



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2022-2023**

**MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**

- Instrucciones:**
- a) Duración: 1 hora y 30 minutos
 - b) Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
 - c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
 - d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
 - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Una conservera fabrica latas de pisto con tomate, cebolla y pimienta siguiendo dos recetas distintas. La matriz $\begin{pmatrix} 500 & 300 & 200 \\ 600 & 100 & 300 \end{pmatrix}$ indica los gramos necesarios de cada producto para conseguir una lata de cada receta. Se dispone de dos proveedores, siendo la matriz de precios en euros por kilo de cada producto $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.6 \\ 0.4 & 0.5 & 0.7 \end{pmatrix}$. Los costes de producción de cada receta en euros por lata vienen dados por la matriz $\begin{pmatrix} 0.11 & 0.09 \end{pmatrix}$. Los costes de transporte en euros por lata según cada proveedor vienen dados por la matriz $\begin{pmatrix} 0.02 & 0.03 \end{pmatrix}$. La conservera quiere obtener un beneficio de 5 céntimos por lata. Una distribuidora compra 11000 latas de la primera receta, siendo 5000 del primer proveedor, y otras 11000 de la segunda receta, siendo 6000 del primer proveedor. ¿Cuánto debe cobrar la conservera por el pedido de esta distribuidora?

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Una compañía de transporte marítimo de mercancías dispone de dos barcos B_1 y B_2 para realizar una determinada ruta, durante un año, entre dos ciudades costeras europeas. El barco B_1 no puede realizar más de 14 viajes y debe realizar tantos viajes o más que el barco B_2 . Entre los dos barcos deben realizar al menos 10 viajes y como mucho 24. La compañía obtiene unos beneficios de 15000 € por cada viaje del barco B_1 y 17000 € por cada viaje del barco B_2 . Halle el número de viajes que debe realizar cada barco para que el beneficio obtenido por la empresa sea máximo y obtenga dicho beneficio.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

- a) **(1.5 puntos)** Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x) = (-7 + x^2)^3 \cdot e^{5-x} \quad g(x) = \frac{\ln(x^4 - 2x^2)}{8 - x^3}.$$

- b) **(1 punto)** Represente gráficamente la región acotada comprendida entre la recta $y = -2x + 6$ y la parábola $y = -x^2 + 2x + 3$ y calcule su área.

EJERCICIO 4

La temperatura en el interior de un equipo de refrigeración durante un día que sufrió un corte de energía viene dada por la función f expresada en grados centígrados y el tiempo t en horas:

$$f(t) = \begin{cases} -9 & 0 \leq t \leq 1 \\ -t^2 + 12t - 20 & 1 < t < 11 \\ -9 & 11 \leq t \leq 24 \end{cases}$$

- a) **(0.75 puntos)** Estudie la continuidad de f .
 b) **(0.75 puntos)** Represente gráficamente la función f .
 c) **(0.5 puntos)** Conteste razonadamente a qué hora se produjo el corte de energía y cuánto duró dicho corte.
 d) **(0.5 puntos)** El equipo de refrigeración se utiliza para conservar sueros y vacunas. Los sueros se estropean si se alcanzan temperaturas de 20° C en algún momento. Las vacunas se estropean si están por encima de 0° C durante más de seis horas. Razone si alguno de esos productos se estropeó ese día.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

En una encuesta realizada en un instituto sobre los hábitos de los estudiantes en su tiempo libre, el 80% de los encuestados dedica el tiempo libre a enviar mensajes con el móvil o a jugar a videojuegos, el 45% realiza ambas cosas y el 40% no juega a videojuegos. Si se elige un estudiante de ese instituto al azar, calcule la probabilidad de que dedique su tiempo libre a:

- a) **(1 punto)** Enviar mensajes con el móvil y no jugar a videojuegos.
 b) **(0.5 puntos)** Jugar a videojuegos sabiendo que no envía mensajes con el móvil.
 c) **(0.5 puntos)** Hacer solamente una de las dos cosas.
 d) **(0.5 puntos)** No hacer ninguna de las dos cosas.

EJERCICIO 6

Un componente electrónico se produce en dos fábricas, A y B. Se exporta el 40% de los componentes producidos en A y la cuarta parte de los producidos en B, mientras que el resto es para consumo nacional. Además, el 37% de todos los componentes producidos es exportado. Si se elige un componente electrónico al azar, halle la probabilidad de que:

- a) **(1.5 puntos)** Se haya producido en la fábrica A.
 b) **(1 punto)** Se haya producido en la fábrica A sabiendo que no es exportado.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

Se sabe que la vida útil en meses de una batería de coche sigue una distribución Normal de media desconocida y varianza 8 meses². Se seleccionan al azar 100 clientes que habían comprado una de estas baterías y se les pregunta cuando las reemplazaron, obteniéndose una media de 4 años y 2 meses.

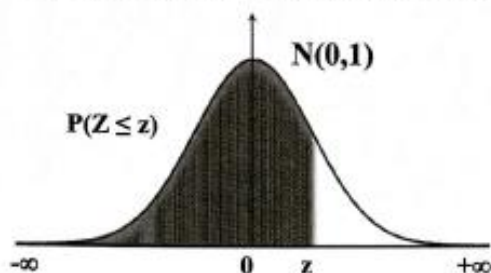
- a) **(1.25 puntos)** Determine, con un nivel de confianza del 94%, un intervalo de confianza para estimar la vida media de estas baterías.
 b) **(1.25 puntos)** Manteniendo el mismo nivel de confianza, determine el tamaño muestral mínimo que debe tomarse para que el error cometido al estimar la vida media de estas baterías sea menor que 0.1 meses.

EJERCICIO 8

El tiempo de adaptación al uso de unas gafas progresivas depende de la persona, de la graduación de las lentes y del tipo de progresivo elegido. No obstante, se sabe que el tiempo de adaptación sigue una ley Normal de media 12.5 días y desviación típica 2.5 días.

- a) **(1.25 puntos)** Si se toma una muestra aleatoria de 16 individuos que han comenzado a utilizar este tipo de gafas, ¿qué distribución sigue la media muestral del tiempo de adaptación? ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de adaptación a las gafas progresivas para dicha muestra supere los 12 días?
 b) **(1.25 puntos)** Si la muestra elegida es de tamaño 25 ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio muestral de adaptación a las gafas progresivas diste de 12 días a lo sumo 1 día?

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL N(0,1)



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z , con distribución $N(0,1)$, esté por debajo del valor z .

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Una conservera fabrica latas de pisto con tomate, cebolla y pimiento siguiendo dos recetas distintas. La matriz $\begin{pmatrix} 500 & 300 & 200 \\ 600 & 100 & 300 \end{pmatrix}$ indica los gramos necesarios de cada producto para conseguir una lata de cada receta. Se dispone de dos proveedores, siendo la matriz de precios en euros por kilo de cada producto $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.6 \\ 0.4 & 0.5 & 0.7 \end{pmatrix}$. Los costes de producción de cada receta en euros por lata vienen dados por la matriz $\begin{pmatrix} 0.11 & 0.09 \end{pmatrix}$. Los costes de transporte en euros por lata según cada proveedor vienen dados por la matriz $\begin{pmatrix} 0.02 & 0.03 \end{pmatrix}$. La conservera quiere obtener un beneficio de 5 céntimos por lata. Una distribuidora compra 11000 latas de la primera receta, siendo 5000 del primer proveedor, y otras 11000 de la segunda receta, siendo 6000 del primer proveedor. ¿Cuánto debe cobrar la conservera por el pedido de esta distribuidora?

Gramos $\rightarrow$ Tomate Cebolla Pimiento

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

Receta 1 $\rightarrow \begin{pmatrix} 500 & 300 & 200 \end{pmatrix}$
 Receta 2 $\rightarrow \begin{pmatrix} 600 & 100 & 300 \end{pmatrix}$

Lo pasamos a kilogramos.

Kg $\rightarrow$ Tomate Cebolla Pimiento

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

Receta 1 $\rightarrow \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$
 Receta 2 $\rightarrow \begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$

Los precios de los productos en cada proveedor son:

€/kg $\rightarrow$ Tomate Cebolla Pimiento

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

Proveedor 1 $\rightarrow \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$
 Proveedor 2 $\rightarrow \begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.7 \end{pmatrix}$

Multiplicamos para obtener el precio de cada receta con cada proveedor.

kg $\rightarrow$ Tom. Ceb. Pim. P1 P2

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

Receta 1 $\rightarrow \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0.4 & 0.5 \\ 0.6 & 0.7 \end{pmatrix} =$
 Receta 2 $\rightarrow \begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0.4 & 0.5 \\ 0.6 & 0.7 \end{pmatrix} =$

P1 P2

$\downarrow \quad \downarrow$

$= \begin{pmatrix} 0.25 + 0.12 + 0.12 & 0.20 + 0.15 + 0.14 \\ 0.30 + 0.04 + 0.18 & 0.24 + 0.05 + 0.21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.49 & 0.49 \\ 0.52 & 0.50 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} \text{Receta 1} \\ \text{Receta 2} \end{matrix}$

Con el proveedor 1 la receta 1 cuesta 0.49 por lata.

Con el proveedor 1 la receta 2 cuesta 0.52 por lata.

Con el proveedor 2 la receta 1 cuesta 0.49 por lata.

Con el proveedor 2 la receta 2 cuesta 0.50 por lata.

Sumamos los costes de transporte según proveedor y la producción por lata según receta.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc} P1 & P2 \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\
 (0.11 \quad 0.09) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0.11 & 0.11 \\ 0.09 & 0.09 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Receta 1} \\ \rightarrow \text{Receta 2} \end{array} \quad \begin{pmatrix} 0.02 & 0.03 \\ 0.02 & 0.03 \end{pmatrix} \\
 \\
 \begin{array}{ccccccccc} P1 & P2 & & P1 & P2 & & P1 & P2 & \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\ \text{Receta 1} \rightarrow & \begin{pmatrix} 0.49 & 0.49 \end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix} 0.11 & 0.11 \\ 0.09 & 0.09 \end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix} 0.02 & 0.03 \\ 0.02 & 0.03 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0.62 & 0.63 \\ 0.63 & 0.62 \end{pmatrix} & \leftarrow \text{Receta 1} \\
 \text{Receta 2} \rightarrow & \begin{pmatrix} 0.52 & 0.50 \end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix} 0.09 & 0.09 \end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix} 0.02 & 0.03 \\ 0.02 & 0.03 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0.63 & 0.62 \end{pmatrix} & \leftarrow \text{Receta 2}
 \end{array}
 \end{array}$$

Las 11000 latas de la primera receta (5000 del proveedor 1 y 6000 del proveedor 2) y otras 11000 de la segunda (6000 del proveedor 1 y 5000 del proveedor 2) cuestan un total:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc} P1 & P2 \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\
 \begin{pmatrix} 0.62 & 0.63 \\ 0.63 & 0.62 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Receta 1} \\ \leftarrow \text{Receta 2} \end{array} \Rightarrow 5000 \cdot 0.62 + 6000 \cdot 0.63 + 6000 \cdot 0.63 + 5000 \cdot 0.62 = \boxed{13760 \text{ €}}
 \end{array}$$

El coste total es de 13760 €.

Como la conservera quiere obtener un beneficio de 5 céntimos por lata debemos sumarle a la cifra anterior el beneficio de 0.05 € por lata que le proporcionan las 22000 latas $\rightarrow$
 $22000 \cdot 0.05 = 1100 \text{ €}$

El pedido cuesta un total de $13760 + 1100 = 14860 \text{ €}$.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Una compañía de transporte marítimo de mercancías dispone de dos barcos B_1 y B_2 para realizar una determinada ruta, durante un año, entre dos ciudades costeras europeas. El barco B_1 no puede realizar más de 14 viajes y debe realizar tantos viajes o más que el barco B_2 . Entre los dos barcos deben realizar al menos 10 viajes y como mucho 24. La compañía obtiene unos beneficios de 15000 € por cada viaje del barco B_1 y 17000 € por cada viaje del barco B_2 .

Halle el número de viajes que debe realizar cada barco para que el beneficio obtenido por la empresa sea máximo y obtenga dicho beneficio.

Llamamos “ x ” al número de viajes del barco B_1 e “ y ” al número de viajes del barco B_2 .

Hallamos las inecuaciones asociadas a las restricciones.

“El barco B_1 no puede realizar más de 14 viajes y debe realizar tantos viajes o más que el barco B_2 ” $\rightarrow x \leq 14; x \geq y$

“Entre los dos barcos deben realizar al menos 10 viajes y como mucho 24” $\rightarrow 10 \leq x + y \leq 24$.

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos todas estas restricciones en un sistema de inecuaciones.

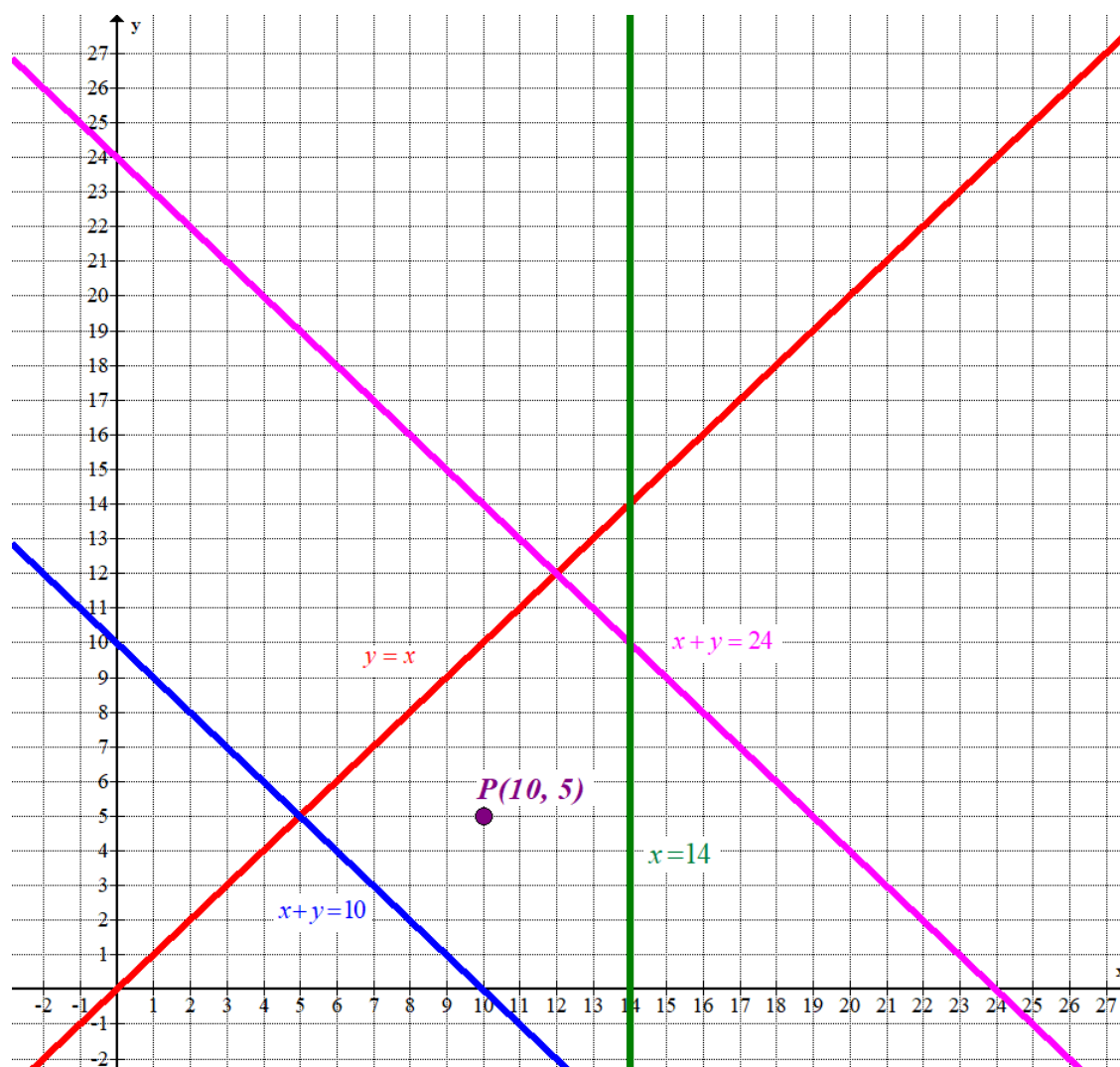
$$\left. \begin{array}{l} x \leq 14 \\ x \geq y \\ 10 \leq x + y \leq 24 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

La función que deseamos maximizar es el beneficio que viene expresado como:

$$B(x, y) = 15000x + 17000y.$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$y = x$	$x + y = 10$	$x + y = 24$	$x = 14$	$x \geq 0; y \geq 0$
$\begin{array}{c c} x & y = x \\ \hline 5 & 5 \\ 12 & 12 \end{array}$	$\begin{array}{c c} x & y = 10 - x \\ \hline 5 & 5 \\ 10 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{c c} x & y = 24 - x \\ \hline 12 & 12 \\ 14 & 10 \end{array}$	$\begin{array}{c c} x = 14 & y \\ \hline 14 & 0 \\ 14 & 10 \end{array}$	
				Primer cuadrante



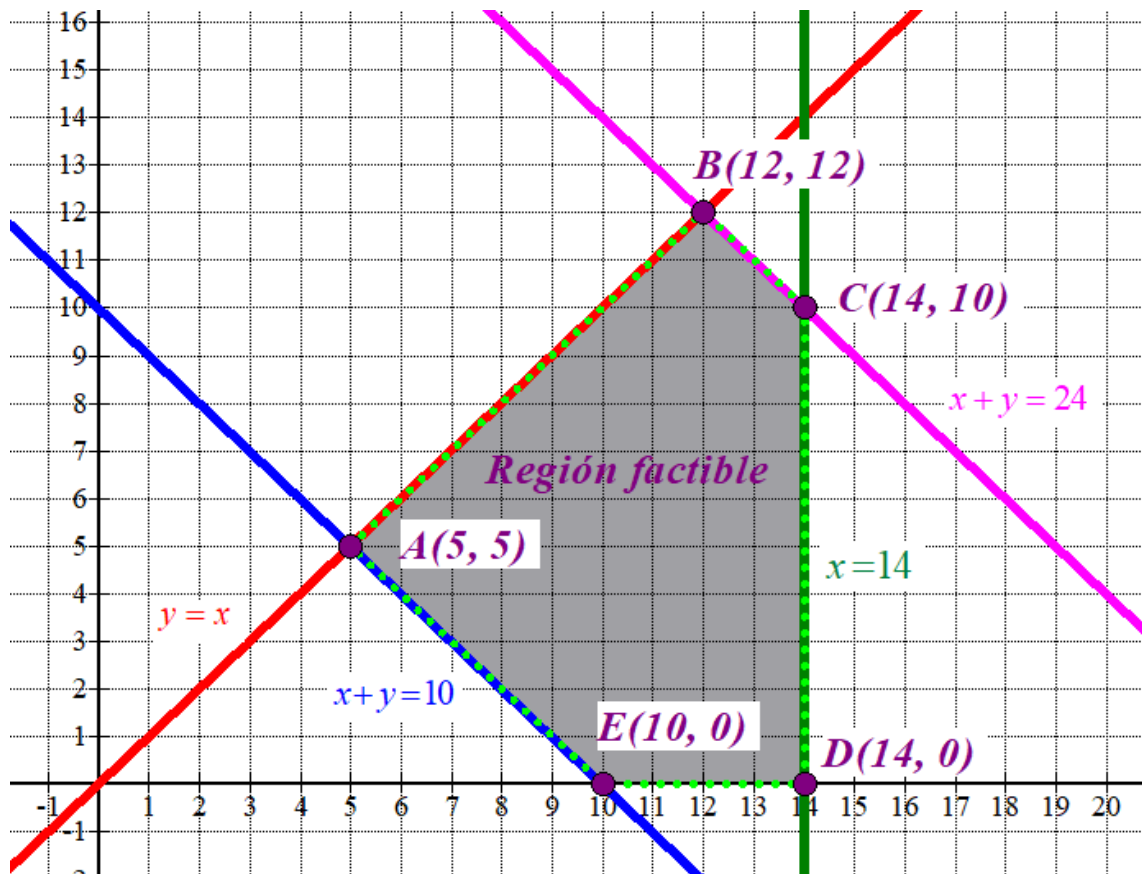
Como las restricciones son
$$\left. \begin{array}{l} x \leq 14 \\ x \geq y \\ 10 \leq x + y \leq 24 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

que está por debajo de las rectas rosa y roja, por encima de la recta azul y a la izquierda de la recta verde.

Comprobamos que el punto $P(10, 5)$ perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 \leq 14 \\ 10 \geq 5 \\ 10 \leq 10 + 5 \leq 24 \\ 10 \geq 0; 5 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas y la región factible es la coloreada de gris en el siguiente dibujo.



Los vértices son los puntos: A(5, 5), B(12, 12), C(14, 10), D(14, 0) y E(10, 0).

Valoramos la función objetivo $B(x, y) = 15000x + 17000y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$$A(5, 5) \rightarrow B(5, 5) = 15000 \cdot 5 + 17000 \cdot 5 = 160000$$

$$B(12, 12) \rightarrow B(12, 12) = 15000 \cdot 12 + 17000 \cdot 12 = 384000 \text{ ¡Máximo!}$$

$$C(14, 10) \rightarrow B(14, 10) = 15000 \cdot 14 + 17000 \cdot 10 = 380000$$

$$D(14, 0) \rightarrow B(14, 0) = 15000 \cdot 14 + 17000 \cdot 0 = 210000$$

$$E(10, 0) \rightarrow B(10, 0) = 15000 \cdot 10 + 17000 \cdot 0 = 150000$$

El máximo beneficio que se puede obtener cumpliendo con las restricciones es de 384 000 euros y se obtiene con 12 viajes del barco B_1 y otros 12 viajes del barco B_2 .

BLOQUE B

EJERCICIO 3

a) **(1.5 puntos)** Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x) = (-7 + x^2)^3 \cdot e^{5-x} \qquad g(x) = \frac{\ln(x^4 - 2x^2)}{8 - x^3}.$$

b) **(1 punto)** Represente gráficamente la región acotada comprendida entre la recta $y = -2x + 6$ y la parábola $y = -x^2 + 2x + 3$ y calcule su área.

a)

$$f'(x) = 3(-7 + x^2)^2 (2x) \cdot e^{5-x} + (-7 + x^2)^3 \cdot (-1)e^{5-x} =$$

$$= 6x(-7 + x^2)^2 \cdot e^{5-x} + (-7 + x^2)(-7 + x^2)^2 \cdot (-1)e^{5-x} =$$

$$= 6x(-7 + x^2)^2 \cdot e^{5-x} + (7 - x^2)(-7 + x^2)^2 e^{5-x}$$

$$f'(x) = (7 + 6x - x^2)(-7 + x^2)^2 \cdot e^{5-x}$$

$$g'(x) = \frac{\frac{4x^3 - 4x}{x^4 - 2x^2}(8 - x^3) - (-3x^2)\ln(x^4 - 2x^2)}{(8 - x^3)^2} =$$

$$= \frac{\frac{4x^2 - 4}{x^3 - 2x}(8 - x^3) + 3x^2 \ln(x^4 - 2x^2)}{(8 - x^3)^2}$$

$$g'(x) = \frac{\frac{4(x^2 - 1)(8 - x^3)}{x(x^2 - 2)} + 3x^2 \ln(x^4 - 2x^2)}{(8 - x^3)^2}$$

b) Hallamos los puntos de corte de las gráficas.

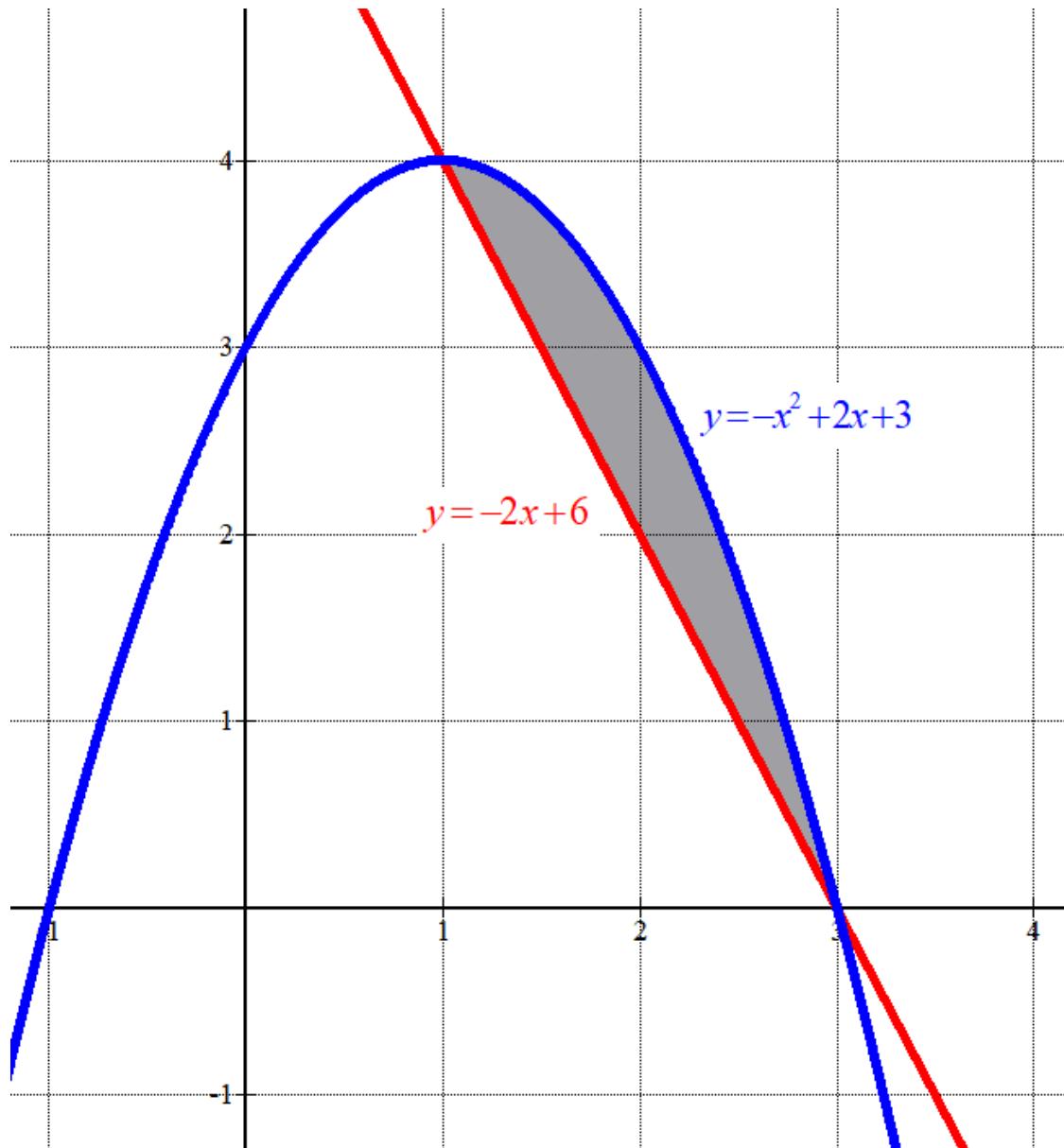
$$\left. \begin{array}{l} y = -2x + 6 \\ y = -x^2 + 2x + 3 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x + 6 = -x^2 + 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(3)}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 \\ \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y representamos.

x	$y = -2x + 6$
1	4
2	2
3	0

x	$y = -x^2 + 2x + 3$
1	4
2	3
3	0



Calculamos el valor del área de la región coloreada de gris como la integral definida entre 1 y 3 de la diferencia entre la parábola y la recta.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_1^3 (-x^2 + 2x + 3) - (-2x + 6) dx = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right]_1^3 = \\ &= \left[-\frac{3^3}{3} + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 \right] - \left[-\frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 \right] = -9 + 18 - 9 + \frac{1}{3} - 2 + 3 = \frac{1}{3} + 1 = \boxed{\frac{4}{3} \approx 1.33u^2} \end{aligned}$$

EJERCICIO 4

La temperatura en el interior de un equipo de refrigeración durante un día que sufrió un corte de energía viene dada por la función f expresada en grados centígrados y el tiempo t en horas:

$$f(t) = \begin{cases} -9 & 0 \leq t \leq 1 \\ -t^2 + 12t - 20 & 1 < t < 11 \\ -9 & 11 \leq t \leq 24 \end{cases}$$

- a) **(0.75 puntos)** Estudie la continuidad de f .
 b) **(0.75 puntos)** Represente gráficamente la función f .
 c) **(0.5 puntos)** Conteste razonadamente a qué hora se produjo el corte de energía y cuánto duró dicho corte.
 d) **(0.5 puntos)** El equipo de refrigeración se utiliza para conservar sueros y vacunas. Los sueros se estropean si se alcanzan temperaturas de 20°C en algún momento. Las vacunas se estropean si están por encima de 0°C durante más de seis horas. Razone si alguno de esos productos se estropeó ese día.

a) En el intervalo $[0, 1]$ la función es $f(t) = -9$, que es una función constante y por tanto continua.

En el intervalo $(1, 11)$ la función es $f(t) = -t^2 + 12t - 20$, que es una función polinómica (parábola) y por tanto es continua.

En el intervalo $[11, 24]$ la función es $f(t) = -9$, que es una función constante y por tanto continua.

Estudiamos la continuidad en $t = 1$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= -9 \\ \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 1^-} -9 = -9 \\ \lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 1^+} -t^2 + 12t - 20 = -1^2 + 12 - 20 = -9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(1) = \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = -9$$

La función es continua en $t = 1$.

Estudiamos la continuidad en $t = 11$.

$$\left. \begin{aligned} f(11) &= -9 \\ \lim_{t \rightarrow 11^-} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 11^-} -t^2 + 12t - 20 = -11^2 + 12 \cdot 11 - 20 = -9 \\ \lim_{t \rightarrow 11^+} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 11^+} -9 = -9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(11) = \lim_{t \rightarrow 11^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 11^+} f(t) = -9$$

La función es continua en $t = 11$.

La función es continua en su dominio $[0, 24]$.

b) La gráfica es un trozo de recta horizontal, un trozo de parábola y otro trozo de recta horizontal.

Hallamos el vértice de la parábola.

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= -t^2 + 12t - 20 \Rightarrow f'(t) = -2t + 12 \\ f'(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -2t + 12 = 0 \Rightarrow -2t = -12 \Rightarrow t = \frac{-12}{-2} = 6 \in (1, 11)$$

Hacemos una tabla de valores y representamos.

$$0 \leq t \leq 1$$

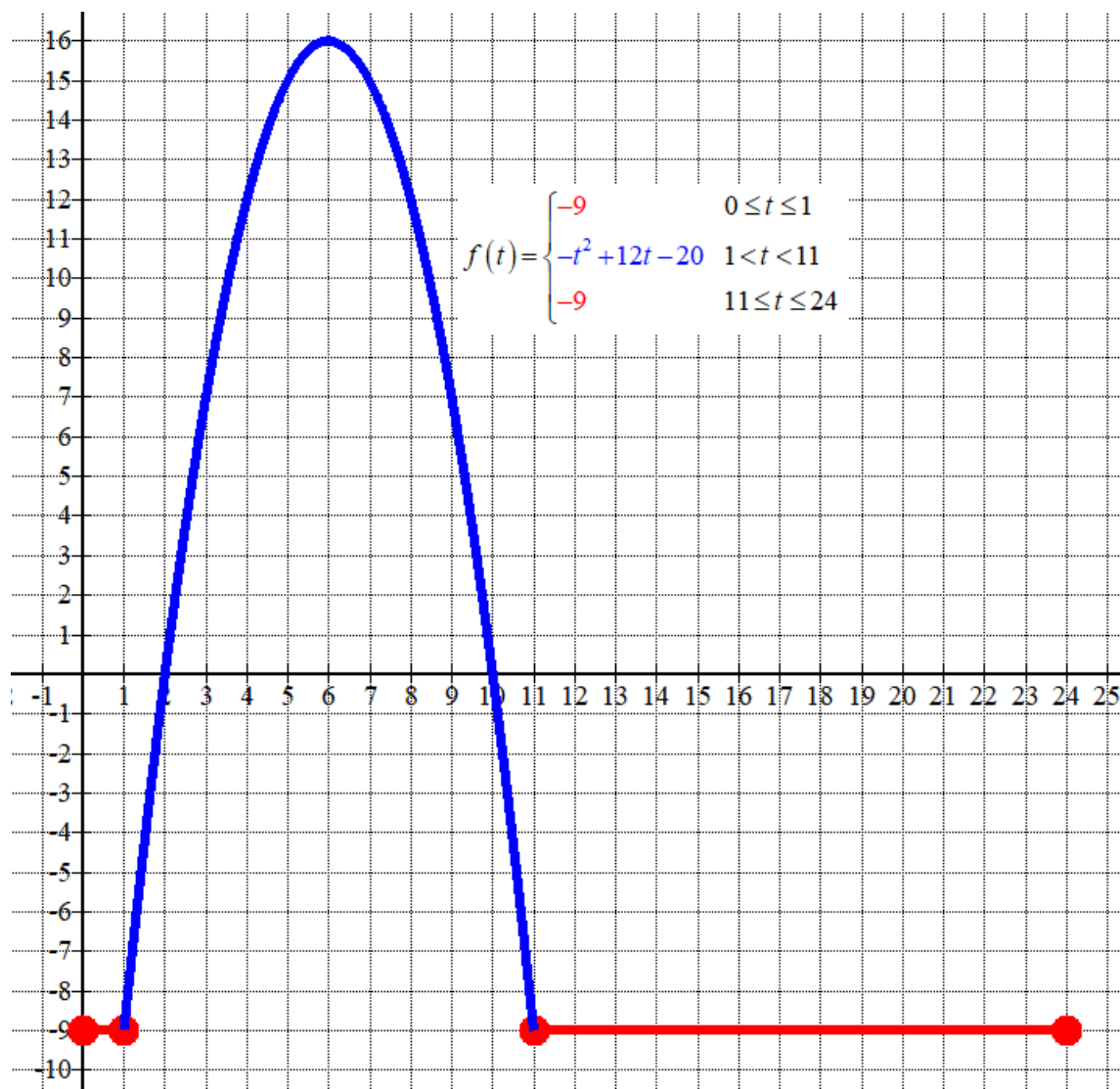
t	$f(t) = -9$
0	-9
1	-9

$$1 < t < 11$$

t	$f(t) = -t^2 + 12t - 20$
2	0
6	16
10	0

$$11 \leq t \leq 24$$

t	$f(t) = -9$
11	-9
24	-9



- c) La temperatura empezó a aumentar a partir de la hora 1 y estuvo subiendo hasta la hora 6. A partir de este momento empezó a bajar hasta que en la hora 11 vuelve a situarse a -9° . Así sigue desde la hora 11 hasta la hora 24.
Es de suponer que el equipo de refrigeración no estuvo funcionando desde la hora 1 hasta la hora 6, pues en ese intervalo la temperatura aumentó. El corte de energía duró 5 horas.
- d) Los sueros no se estropearon pues la temperatura más alta que se alcanzó fue de 16°C . Nunca se alcanzaron los 20°C .
La temperatura estuvo por encima de 0°C desde la hora 2 hasta la hora 10, es decir, durante 8 horas (más de 6 horas), por lo que las vacunas si se estropearon.

BLOQUE C**EJERCICIO 5**

En una encuesta realizada en un instituto sobre los hábitos de los estudiantes en su tiempo libre, el 80% de los encuestados dedica el tiempo libre a enviar mensajes con el móvil o a jugar a videojuegos, el 45% realiza ambas cosas y el 40% no juega a videojuegos. Si se elige un estudiante de ese instituto al azar, calcule la probabilidad de que dedique su tiempo libre a:

- (1 punto)** Enviar mensajes con el móvil y no jugar a videojuegos.
- (0.5 puntos)** Jugar a videojuegos sabiendo que no envía mensajes con el móvil.
- (0.5 puntos)** Hacer solamente una de las dos cosas.
- (0.5 puntos)** No hacer ninguna de las dos cosas.

Llamamos M al suceso “enviar mensajes con el Móvil” y V al suceso “jugar con videojuegos”.

Los datos proporcionados en el ejercicio son $P(M \cup V) = 0.80$, $P(M \cap V) = 0.45$ y

$$P(\bar{V}) = 0.40.$$

- a) Nos piden calcular $P(M \cap \bar{V})$.

$$\text{Como } P(\bar{V}) = 0.40 \text{ entonces } P(V) = 1 - P(\bar{V}) = 1 - 0.40 = 0.60.$$

Obtenemos $P(M)$.

$$P(M \cup V) = P(M) + P(V) - P(M \cap V) \Rightarrow 0.80 = P(M) + 0.60 - 0.45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(M) = 0.80 - 0.60 + 0.45 = 0.65$$

Y ahora como $P(M) = P(M \cap V) + P(M \cap \bar{V})$:

$$0.65 = 0.45 + P(M \cap \bar{V}) \Rightarrow \boxed{P(M \cap \bar{V}) = 0.65 - 0.45 = 0.20}$$

- b) Nos piden calcular $P(V / \bar{M})$.

$$P(V / \bar{M}) = \frac{P(V \cap \bar{M})}{P(\bar{M})} = \frac{P(V) - P(M \cap V)}{1 - P(M)} = \frac{0.60 - 0.45}{1 - 0.65} = \boxed{\frac{3}{7} \approx 0.4286}$$

- c) Nos piden calcular $P((\bar{M} \cap V) \cup (M \cap \bar{V}))$.

$$\text{Sabemos que } P(V \cap \bar{M}) = P(V) - P(M \cap V) = 0.60 - 0.45 = 0.15$$

$$P((\bar{M} \cap V) \cup (M \cap \bar{V})) = P(\bar{M} \cap V) + P(M \cap \bar{V}) = 0.15 + 0.20 = \boxed{0.35}$$

- d) Nos piden calcular $P(\bar{M} \cap \bar{V})$.

$$P(\bar{M} \cap \bar{V}) = P(\overline{M \cup V}) = 1 - P(M \cup V) = 1 - 0.80 = \boxed{0.20}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Como el 80% de los encuestados dedica el tiempo libre a enviar mensajes con el móvil o a jugar a videojuegos entonces el restante 20 % no envía mensajes con el móvil ni juega a videojuegos. Realizamos una tabla de contingencia.

	V	$\bar{V}$	
M	45		
$\bar{M}$		20	
		40	100

Completamos la tabla.

	V	$\bar{V}$	
M	45	20	65
$\bar{M}$	15	20	35
	60	40	100

a) Nos piden calcular $P(M \cap \bar{V})$.

$$P(M \cap \bar{V}) = \frac{20}{100} = \boxed{0.20}$$

b) Nos piden calcular $P(V / \bar{M})$. Utilizamos los datos de la segunda fila de la tabla.

$$P(V / \bar{M}) = \frac{15}{35} = \boxed{\frac{3}{7}}$$

c) Nos piden calcular $P((\bar{M} \cap V) \cup (M \cap \bar{V}))$.

$$P((\bar{M} \cap V) \cup (M \cap \bar{V})) = \frac{15 + 20}{100} = \frac{35}{100} = \boxed{0.35}$$

d) Nos piden calcular $P(\bar{M} \cap \bar{V})$.

$$P(\bar{M} \cap \bar{V}) = \frac{20}{100} = \boxed{0.20}$$

EJERCICIO 6

Un componente electrónico se produce en dos fábricas, A y B. Se exporta el 40% de los componentes producidos en A y la cuarta parte de los producidos en B, mientras que el resto es para consumo nacional. Además, el 37% de todos los componentes producidos es exportado. Si se elige un componente electrónico al azar, halle la probabilidad de que:

a) **(1.5 puntos)** Se haya producido en la fábrica A.

b) **(1 punto)** Se haya producido en la fábrica A sabiendo que no es exportado.

Llamamos A al suceso “ser un componente de la fábrica A” y $\bar{A}$ al suceso “ser fabricado en B”. También llamamos N al suceso “ser para consumo nacional” y $\bar{N}$ al suceso “ser para la exportación”.

La información proporcionada nos permite establecer las probabilidades:

$$P(\bar{N} / A) = 0.40 \Rightarrow P(N / A) = 1 - P(\bar{N} / A) = 1 - 0.40 = 0.60$$

$$P(\bar{N} / \bar{A}) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(N / \bar{A}) = 1 - P(\bar{N} / \bar{A}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$P(\bar{N}) = 0.37 \Rightarrow P(N) = 1 - P(\bar{N}) = 0.63$$

a) Nos piden calcular $P(A)$.

$$P(N / A) = \frac{P(N \cap A)}{P(A)} = 0.60 \Rightarrow P(N \cap A) = 0.60P(A)$$

$$P(N / \bar{A}) = \frac{P(N \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(N \cap \bar{A})}{1 - P(A)} = \frac{3}{4} \Rightarrow P(N \cap \bar{A}) = (1 - P(A))0.75$$

$$P(N) = P(N \cap A) + P(N \cap \bar{A}) = 0.63 \Rightarrow 0.60P(A) + (1 - P(A))0.75 = 0.63 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.60P(A) + 0.75 - 0.75P(A) = 0.63 \Rightarrow -0.15P(A) = 0.63 - 0.75 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A) = \frac{-0.12}{-0.15} = 0.8}$$

b) Nos piden calcular $P(A / N)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A / N) = \frac{P(A \cap N)}{P(N)} = \frac{P(A)P(N / A)}{P(N)} = \frac{0.8 \cdot 0.6}{0.63} = \boxed{\frac{16}{21} \approx 0.762}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

- a) Llamamos “x” al porcentaje de componentes fabricados en A. El porcentaje de componentes fabricados en B serán $100 - x$.

Construimos una tabla de contingencia.

	A	B	
Nacional			
Exportado	$0.40x$	$0.25(100 - x)$	37
	x	$100 - x$	100

Completamos la tabla.

	A	B	
Nacional	$0.6x$	$100 - x - (25 - 0.25x)$	63
Exportado	$0.40x$	$25 - 0.25x$	37
	x	$100 - x$	100

La primera fila debe cumplir que la suma de las dos primeras celdas nos dé como resultado lo que aparece en la 3ª celda de la primera fila.

$$0.6x + 100 - x - (25 - 0.25x) = 63 \Rightarrow 0.6x + 100 - x - 25 + 0.25x = 63 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -0.15x = 63 - 75 \Rightarrow -0.15x = -12 \Rightarrow x = \frac{-12}{-0.15} = 80$$

Completamos la tabla.

	A	B	
Nacional	48	15	63
Exportado	32	5	37
	80	20	100

El 80 % de los componentes están fabricados en la fábrica A. La probabilidad pedida es 0.8.

- b) Utilizando los datos de la primera fila de la tabla tenemos $P(A/N) = \frac{48}{63} = \frac{16}{21} \approx 0.762$

BLOQUE D

EJERCICIO 7

Se sabe que la vida útil en meses de una batería de coche sigue una distribución Normal de media desconocida y varianza 8 meses². Se seleccionan al azar 100 clientes que habían comprado una de estas baterías y se les pregunta cuando las reemplazaron, obteniéndose una media de 4 años y 2 meses.

- a) **(1.25 puntos)** Determine, con un nivel de confianza del 94%, un intervalo de confianza para estimar la vida media de estas baterías.
- b) **(1.25 puntos)** Manteniendo el mismo nivel de confianza, determine el tamaño muestral mínimo que debe tomarse para que el error cometido al estimar la vida media de estas baterías sea menor que 0.1 meses.

- a) X = La vida útil en meses de una batería de coche.

Como la varianza es 8 la desviación típica es $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2.83 \text{ meses}$.

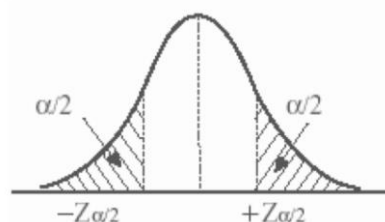
$$X = N(\mu, 2\sqrt{2})$$

El tamaño de la muestra es $n = 100$. 4 años y 2 meses son $48 + 2 = 50$ meses. La media muestral es $\bar{x} = 50 \text{ meses}$

Con un nivel de confianza del 94%

$$1 - \alpha = 0,94 \rightarrow \alpha = 0,06 \rightarrow \alpha/2 = 0,03 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,97 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.88$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761



Utilizamos la fórmula del error para establecer la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.88 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{100}} = 0.5317$$

El intervalo de confianza es

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (50 - 0.5317, 50 + 0.5317) = (49.4683, 50.5317)$$

- b) Aplicamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.88 \cdot \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{n}} = 0.1 \Rightarrow \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{n}} = \frac{0.1}{1.88} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{8}}{0.1} = \sqrt{n} \Rightarrow n = \left(\frac{1.88\sqrt{8}}{0.1} \right)^2 = 2827.52$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 2828 clientes.

EJERCICIO 8

El tiempo de adaptación al uso de unas gafas progresivas depende de la persona, de la graduación de las lentes y del tipo de progresivo elegido. No obstante, se sabe que el tiempo de adaptación sigue una ley Normal de media 12.5 días y desviación típica 2.5 días.

a) **(1.25 puntos)** Si se toma una muestra aleatoria de 16 individuos que han comenzado a utilizar este tipo de gafas, ¿qué distribución sigue la media muestral del tiempo de adaptación? ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de adaptación a las gafas progresivas para dicha muestra supere los 12 días?

b) **(1.25 puntos)** Si la muestra elegida es de tamaño 25 ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio muestral de adaptación a las gafas progresivas diste de 12 días a lo sumo 1 día?

a) X = El tiempo de adaptación al uso de unas gafas progresivas en días.

$$X = N(12.5, 2.5)$$

La media muestral sigue una distribución normal que tiene la misma media, pero su desviación típica es $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$$\overline{X}_{16} = N\left(12.5, \frac{2.5}{\sqrt{16}}\right) \Rightarrow \overline{X}_{16} = N(12.5, 0.625).$$

Nos piden calcular $P(\overline{X}_{16} \geq 12)$.

$$P(\overline{X}_{16} \geq 12) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \geq \frac{12-12.5}{0.625}\right) = P(Z \geq -0.8) =$$

$$= P(Z \leq 0.8) = \{\text{Miramos en la tabla } N(0, 1)\} = 0.7881$$

z	0.00	0.01
0.0	0.5000	0.5040
0.1	0.5398	0.5438
0.2	0.5793	0.5833
0.3	0.6179	0.6217
0.4	0.6554	0.6591
0.5	0.6915	0.6950
0.6	0.7257	0.7291
0.7	0.7580	0.7613
0.8	0.7881	0.7913
0.9	0.8159	0.8191
1.0	0.8413	0.8445

$$b) \overline{X}_{25} = N\left(12.5, \frac{2.5}{\sqrt{25}}\right) \Rightarrow \overline{X}_{25} = N(12.5, 0.5)$$

Nos piden calcular $P(12-1 \leq \overline{X}_{25} \leq 12+1) \Rightarrow P(11 \leq \overline{X}_{25} \leq 13)$.

z	0.00	0.01
0.0	0.5000	0.5040
0.1	0.5398	0.5438
0.2	0.5793	0.5833
0.3	0.6179	0.6217
0.4	0.6554	0.6591
0.5	0.6915	0.6950
0.6	0.7257	0.7291
0.7	0.7580	0.7613
0.8	0.7881	0.7913
0.9	0.8159	0.8191
1.0	0.8413	0.8445
1.1	0.8643	0.8673
1.2	0.8849	0.8879
1.3	0.9032	0.9062
1.4	0.9192	0.9222
1.5	0.9332	0.9362
1.6	0.9452	0.9482
1.7	0.9554	0.9584
1.8	0.9641	0.9671
1.9	0.9713	0.9743
2.0	0.9772	0.9802
2.1	0.9821	0.9851
2.2	0.9861	0.9891
2.3	0.9893	0.9923
2.4	0.9918	0.9948
2.5	0.9938	0.9968
2.6	0.9953	0.9983
2.7	0.9965	0.9995
2.8	0.9974	0.9999
2.9	0.9981	0.9999
3.0	0.9986	0.9999
3.1	0.9990	0.9999

$$P(11 \leq \overline{X}_{25} \leq 13) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{11-12.5}{0.5} \leq Z \leq \frac{13-12.5}{0.5}\right) =$$

$$= P(-3 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -3) = P(Z \leq 1) - P(Z \geq 3) =$$

$$= P(Z \leq 1) - [1 - P(Z \leq 3)] = \{\text{Miramos en la tabla } N(0, 1)\} =$$

$$= 0.8413 - [1 - 0.99865] = 0.83995$$