



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2022-2023**

**MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**

- Instrucciones:**
- a) Duración: 1 hora y 30 minutos
 - b) Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
 - c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
 - d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
 - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Una empresa de pinturas quiere elaborar botes de pintura de dos colores nuevos: Júpiter y Minerva. Para ello, dispone de 1000 kg de pintura de color verde, 800 kg de color morado y 300 kg de color naranja. Para elaborar un bote de color Júpiter se necesitan 10 kg de pintura verde, 5 kg de morada y 5 kg de naranja. Para elaborar un bote de color Minerva se necesitan 5 kg de pintura verde y 5 kg de morada. Sabiendo que se obtiene un beneficio de 30 € por cada bote de pintura Júpiter y 20 € por un bote de pintura Minerva, ¿cuántos botes de cada tipo deberá fabricar la empresa para obtener un beneficio máximo? ¿Cuál será el valor de ese beneficio?

EJERCICIO 2

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -9 \\ -2 & 0 & 11 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- a) **(0.5 puntos)** Halle las dimensiones de las siguientes matrices C^tAC , ACC^tB .
- b) **(1 punto)** Calcule, en caso de existir, las inversas de las matrices A y B .
- c) **(1 punto)** Resuelva el siguiente sistema matricial

$$\begin{cases} 2X + 3Y = A \\ -3X + 4Y = B \end{cases}$$

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 4 & x < 3 \\ -x + 4 & x \geq 3 \end{cases}.$$

- a) **(1.25 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de la función en todos los puntos de su dominio.
- b) **(0.5 puntos)** Represente gráficamente f .
- c) **(0.75 puntos)** Calcule el área de la región limitada por la gráfica de f , el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 4$.

EJERCICIO 4

La función $B(t) = -t^2 + 21t - 20$ con $0 \leq t \leq 15$ representa el beneficio, en miles de euros, de una empresa en función de los años, t .

- (0.5 puntos)** Si la función $I(t) = -t^2 + 48t$ representa los ingresos de esta empresa, en miles de euros, para el mismo intervalo de tiempo, ¿cuál es la función de gastos de dicha empresa? ¿Cuáles son los gastos iniciales?
- (0.5 puntos)** Calcule el momento a partir del cual el beneficio fue positivo.
- (0.75 puntos)** Calcule en qué momento el beneficio fue máximo y el valor del mismo.
- (0.75 puntos)** Represente gráficamente la función beneficio.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Una fábrica produce procesadores que se clasifican en un primer control en tres tipos, A, B y C, según la frecuencia a la que pueden trabajar. El 60 % de los procesadores fabricados se clasifican de tipo A, el 30 % de tipo B y el resto de tipo C. En un segundo control, se desechan el 20 % de los procesadores de tipo A, el 30 % de los de tipo B y el 60 % de los de tipo C, por problemas al trabajar a ciertas temperaturas. Si se elige un procesador de esta fábrica al azar, calcule la probabilidad de que:

- (1 punto)** Sea descartado y sea de tipo A o de tipo B.
- (0.75 puntos)** Sea descartado.
- (0.75 puntos)** Sea de tipo C sabiendo que no ha sido descartado.

EJERCICIO 6

El 75 % del alumnado de un instituto utiliza la plataforma del centro como medio para comunicarse con sus profesores y el 40 % lo hace a través del correo electrónico. Además, hay un 15 % que no usa ninguno de estos medios. Se elige un estudiante de este instituto al azar.

- (0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que utilice ambos medios de comunicación.
- (0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que utilice solamente uno de estos medios de comunicación.
- (0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que utilice la plataforma del centro sabiendo que no usa el correo electrónico como medio de comunicación.
- (0.5 puntos)** Razone si los sucesos "Utilizar la plataforma del centro" y "Utilizar el correo electrónico" son independientes.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

Una empresa fabrica piezas cuyo diámetro sigue una distribución Normal de media desconocida y varianza 9 mm^2 .

- (0.75 puntos)** Se seleccionan al azar 144 piezas obteniéndose un diámetro medio de 81 mm . Determine un intervalo de confianza al 98.5 % para estimar el diámetro medio de las piezas fabricadas por la empresa.
- (0.75 puntos)** Con el mismo nivel de confianza del apartado anterior, ¿de qué tamaño mínimo habría que tomar la muestra para obtener un intervalo de confianza con una amplitud máxima de 0.9?
- (1 punto)** Suponiendo que la media poblacional es de 80.4 mm y tomando muestras aleatorias de 64 piezas, ¿qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria diámetro medio muestral? ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro medio muestral esté comprendido entre 79.5 mm y 80.7 mm ?

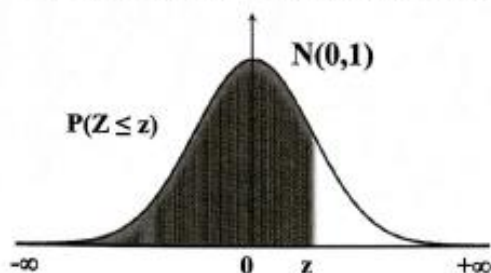
EJERCICIO 8

Se selecciona una muestra aleatoria de 300 habitantes de una ciudad, a los que se les pregunta si creen que llevan una dieta saludable. De las personas encuestadas, 180 han contestado afirmativamente, mientras que el resto ha respondido que no.

- (1.25 puntos)** Calcule un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de personas que creen seguir una dieta saludable.

b) **(1.25 puntos)** ¿Cuál sería el número de habitantes mínimo necesario en este estudio de opinión para que se reduzca a un tercio del error cometido en el intervalo $(0.54, 0.66)$ con el mismo nivel de confianza?

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL N(0,1)



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z , con distribución $N(0,1)$, esté por debajo del valor z .

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Una empresa de pinturas quiere elaborar botes de pintura de dos colores nuevos: Júpiter y Minerva. Para ello, dispone de 1000 kg de pintura de color verde, 800 kg de color morado y 300 kg de color naranja. Para elaborar un bote de color Júpiter se necesitan 10 kg de pintura verde, 5 kg de morada y 5 kg de naranja. Para elaborar un bote de color Minerva se necesitan 5 kg de pintura verde y 5 kg de morada. Sabiendo que se obtiene un beneficio de 30 € por cada bote de pintura Júpiter y 20 € por un bote de pintura Minerva, ¿cuántos botes de cada tipo deberá fabricar la empresa para obtener un beneficio máximo? ¿Cuál será el valor de ese beneficio?

Llamamos “x” al número de botes de pintura Júpiter e “y” al número de pintura Minerva.

Realizamos una tabla con los datos del ejercicio.

	Kgs de pintura verde	Kgs de pintura morada	Kgs de pintura naranja	Beneficio
Nº botes Júpiter (x)	10x	5x	5x	30x
Nº botes Minerva (y)	5y	5y		20y
TOTAL	10x + 5y	5x + 5y	5x	30x + 20y

“Dispone de 1000 kg de pintura de color verde, 800 kg de color morado y 300 kg de color naranja” $\rightarrow 10x + 5y \leq 1000$; $5x + 5y \leq 800$; $5x \leq 300$.

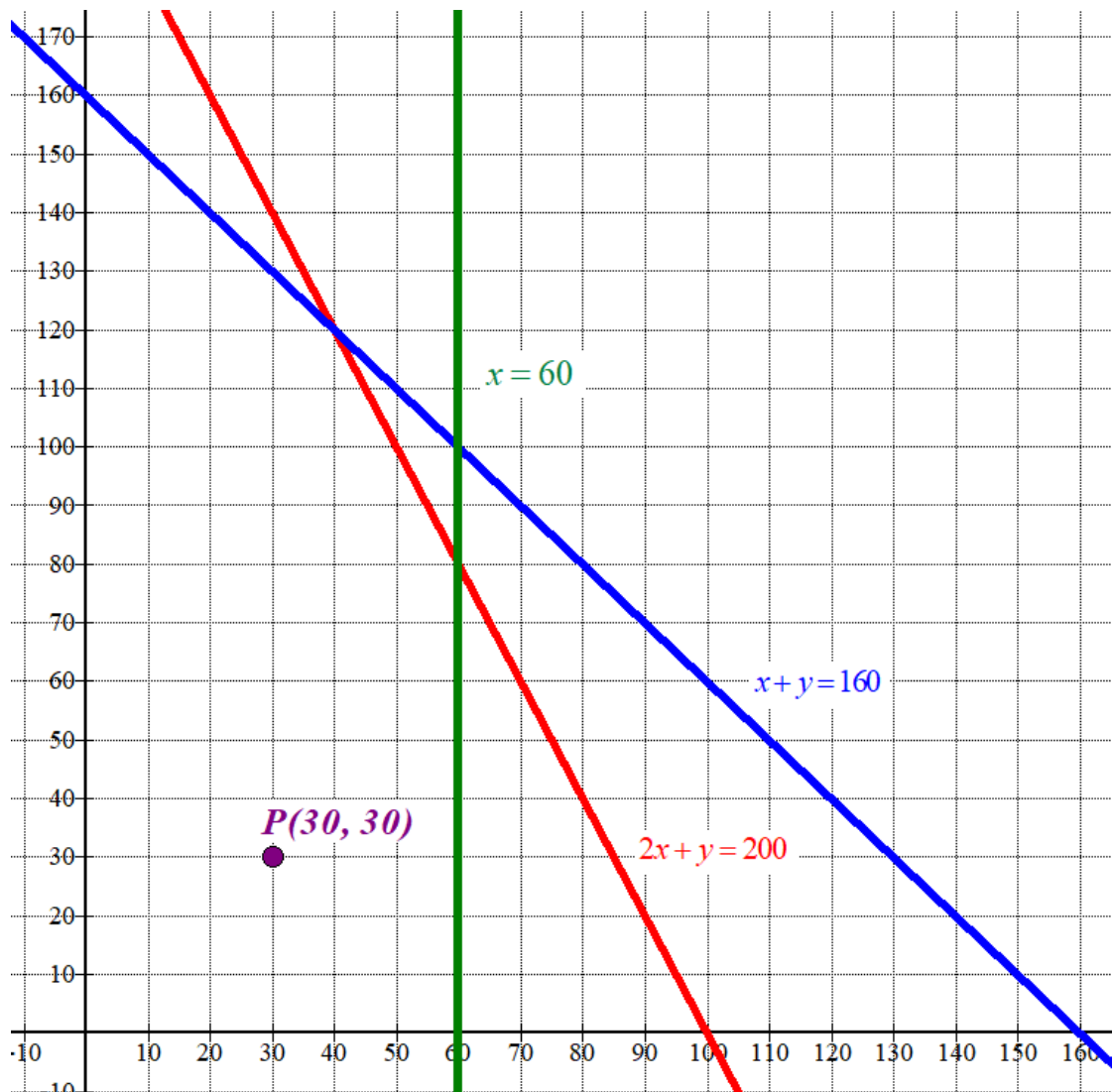
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos todas estas restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10x + 5y \leq 1000 \\ 5x + 5y \leq 800 \\ 5x \leq 300 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 200 \\ x + y \leq 160 \\ x \leq 60 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$2x + y = 200$	$x + y = 160$	$x = 60$	$x \geq 0; y \geq 0$
$x \mid y = 200 - 2x$	$x \mid y = 160 - x$	$x = 60 \mid y$	
40 $\mid$ 120	0 $\mid$ 160	60 $\mid$ 0	
60 $\mid$ 80	40 $\mid$ 120	60 $\mid$ 80	Primer cuadrante



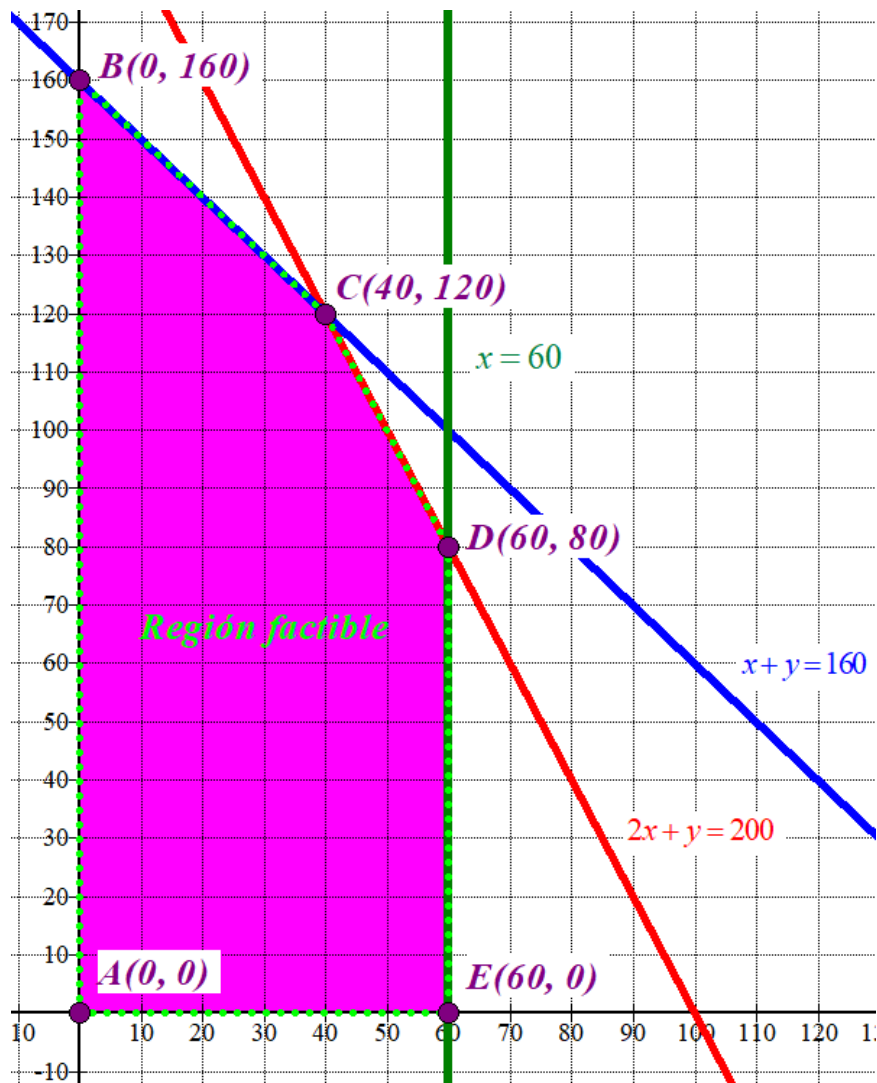
Como las restricciones son
$$\left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 200 \\ x + y \leq 160 \\ x \leq 60 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$
 la región factible es la región del primer cuadrante que

está por debajo de las rectas azul y roja, y a la izquierda de la recta verde.

Comprobamos que el punto $P(30, 30)$ perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 30 + 30 \leq 200 \\ 30 + 30 \leq 160 \\ 30 \leq 60 \\ 30 \geq 0; 30 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas y la región factible es la coloreada de rosa en el siguiente dibujo.



Los vértices son los puntos: $A(0, 0)$, $B(0, 160)$, $C(40, 120)$, $D(60, 80)$ y $E(60, 0)$.
La función objetivo que deseamos maximizar es el beneficio $B(x, y) = 30x + 20y$.

Valoramos la función objetivo en cada vértice.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 160) \rightarrow B(0, 160) = 30 \cdot 0 + 20 \cdot 160 = 3200$$

$$C(40, 120) \rightarrow B(40, 120) = 30 \cdot 40 + 20 \cdot 120 = 3600 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(60, 80) \rightarrow B(60, 80) = 30 \cdot 60 + 20 \cdot 80 = 3400$$

$$E(60, 0) \rightarrow B(60, 0) = 30 \cdot 60 + 20 \cdot 0 = 1800$$

El máximo beneficio que se puede obtener cumpliendo con las restricciones es de 3600 euros y se obtiene fabricando 40 botes de pintura Júpiter y 120 de pintura Minerva.

EJERCICIO 2

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -9 \\ -2 & 0 & 11 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) **(0.5 puntos)** Halle las dimensiones de las siguientes matrices $C^t A C$, $A C C^t B$.

b) **(1 punto)** Calcule, en caso de existir, las inversas de las matrices A y B .

c) **(1 punto)** Resuelva el siguiente sistema matricial

$$\begin{cases} 2X + 3Y = A \\ -3X + 4Y = B \end{cases}$$

a) Si $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ entonces $C^t = (1 \quad 2 \quad -1)$.

$$C^t \cdot A \cdot C$$

$$1 \times \boxed{3 \cdot 3} \times \boxed{3 \cdot 3} \times 1 \longrightarrow 1 \times 1$$

La matriz $C^t A C$ es 1×1 , tiene una fila y una columna (un único elemento).

$$A \cdot C \cdot C^t \cdot B$$

$$3 \times \boxed{3 \cdot 3} \times \boxed{1 \cdot 1} \times \boxed{3 \cdot 3} \times 3 \longrightarrow 3 \times 3$$

La matriz $A C C^t B$ es 3×3 , es una matriz cuadrada de orden 3.

b) Comprobamos si la matriz A tiene inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -7 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 126 - (0 + 49 + 60) = 17 \neq 0$$

Su determinante es no nulo y podemos calcular su inversa.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 \\ -7 & 0 & 3 \\ 6 & 4 & -1 \end{pmatrix}}{17} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -7 & 3 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -7 & 0 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -7 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} -12 & 11 & -28 \\ 7 & -5 & 22 \\ 21 & -15 & 49 \end{pmatrix}$$

Comprobamos si la matriz B tiene inversa.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -9 \\ -2 & 0 & 11 \\ 0 & 4 & -7 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 72 - (0 + 28 + 44) = 0$$

Su determinante es nulo y la matriz B no tiene matriz inversa.

c) Despejamos X e Y.

$$\begin{aligned} 3 \times \rightarrow \begin{cases} 2X + 3Y = A \\ -3X + 4Y = B \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 6X + 9Y = 3A \\ -6X + 8Y = 2B \end{cases} \\ \hline 17Y = 3A + 2B &\Rightarrow Y = \frac{3A + 2B}{17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \times \rightarrow \begin{cases} 2X + 3Y = A \\ -3X + 4Y = B \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 8X + 12Y = 4A \\ 9X - 12Y = -3B \end{cases} \\ -3 \times \rightarrow \begin{cases} 2X + 3Y = A \\ -3X + 4Y = B \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 8X + 12Y = 4A \\ 9X - 12Y = -3B \end{cases} \\ \hline 17X = 4A - 3B &\Rightarrow X = \frac{4A - 3B}{17} \end{aligned}$$

Obtenemos la expresión de la matriz X.

$$4A - 3B = 4 \begin{pmatrix} 5 & -7 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -9 \\ -2 & 0 & 11 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20-3 & -28-6 & 24+27 \\ 28+6 & 0 & 16-33 \\ 0 & 12-12 & -4+21 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{4A - 3B}{17} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 17 & -34 & 51 \\ 34 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de la matriz Y.

$$3A + 2B = 3 \begin{pmatrix} 5 & -7 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -9 \\ -2 & 0 & 11 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15+2 & -21+4 & 18-18 \\ 21-4 & 0 & 12+22 \\ 0 & 9+8 & -3-14 \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{3A + 2B}{17} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 17 & -17 & 0 \\ 17 & 0 & 34 \\ 0 & 17 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 4 & x < 3 \\ -x + 4 & x \geq 3 \end{cases}.$$

- a) **(1.25 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de la función en todos los puntos de su dominio.
 b) **(0.5 puntos)** Represente gráficamente f .
 c) **(0.75 puntos)** Calcule el área de la región limitada por la gráfica de f , el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 4$.

a) En el intervalo $(-\infty, 3)$ la función es $f(x) = x^2 - 4x + 4$ que es una función polinómica (parábola) y por tanto continua.

En el intervalo $(3, +\infty)$ la función es $f(x) = -x + 4$ que es una función polinómica (recta) y es continua.

Estudiamos la continuidad en $x = 3$.

$$\left. \begin{aligned} f(3) &= -3 + 4 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 - 4x + 4 = 3^2 - 4 \cdot 3 + 4 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} -x + 4 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) = 1$$

La función es continua en $x = 3$. La función es continua en su dominio de definición $\mathbb{R}$.

En el intervalo $(-\infty, 3)$ la función es $f(x) = x^2 - 4x + 4$ que es una función derivable y su derivada es $f'(x) = 2x - 4$.

En el intervalo $(3, +\infty)$ la función es $f(x) = -x + 4$ que es una función derivable y su derivada es $f'(x) = -1$.

Estudiamos la derivabilidad en $x = 3$.

La función derivada en $\mathbb{R} - \{3\}$ es $f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & x < 3 \\ -1 & x > 3 \end{cases}$. Calculamos las derivadas laterales en $x = 3$ y comprobamos si coinciden.

$$\left. \begin{aligned} f'(3^-) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 2x - 4 = 2 \\ f'(3^+) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} -1 = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(3^-) = 2 \neq -1 = f'(3^+)$$

La función no es derivable en $x = 3$.

Resumiendo: La función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{3\}$.

- b) La gráfica de la función es un trozo de parábola y un trozo de recta. Hallamos el vértice de la parábola.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 2x - 4 \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \in (-\infty, 3)$$

Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

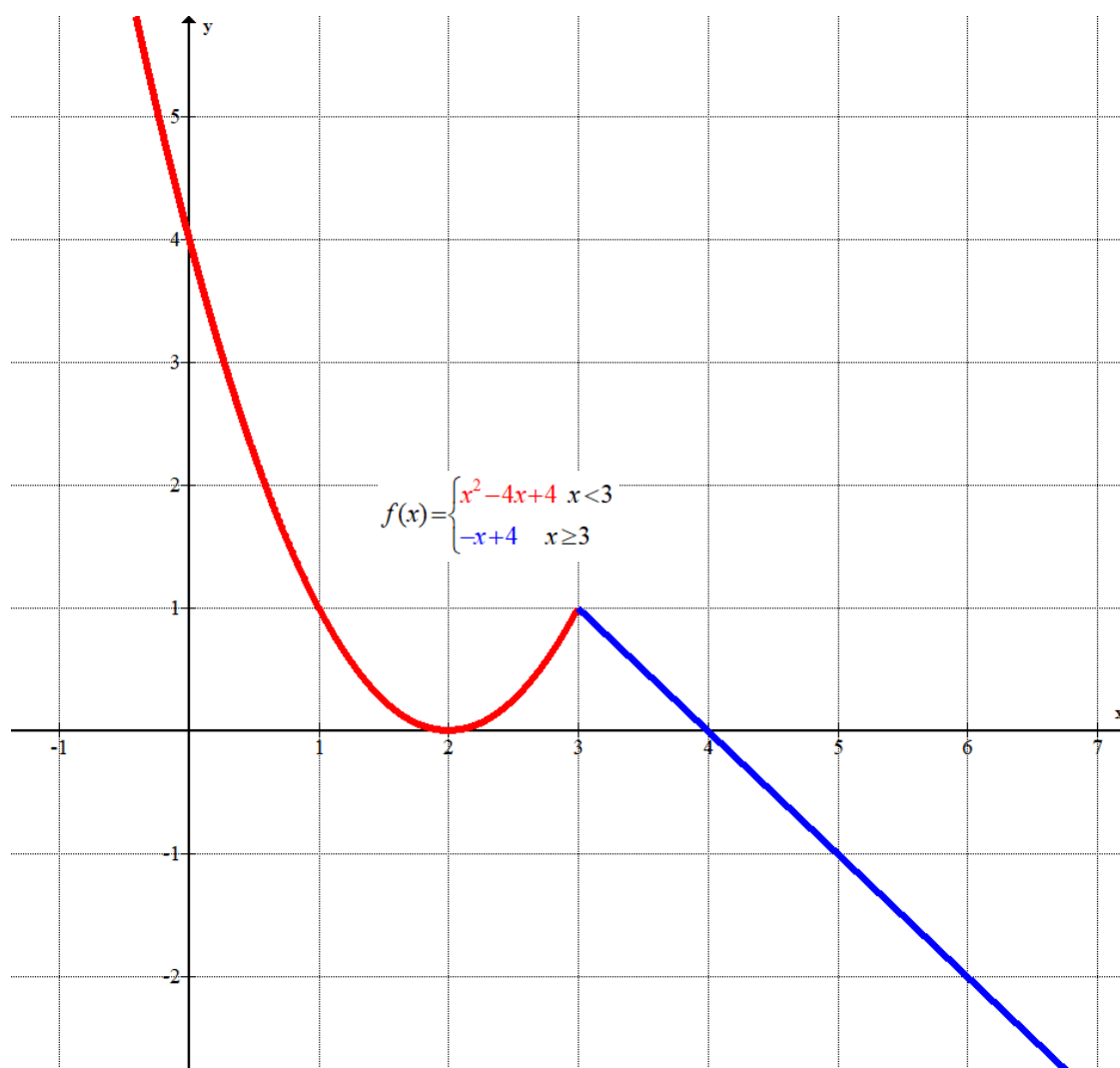
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 4 & x < 3 \\ -x + 4 & x \geq 3 \end{cases}$$

$x < 3$

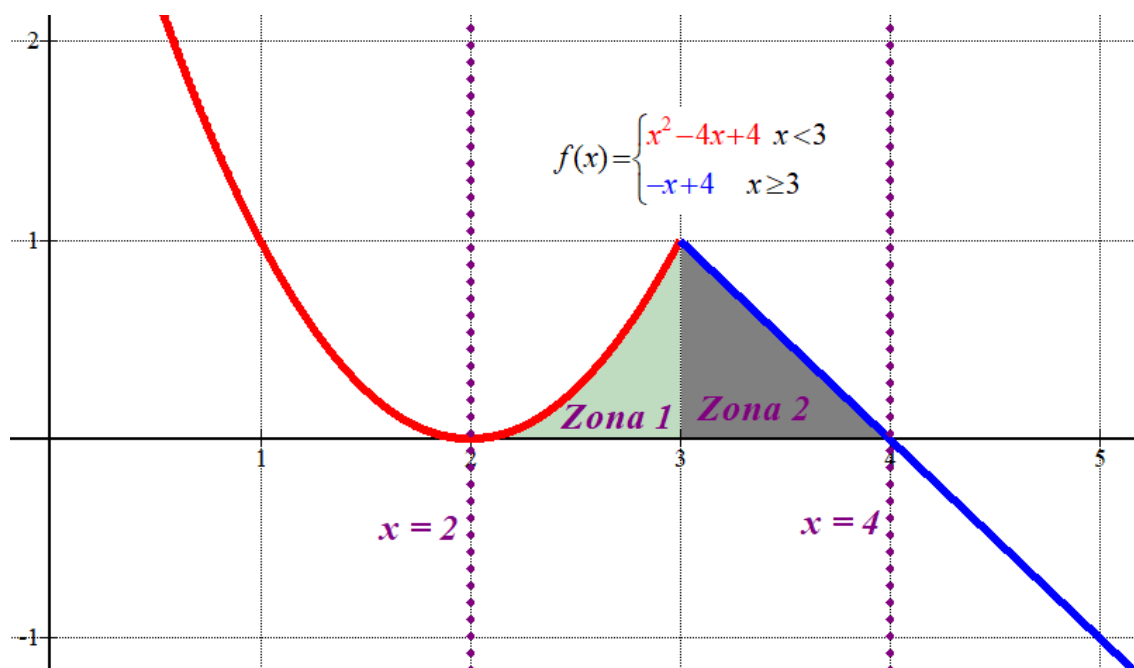
x	$y = x^2 - 4x + 4$
0	4
1	1
2	0
2.5	0.25

$x \geq 3$

x	$y = -x + 4$
3	1
4	0
5	-1



c) Nos piden hallar el área de la región coloreada del dibujo.



Esta región la dividimos en dos partes. Calculamos el área de cada una.

$$\begin{aligned} \text{Área zona 1} &= \int_2^3 x^2 - 4x + 4 dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right]_2^3 = \\ &= \left[\frac{3^3}{3} - 2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 \right] - \left[\frac{2^3}{3} - 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 \right] = 9 - 18 + 12 - \frac{8}{3} + 8 - 8 = \boxed{\frac{1}{3} u^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Área zona 2} &= \int_3^4 -x + 4 dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 4x \right]_3^4 = \\ &= \left[-\frac{4^2}{2} + 4 \cdot 4 \right] - \left[-\frac{3^2}{2} + 4 \cdot 3 \right] = -8 + 16 + \frac{9}{2} - 12 = \boxed{\frac{1}{2} u^2} \end{aligned}$$

El área de la región limitada por la gráfica de f , el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 4$ tiene un valor de $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \approx 0.833 u^2$.

EJERCICIO 4

La función $B(t) = -t^2 + 21t - 20$ con $0 \leq t \leq 15$ representa el beneficio, en miles de euros, de una empresa en función de los años, t .

- a) **(0.5 puntos)** Si la función $I(t) = -t^2 + 48t$ representa los ingresos de esta empresa, en miles de euros, para el mismo intervalo de tiempo, ¿cuál es la función de gastos de dicha empresa? ¿Cuáles son los gastos iniciales?
- b) **(0.5 puntos)** Calcule el momento a partir del cual el beneficio fue positivo.
- c) **(0.75 puntos)** Calcule en qué momento el beneficio fue máximo y el valor del mismo.
- d) **(0.75 puntos)** Represente gráficamente la función beneficio.

- a) Los beneficios son los ingresos menos los gastos.

$$B(t) = I(t) - G(t) \Rightarrow G(t) = I(t) - B(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(t) = -t^2 + 48t - (-t^2 + 21t - 20) = 48t - 21t + 20 = 27t + 20$$

Los gastos vienen expresados por la función $G(t) = 27t + 20$ con $0 \leq t \leq 15$.

Los gastos iniciales son $G(0) = 27 \cdot 0 + 20 = 20$. Los gastos iniciales son 20 000 €.

- b) Averiguamos cuando el beneficio es nulo.

$$B(t) = -t^2 + 21t - 20 = 0 \Rightarrow t = \frac{-21 \pm \sqrt{21^2 - 4(-1)(-20)}}{2(-1)} = \frac{-21 \pm 19}{-2} = \begin{cases} \frac{-21+19}{-2} = 1 \in [0,15] \\ \frac{-21-19}{-2} = 20 \notin [0,15] \end{cases}$$

La función beneficio es continua. Averiguamos si el beneficio es positivo antes o después de $t = 1$.

En el intervalo $[0, 1)$ tomamos $t = 0.5$ y el beneficio es $B(0.5) = -0.5^2 + 21 \cdot 0.5 - 20 = -9.75$.

El beneficio es negativo en $[0, 1)$.

En el intervalo $(1, 15]$ tomamos $t = 2$ y el beneficio es $B(2) = -2^2 + 21 \cdot 2 - 20 = 8.25$. El beneficio es positivo en $(1, 15]$.

El beneficio es positivo a partir del primer año.

- c) Hallamos la derivada y la igualamos a cero en busca del punto crítico.

$$\left. \begin{array}{l} B'(t) = -2t + 21 \\ B'(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2t + 21 = 0 \Rightarrow 2t = 21 \Rightarrow t = \frac{21}{2} = 10.5$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada para averiguar si es máximo o mínimo.

$$B'(t) = -2t + 21 \Rightarrow B''(t) = -2 \Rightarrow B''(10.5) = -2 < 0$$

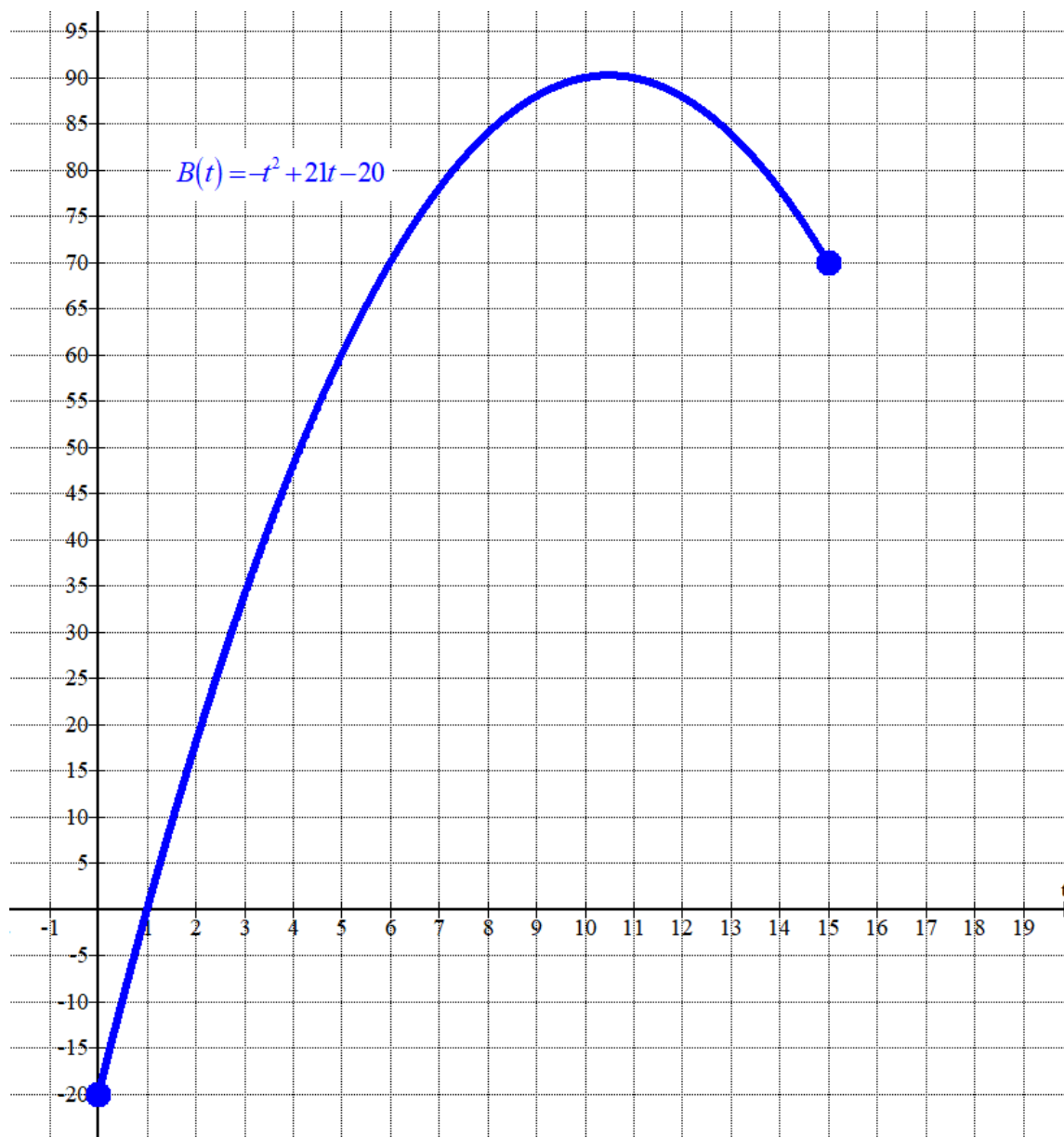
En $t = 10.5$ la función beneficio tiene un máximo.

En $t = 10.5$ la función beneficio vale $B(10.5) = -10.5^2 + 21 \cdot 10.5 - 20 = 90.25$.

El beneficio máximo se produce en $t = 10.5$ y es de 90 250 €.

- d) La gráfica de la función beneficio es una parábola con vértice en $t = 10.5$. Hacemos una tabla de valores y la representamos.

t	$B(t) = -t^2 + 21t - 20$
0	-20
1	0
10.5	90.25
12	88
15	70

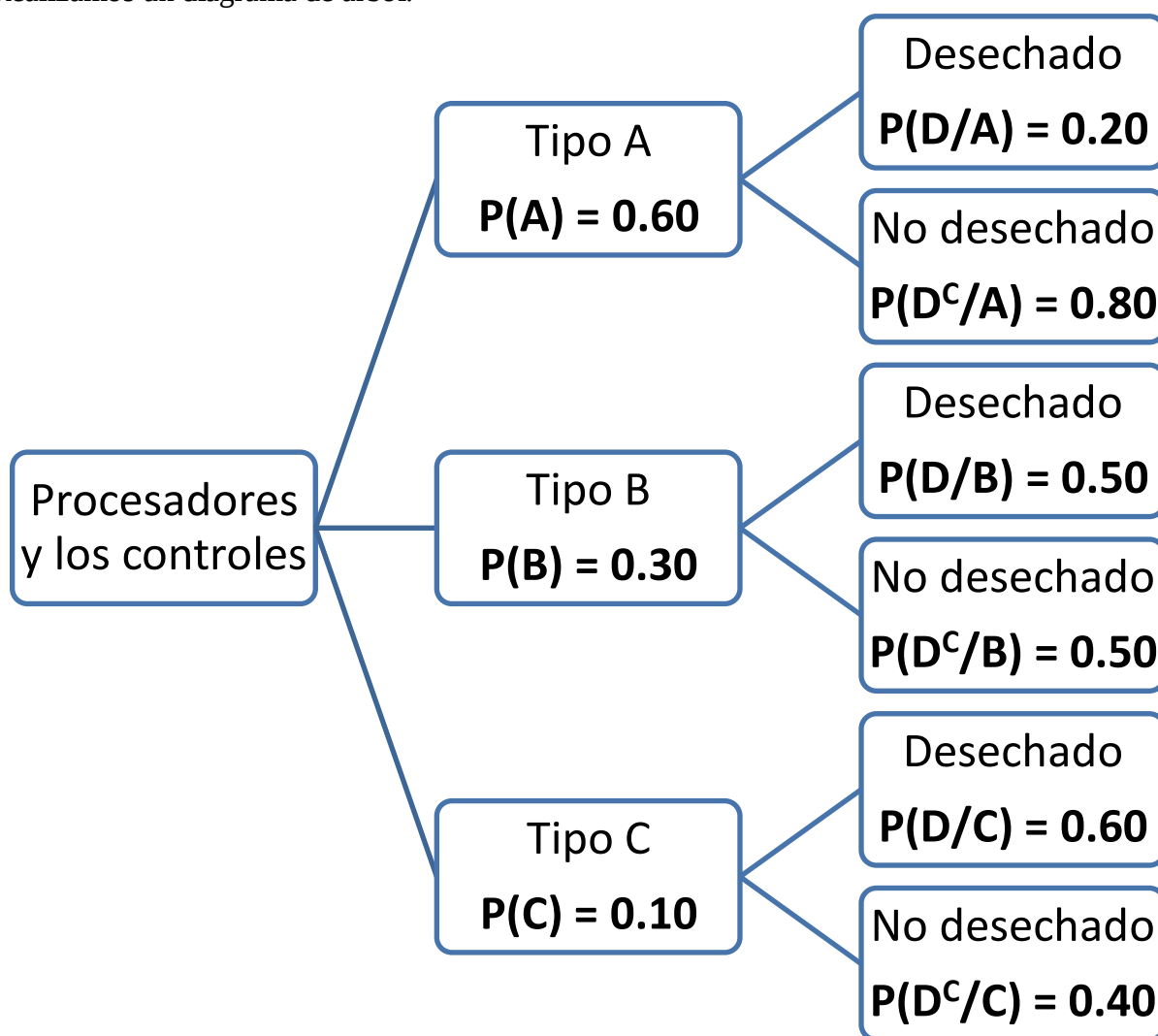


BLOQUE C**EJERCICIO 5**

Una fábrica produce procesadores que se clasifican en un primer control en tres tipos, A, B y C, según la frecuencia a la que pueden trabajar. El 60 % de los procesadores fabricados se clasifican de tipo A, el 30 % de tipo B y el resto de tipo C. En un segundo control, se desechan el 20 % de los procesadores de tipo A, el 50 % de los de tipo B y el 60 % de los de tipo C, por problemas al trabajar a ciertas temperaturas. Si se elige un procesador de esta fábrica al azar, calcule la probabilidad de que:

- a) **(1 punto)** Sea descartado y sea de tipo A o de tipo B.
 b) **(0.75 puntos)** Sea descartado.
 c) **(0.75 puntos)** Sea de tipo C sabiendo que no ha sido descartado.

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(D \cap (A \cup B))$.

$$\begin{aligned}
 P(D \cap (A \cup B)) &= P(D \cap A) + P(D \cap B) = \\
 &= P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) = 0.6 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.5 = \boxed{0.27}
 \end{aligned}$$

- b) Nos piden calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}P(D) &= P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) = \\&= 0.6 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.5 + 0.1 \cdot 0.6 = \boxed{0.33}\end{aligned}$$

- c) Nos piden calcular $P(C/D^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}P(C/D^c) &= \frac{P(C \cap D^c)}{P(D^c)} = \frac{P(C)P(D^c/C)}{1 - P(D)} = \\&= \frac{0.1 \cdot 0.4}{1 - 0.33} = \boxed{\frac{4}{67} \simeq 0.0597}\end{aligned}$$

EJERCICIO 6

El 75 % del alumnado de un instituto utiliza la plataforma del centro como medio para comunicarse con sus profesores y el 40 % lo hace a través del correo electrónico. Además, hay un 15 % que no usa ninguno de estos medios. Se elige un estudiante de este instituto al azar.

- (0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que utilice ambos medios de comunicación.
- (0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que utilice solamente uno de estos medios de comunicación.
- (0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que utilice la plataforma del centro sabiendo que no usa el correo electrónico como medio de comunicación.
- (0.5 puntos)** Razone si los sucesos "Utilizar la plataforma del centro" y "Utilizar el correo electrónico" son independientes.

Realizamos una tabla de contingencia.

	Utiliza el correo electrónico (B)	No utiliza el correo electrónico (B^c)	
Utiliza plataforma del centro (A)			75
No utiliza plataforma del centro (A^c)		15	
	40		100

Completamos la tabla.

	Utiliza el correo electrónico (B)	No utiliza el correo electrónico (B^c)	
Utiliza plataforma del centro (A)	30	45	75
No utiliza plataforma del centro (A^c)	10	15	25
	40	60	100

- Nos piden calcular $P(A \cap B)$. Aplicamos la regla de Laplace con los datos de la tabla.

$$P(A \cap B) = \frac{30}{100} = \boxed{0.3}$$

- Usamos los datos de la tabla y aplicamos la regla de Laplace.

$$P[(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)] = \frac{45 + 10}{100} = \boxed{0.55}$$

- Nos piden calcular $P(A / B^c)$. Utilizamos los datos de la tabla (columna 2ª de datos).

$$P(A / B^c) = \frac{45}{60} = \boxed{\frac{3}{4} = 0.75}$$

- Para que los sucesos A y B sean independientes debe cumplirse que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.3 \\ P(A)P(B) = 0.75 \cdot 0.40 = 0.3 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.3 = P(A)P(B)$$

Los sucesos A y B son independientes.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

Una empresa fabrica piezas cuyo diámetro sigue una distribución Normal de media desconocida y varianza 9 mm^2 .

- a) **(0.75 puntos)** Se seleccionan al azar 144 piezas obteniéndose un diámetro medio de 81 mm . Determine un intervalo de confianza al 98.5 % para estimar el diámetro medio de las piezas fabricadas por la empresa.
- b) **(0.75 puntos)** Con el mismo nivel de confianza del apartado anterior, ¿de qué tamaño mínimo habría que tomar la muestra para obtener un intervalo de confianza con una amplitud máxima de 0.9?
- c) **(1 punto)** Suponiendo que la media poblacional es de 80.4 mm y tomando muestras aleatorias de 64 piezas, ¿qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria diámetro medio muestral? ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro medio muestral esté comprendido entre 79.5 mm y 80.7 mm ?

a) $X = \text{Diámetro de una pieza, en mm.}$

Como la varianza es 9 la desviación típica es $\sqrt{9} = 3 \text{ mm}$.

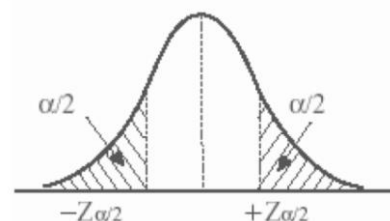
$X = N(\mu, 3)$

El tamaño de la muestra es $n = 144$. La media muestral es $\bar{x} = 81 \text{ mm}$

Con un nivel de confianza del 98.5%

$$1 - \alpha = 0,985 \rightarrow \alpha = 0,015 \rightarrow \alpha/2 = 0,0075 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,9925 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.43$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957



Utilizamos la fórmula del error para establecer la amplitud del intervalo de confianza.

$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.43 \cdot \frac{3}{\sqrt{144}} = 0.6075$$

El intervalo de confianza es

$$(\bar{x} - \text{Error}, \bar{x} + \text{Error}) = (81 - 0.6075, 81 + 0.6075) = (80.3925, 81.6075)$$

b) Si la amplitud del intervalo de confianza es de 0.9 entonces el error es la mitad $\rightarrow$

$$\frac{0.9}{2} = 0.45.$$

Aplicamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.43 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} = 0.45 \Rightarrow \frac{7.29}{\sqrt{n}} = 0.45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{7.29}{0.45} = \sqrt{n} \Rightarrow n = \left(\frac{7.29}{0.45} \right)^2 = 262.44$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 263 piezas.

c) X = Diámetro de una pieza, en mm.

X = N(80.4, 3)

Tenemos que la media muestral sigue una distribución normal que tiene la misma media, pero su desviación típica es $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$$\overline{X}_{64} = N\left(80.4, \frac{3}{\sqrt{64}}\right) \Rightarrow \overline{X}_{64} = N(80.4, 0.375).$$

Nos piden calcular $P(79.5 \leq \overline{X}_{64} \leq 80.7)$.

$$P(79.5 \leq \overline{X}_{64} \leq 80.7) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{79.5 - 80.4}{0.375} \leq Z \leq \frac{80.7 - 80.4}{0.375}\right) =$$

$$= P(-2.4 \leq Z \leq 0.8) = P(Z \leq 0.8) - P(Z \leq -2.4) = P(Z \leq 0.8) - P(Z \geq 2.4) =$$

$$= P(Z \leq 0.8) - [1 - P(Z \leq 2.4)] = \{Miramos en la tabla N(0, 1)\} =$$

$$= 0.7881 - [1 - 0.9918] = \boxed{0.7799}$$

z	0,00	0,01
0,0	0,5000	0,5040
0,1	0,5398	0,5438
0,2	0,5793	0,5832
0,3	0,6179	0,6217
0,4	0,6554	0,6591
0,5	0,6915	0,6951
0,6	0,7257	0,7291
0,7	0,7580	0,7613
0,8	0,7881	0,7913
0,9	0,8159	0,8189
1,0	0,8413	0,8441
1,1	0,8643	0,8669
1,2	0,8849	0,8874
1,3	0,9032	0,9054
1,4	0,9192	0,9212
1,5	0,9332	0,9351
1,6	0,9452	0,9469
1,7	0,9554	0,9570
1,8	0,9641	0,9655
1,9	0,9713	0,9726
2,0	0,9772	0,9784
2,1	0,9821	0,9831
2,2	0,9861	0,9870
2,3	0,9893	0,9901
2,4	0,9918	0,9925
2,5	0,9938	0,9944

EJERCICIO 8

Se selecciona una muestra aleatoria de 300 habitantes de una ciudad, a los que se les pregunta si creen que llevan una dieta saludable. De las personas encuestadas, 180 han contestado afirmativamente, mientras que el resto ha respondido que no.

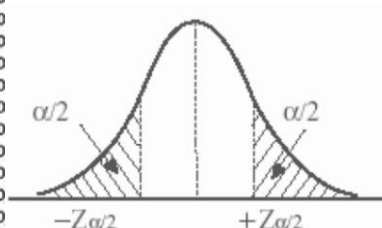
- a) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de personas que creen seguir una dieta saludable.
- b) **(1.25 puntos)** ¿Cuál sería el número de habitantes mínimo necesario en este estudio de opinión para que se reduzca a un tercio del error cometido en el intervalo (0.54, 0.66) con el mismo nivel de confianza?

$$\text{Tamaño de la muestra es } n = 300. \quad pr = \frac{180}{300} = 0.6; \quad qr = 1 - pr = 1 - 0.6 = 0.4$$

- a) Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803



$$\text{Error} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{300}} \approx 0.0554$$

El error máximo cometido es de 0.0554.

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$(pr - \text{Error}, pr + \text{Error}) = (0.6 - 0.0554, 0.6 + 0.0554) = (0.5446, 0.6554)$$

- b) El error del intervalo de confianza es la mitad de la amplitud del intervalo (0.54, 0.66).

$$\text{Error} = \frac{0.66 - 0.54}{2} = 0.06$$

Un tercio del error cometido es $\frac{0.06}{3} = 0.02$.

Aplicamos la fórmula del error.

$$\begin{aligned} \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{n}} = 0.02 \Rightarrow \sqrt{\frac{0.24}{n}} = \frac{0.02}{1.96} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{0.24}{n} &= \left(\frac{0.02}{1.96} \right)^2 \Rightarrow n = \frac{0.24}{\left(\frac{0.02}{1.96} \right)^2} \approx 2304.96 \end{aligned}$$

El tamaño mínimo de la muestra es un número entero superior al obtenido. El tamaño mínimo de la muestra es de 2305 habitantes.