1 \leq 1, \quad 0 \leq 1 \leq 2, \quad 1 + 1 \leq 3, \quad 1 \geq 0$$

Se cumplen todas las inecuaciones y la región S es la coloreada de gris en el siguiente dibujo.



Hallamos las coordenadas del vértice C resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las rectas $y = 2$ y $-2x + y = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} -2x + y = 1 \\ y = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x + 2 = 1 \Rightarrow -2x = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow C\left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

Los vértices de la región S son: $A(0, 0)$, $B(0, 1)$, $C\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, $D(1, 2)$ y $E(3, 0)$.

b) Valoramos la función $f(x, y) = x + y$ en cada uno de los vértices buscando el valor máximo y mínimo.

$$A(0, 0) \rightarrow f(0, 0) = 0 + 0 = 0 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$B(0, 1) \rightarrow f(0, 1) = 0 + 1 = 1$$

$$C\left(\frac{1}{2}, 2\right) \rightarrow f\left(\frac{1}{2}, 2\right) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

$$D(1, 2) \rightarrow f(1, 2) = 1 + 2 = 3 \text{ ¡Máximo!}$$

$$E(3, 0) \rightarrow f(3, 0) = 3 + 0 = 3 \text{ ¡Máximo!}$$

El valor mínimo de la función sobre la región S es 0 y se alcanza en el vértice $A(0, 0)$.

El valor máximo de la función sobre la región S es 3 y se alcanza en los vértices $D(1, 2)$ y $E(3, 0)$, por lo que el valor máximo se alcanza en cualquier punto del segmento que une los vértices D y E.

B.2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se desea rellenar una piñata para un cumpleaños con juguetes de 1, 2 y 5 euros. Por cada cinco juguetes de 5 euros debe haber un juguete de 2 euros, por cada dos juguetes de 2 euros debe haber tres de 1 euro. Si para rellenar la piñata se compran juguetes por valor de 228 euros, ¿cuántos juguetes de 1, 2 y 5 euros habría que comprar para introducir en la piñata?

Llamamos “x” al número de juguetes de 1 € que debemos comprar, “y” al número de juguetes de 2 €, “z” al número de juguetes de 5 €.

La información proporcionada en el problema nos permite establecer las ecuaciones siguientes:

“Por cada cinco juguetes de 5 euros debe haber un juguete de 2 euros” $\rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} z \longrightarrow y \\ 5 \longrightarrow 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 5y = z$$

“Por cada dos juguetes de 2 euros debe haber tres de 1 euro” $\rightarrow$ $\left. \begin{array}{l} x \longrightarrow y \\ 3 \longrightarrow 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = 3y$

“Se compran juguetes por valor de 228 euros” $\rightarrow x + 2y + 5z = 228$

Reuniendo todas las ecuaciones tenemos un sistema que resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 5y = z \\ 2x = 3y \\ x + 2y + 5z = 228 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x = 3y \\ x + 2y + 5 \cdot 5y = 228 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x = 3y \\ x + 27y = 228 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x = 3y \\ x = 228 - 27y \end{array} \right\} \Rightarrow 2(228 - 27y) = 3y \Rightarrow 456 - 54y = 3y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 456 = 57y \Rightarrow \boxed{y = \frac{456}{57} = 8} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 228 - 27 \cdot 8 = 12} \\ \boxed{z = 5 \cdot 8 = 40} \end{array} \right.$$

Se deben comprar 12 juguetes de 1 €, 8 juguetes de 2 € y 40 juguetes de 5 €.

B.3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = ax^2 + \frac{b}{x} + 2x$$

donde a y b son parámetros reales.

- a) Calcule a , b para que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(1, 2)$ sea paralela a la $y = -4x$.
- b) Determine todos los valores de a y b para que $f(x)$ tenga un punto de inflexión en el punto $(1, 2)$.

- a) La pendiente de la recta $y = -4x$ es -4 . Si la recta tangente es paralela a esta recta la recta tangente debe tener pendiente -4 . Como la pendiente de la recta tangente en el punto $(1, 2)$ es el valor de $f'(1)$ se debe cumplir que $f'(1) = -4$.

$$f(x) = ax^2 + \frac{b}{x} + 2x \Rightarrow f'(x) = 2ax - \frac{b}{x^2} + 2$$

$$f'(1) = -4 \Rightarrow 2a \cdot 1 - \frac{b}{1^2} + 2 = -4 \Rightarrow 2a - b + 2 = -4 \Rightarrow \boxed{2a - b = -6}$$

La recta tangente debe pasar por el punto $(1, 2)$, por lo que debe cumplirse que $f(1) = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 + \frac{b}{x} + 2x \\ f(1) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 = a \cdot 1^2 + \frac{b}{1} + 2 \cdot 1 \Rightarrow 2 = a + b + 2 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow \boxed{a = -b}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} a = -b \\ 2a - b = -6 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(-b) - b = -6 \Rightarrow -2b - b = -6 \Rightarrow -3b = -6 \Rightarrow \boxed{b = 2} \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

Los valores buscados son $a = -2$ y $b = 2$.

- b) Si la función tiene un punto de inflexión en el punto $(1, 2)$ la segunda derivada debe anularse para $x = 1 \rightarrow f''(1) = 0$.

$$f(x) = ax^2 + \frac{b}{x} + 2x \Rightarrow f'(x) = 2ax - \frac{b}{x^2} + 2 = 2ax - bx^{-2} + 2 \Rightarrow f''(x) = 2a + 2bx^{-3} = 2a + \frac{2b}{x^3}$$

$$\left. \begin{array}{l} f''(x) = 2a + \frac{2b}{x^3} \\ f''(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 2a + \frac{2b}{1^3} \Rightarrow 0 = 2a + 2b \Rightarrow 0 = a + b \Rightarrow \boxed{b = -a}$$

Comprobamos que para $b = -a$; $a \in \mathbb{R}$ la derivada tercera no se anula para $x = 1$.

$$f''(x) = 2a + \frac{2(-a)}{x^3} = 2a - 2ax^{-3} \Rightarrow f'''(x) = 6ax^{-4} \Rightarrow f'''(1) = 6a \cdot 1^{-4} = 6a$$

Para que la función tenga un punto de inflexión en el punto $(1, 2)$ los valores de a y b deben ser $b = -a$; $a \neq 0$; $a \in \mathbb{R}$.

B.4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos con $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A/\bar{B}) = \frac{4}{5}$

a) Calcule $P(A \cap \bar{B})$

b) ¿Son A y B incompatibles? Justifique la respuesta.

Nota: $\bar{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.

$$\begin{aligned} \text{a) } P(A/\bar{B}) &= \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A \cap \bar{B})}{1 - P(B)} = \frac{P(A \cap \bar{B})}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{P(A \cap \bar{B})}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow \boxed{P(A \cap \bar{B}) = \frac{2}{5}} \end{aligned}$$

b) Para que dos sucesos A y B sean incompatibles su intersección debe ser nula.

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow \frac{2}{5} = P(A \cap B) + \frac{2}{5} \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 0}$$

Los sucesos A y B son incompatibles.

OTRA FORMA DE HACERLO

Con tabla de contingencia.

Asumimos que hay 10 elementos en la población.

$P(A) = \frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ significa que de los 10 elementos 4 están en A.

$P(B) = \frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ significa que de los 10 elementos 5 están en B. Por lo que 5 están en $\bar{B}$.

$P(A/\bar{B}) = \frac{4}{5}$ significa que de los 5 elementos que están en $\bar{B}$ hay 4 que están en A.

Construimos una tabla de contingencia con estos datos del problema.

	B	$\bar{B}$	
A		4	4
$\bar{A}$			
	5	5	10

Completamos la tabla:

	B	$\bar{B}$	
A	0	4	4
$\bar{A}$	5	1	6
	5	5	10

a) Mirando la tabla tenemos que $P(A \cap \bar{B}) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

b) Mirando la tabla tenemos que $P(A \cap B) = \frac{0}{10} = 0$. Los sucesos A y B son incompatibles.

B.5. (Calificación máxima: 2 puntos)

Para que una determinada marca de chocolate estudie entre sus clientes la demanda de sus cajas de bombones, se desea estimar la proporción de cajas grandes en relación al número de cajas de bombones vendidas, P .

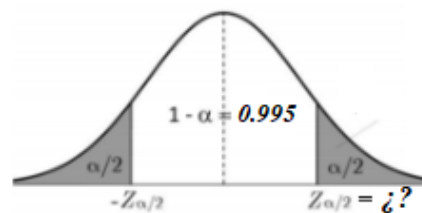
a) Sabiendo que la proporción poblacional de la demanda es $P = 0,2$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de ventas de cajas de bombones para garantizar que, con una confianza del 99 %, el margen de error en la estimación no supera el 8 %.

b) Tomada al azar una muestra de 200 cajas de bombones vendidas, se encontró que 25 habían sido cajas grandes. Determine un intervalo de confianza al 95% para la proporción de cajas grandes en relación a la venta total de cajas de bombones.

a) La proporción poblacional de la demanda es $P = 0,2$.

Con un nivel de confianza del 99% calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$$



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7225
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7853
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8829
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9439
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9544
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9858
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9915
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9935
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9942	0,9943	0,9944	0,9945	0,9946	0,9947	0,9948
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974

Utilizamos la fórmula del error con un valor de 0.08:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{P \cdot (1-P)}{n}} \Rightarrow 0,08 = 2,575 \cdot \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{n}} \Rightarrow \frac{0,08}{2,575} = \sqrt{\frac{0,16}{n}} \Rightarrow$$

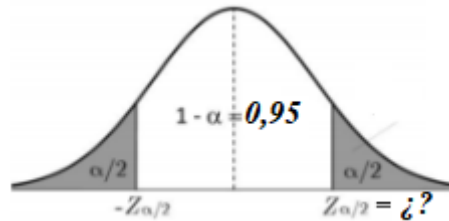
$$\Rightarrow \left(\frac{0,08}{2,575} \right)^2 = \frac{0,16}{n} \Rightarrow n = \frac{0,16}{\left(\frac{0,08}{2,575} \right)^2} = 165,765625$$

El tamaño muestral mínimo debe ser un número entero mayor que el obtenido. El tamaño mínimo de la muestra es de 166 cajas de bombones.

- b) El tamaño de la muestra es $n = 200$ cajas. La proporción muestral es $p = \frac{25}{200} = 0.125$.

Con un nivel de confianza del 95% calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



Calculamos el valor del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.125 \cdot 0.875}{200}} \simeq 0.0458$$

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.125 - 0.0458, 0.125 + 0.0458) = (0.0792, 0.1708)$$