



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2022-2023**

**MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**

- Instrucciones:**
- a) Duración: 1 hora y 30 minutos
 - b) Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
 - c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
 - d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
 - e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

a) **(1.25 puntos)** Un agricultor vende la producción de tres tipos de uva, Tempranillo, Garnacha y Macabeo, de dos de sus fincas. La matriz $Q = \begin{pmatrix} 50 & 40 & 35 \\ 0 & 60 & 55 \end{pmatrix}$ recoge la producción, en miles de kilogramos, de estos tipos de uva en cada finca. El precio de venta por kilogramo, en céntimos de euro, según el tipo de uva y la finca, viene dado por la matriz $P = \begin{pmatrix} 40 & 38 & 42 \\ 34 & 37 & 55 \end{pmatrix}$.

Calcule el producto $Q \cdot P^t$ y explique el significado económico de los elementos de la diagonal principal del resultado. Indique también la cantidad total de dinero que ha obtenido el agricultor por la venta de la cosecha de las dos fincas.

b) Dada la siguiente ecuación matricial $M \cdot X + N = V$:

b1) **(0.5 puntos)** Suponiendo que M sea invertible, despeje la matriz X en la ecuación anterior.

b2) **(0.75 puntos)** Para $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $V = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$, calcule la matriz X .

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Una empresa de material informático dispone de dos cadenas de fabricación, A y B , en las que quiere aumentar su producción realizando horas extraordinarias.

En una hora extraordinaria de trabajo, la cadena A prepara 15 portátiles y 6 tablets, y la cadena B prepara 10 portátiles y 10 tablets. Los costes de producción por hora extraordinaria de A y B son de 300 € y 600 € respectivamente por hora extraordinaria. La cadena B puede realizar, como máximo, el triple de horas extraordinarias que la cadena A . Si para la próxima semana se debe producir adicionalmente un máximo de 360 portátiles y al menos 216 tablets, formule y resuelva el problema que permita obtener la planificación de la empresa que minimice los costes de producción. ¿A cuánto ascienden dichos costes?

BLOQUE B

EJERCICIO 3

a) **(1.5 puntos)** Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de cada una de las siguientes funciones en el punto de abscisa $x = 0$:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 2}{-3x + 7} \qquad g(x) = \ln\left(\frac{1}{3x + 1}\right)$$

b) **(1 punto)** Calcule las integrales definidas siguientes:

$$\int_{-2}^{-1} \frac{5}{3x^4} dx \qquad \int_{-3}^0 \frac{e^{\frac{x}{3}}}{5} dx.$$

EJERCICIO 4

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x^2 - 3 & x \leq 1 \\ 1 + \frac{1}{x-2} & x > 1 \end{cases}$$

- a) **(1 punto)** Estudie la continuidad de f . Si la función no es continua en algún punto, indique el tipo de discontinuidad que presenta.
- b) **(0.75 puntos)** Estudie la derivabilidad de f .
- c) **(0.75 puntos)** Determine las asíntotas de f .

BLOQUE C**EJERCICIO 5**

Una empresa de transporte dispone de tres tipos de camiones, A, B y C. El 30% de los transportes son realizados por camiones de tipo A; el 20% por camiones de tipo B y el resto por camiones de tipo C. Se sabe que los transportes tienen una probabilidad de 0.02 de sufrir algún tipo de incidencia si son realizados en camiones de tipo A; de 0.01 si son realizados en camiones de tipo B y de 0.05 si son realizados en camiones de tipo C. Se elige un transporte de esta empresa al azar.

- a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que no haya sufrido ningún tipo de incidencia.
- b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que lo haya realizado un camión de tipo C si se sabe que sufrió algún tipo de incidencia.
- c) **(0.5 puntos)** Si además se conoce que el 40% de las incidencias sufridas por los camiones de tipo A fueron debidas a la lluvia, calcule la probabilidad de que el transporte haya sido realizado por un camión de tipo A, haya sufrido una incidencia y también esta sea debida a la lluvia.

EJERCICIO 6

Una tienda vende caramelos con sabor a frutas (naranja o limón) y a menta. El 60% son azucarados y de estos el 25% son de limón. De los no azucarados, el 40% son de naranja, el 30% son de limón y el resto de menta. Además, el 40% de todos los caramelos son de naranja. Se escoge un caramelo al azar de esa tienda.

- a) **(1.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que sea de naranja sabiendo que es azucarado.
- b) **(1 punto)** Razone si es más probable que sea de sabor a frutas o a menta.

BLOQUE D**EJERCICIO 7**

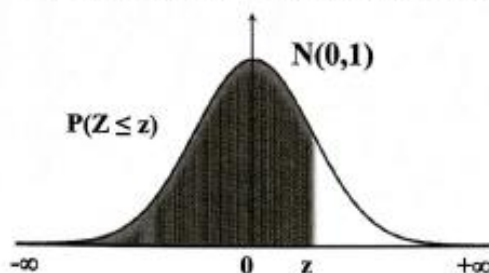
- a) **(1.25 puntos)** Utilizando los números naturales del 1 al 6, ¿cuántas muestras de tamaño 2 pueden formarse aplicando un muestreo aleatorio simple? Si se elige una de estas muestras al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la media de los números obtenidos sea como máximo 2?
- b) **(1.25 puntos)** Se ha diseñado una encuesta para estimar qué proporción de adolescentes de una zona están suscritos a una determinada red social. ¿Qué tamaño debemos tomar para estimar dicha proporción por un intervalo de confianza al 95% con un error máximo de 0.15?

EJERCICIO 8

El gasto mensual por vivienda en electricidad de los inquilinos de la zona centro de una determinada ciudad sigue una ley Normal con desviación típica 18.25 €. Se ha tomado una muestra aleatoria de 361 de estas viviendas obteniendo como resultado un gasto medio de 97 €.

- a) **(1,25 puntos)** Obtenga el intervalo de confianza del 93% para el gasto medio mensual en electricidad por vivienda.

b) **(1.25 puntos)** ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener una muestra para que el error cometido al estimar la media, con un nivel de confianza del 91%, sea un tercio del error cometido en el intervalo (95.5, 98.5)?

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL $N(0,1)$ 

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9975	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9980	0,9981	0,9982	0,9983	0,9984
2,9	0,9985	0,9986	0,9987	0,9988	0,9989	0,9990	0,9991	0,9992	0,9993	0,9994
3,0	0,9995	0,9996	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,1	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,2	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,3	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,4	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,5	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,6	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
4,0	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z , con distribución $N(0,1)$, esté por debajo del valor z .

SOLUCIONES**BLOQUE A****EJERCICIO 1**

a) **(1.25 puntos)** Un agricultor vende la producción de tres tipos de uva, Tempranillo, Garnacha y Macabeo, de dos de sus fincas. La matriz $Q = \begin{pmatrix} 50 & 40 & 35 \\ 0 & 60 & 55 \end{pmatrix}$ recoge la producción, en miles de kilogramos, de estos tipos de uva en cada finca. El precio de venta por kilogramo, en céntimos de euro, según el tipo de uva y la finca, viene dado por la matriz $P = \begin{pmatrix} 40 & 38 & 42 \\ 34 & 37 & 40 \end{pmatrix}$.

Calcule el producto $Q \cdot P^t$ y explique el significado económico de los elementos de la diagonal principal del resultado. Indique también la cantidad total de dinero que ha obtenido el agricultor por la venta de la cosecha de las dos fincas.

b) Dada la siguiente ecuación matricial $M \cdot X + N = V$:

b1) **(0.5 puntos)** Suponiendo que M sea invertible, despeje la matriz X en la ecuación anterior.

b2) **(0.75 puntos)** Para $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $V = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$, calcule la matriz X .

a)

$$Q \cdot P^t = \begin{matrix} & \begin{matrix} T & G & M \end{matrix} \\ \begin{matrix} F1 \\ F2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 50 & 40 & 35 \\ 0 & 60 & 55 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{pmatrix} 40 & 34 \\ 38 & 37 \\ 42 & 40 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} \text{Tempranillo} \\ \text{Garnacha} \\ \text{Macabeo} \end{matrix} \end{matrix}$$

$$2 \times \boxed{3} \cdot 3 \times 2 \longrightarrow 2 \times 2$$

$$Q \cdot P^t = \begin{pmatrix} 50 \cdot 40 + 40 \cdot 38 + 35 \cdot 42 & 50 \cdot 34 + 40 \cdot 37 + 35 \cdot 40 \\ 0 \cdot 40 + 60 \cdot 38 + 55 \cdot 42 & 0 \cdot 34 + 60 \cdot 37 + 55 \cdot 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4990 & 4580 \\ 4590 & 4420 \end{pmatrix}$$

En la matriz Q están dispuestos los tipos de uva por columnas y la finca en cada fila. En la matriz Q aparece el precio dispuesto en columnas por tipo de uva y en filas por la finca de procedencia.

Tempranillo Gar. Macabeo

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ Q = \begin{pmatrix} 50 & 40 & 35 \\ 0 & 60 & 55 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{Finca 1} \\ \text{Finca 2} \end{matrix} \end{matrix}$$

Como aparece en los cálculos realizados estamos multiplicando los miles de kilos de uva por el precio en céntimos de euro por kilo de uva dependiendo del tipo de uva y la finca y luego se suman.

En la matriz $Q \cdot P^t$ en la fila 1 columna 1 aparece lo conseguido en la finca 1 por todos los tipos de uva. En la fila 2 columna 2 aparece lo conseguido en la finca 2 por todos los tipos de uva.

En la finca 1 se obtienen 4 990 000 céntimos de euro y en la finca 2 se obtienen 4 420 000 céntimos de euro.

En total por las dos fincas el agricultor obtiene $4\,990\,000 + 4\,420\,000 = 9\,410\,000$ céntimos de euro, es decir, 94 100 euros.

b) Despejamos X.

$$M \cdot X + N = V \Rightarrow M \cdot X = V - N \Rightarrow \boxed{X = M^{-1}(V - N)}$$

c) Hallamos la matriz inversa de M.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$M^{-1} = \frac{\text{Adj}(M^T)}{|M|} = \frac{\text{Adj}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de la matriz X.

$$X = M^{-1}(V - N) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3+3 & -3+3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Una empresa de material informático dispone de dos cadenas de fabricación, A y B , en las que quiere aumentar su producción realizando horas extraordinarias.

En una hora extraordinaria de trabajo, la cadena A prepara 15 portátiles y 6 tablets, y la cadena B prepara 10 portátiles y 10 tablets. Los costes de producción por hora extraordinaria de A y B son de 300 € y 600 € respectivamente por hora extraordinaria. La cadena B puede realizar, como máximo, el triple de horas extraordinarias que la cadena A . Si para la próxima semana se debe producir adicionalmente un máximo de 360 portátiles y al menos 216 tablets, formule y resuelva el problema que permita obtener la planificación de la empresa que minimice los costes de producción. ¿A cuánto ascienden dichos costes?

- a) Llamamos “ x ” al número de horas extraordinarias de la cadena de fabricación A e “ y ” al número de horas extraordinarias de la cadena de fabricación B .

Realizamos una tabla con los datos.

	Nº portátiles	Nº tablets	Coste
Nº horas extras de cadena A (x)	$15x$	$6x$	$300x$
Nº horas extras de cadena B (y)	$10y$	$10y$	$600y$
TOTAL	$15x+10y$	$6x+10y$	$300x+600y$

“Se debe producir adicionalmente un máximo de 360 portátiles y al menos 216 tablets “ $\rightarrow 15x+10y \leq 360$; $6x+10y \geq 216$.

“La cadena B puede realizar, como máximo, el triple de horas extraordinarias que la cadena A ” $\rightarrow y \leq 3x$.

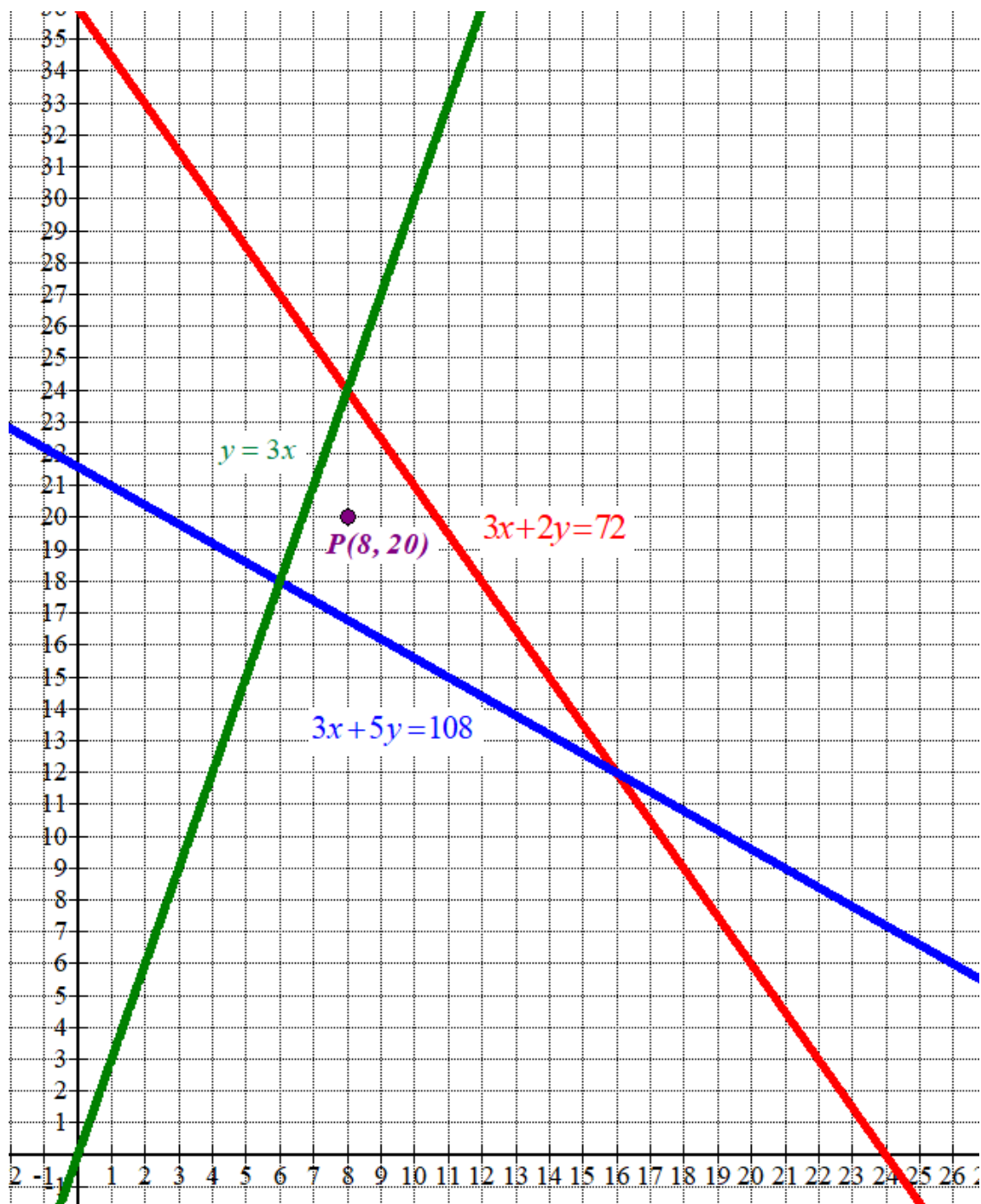
“El número de horas debe ser positivo o nulo” $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$.

Reunimos todas estas restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 15x+10y \leq 360 \\ 6x+10y \geq 216 \\ y \leq 3x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x+2y \leq 72 \\ 3x+5y \geq 108 \\ y \leq 3x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$3x+2y=72$	$3x+5y=108$	$y=3x$	$x=0; y=0$
$\begin{array}{c c} x & y = \frac{72-3x}{2} \\ \hline 8 & 24 \\ 16 & 12 \end{array}$	$\begin{array}{c c} x & y = \frac{108-3x}{5} \\ \hline 6 & 18 \\ 16 & 12 \end{array}$	$\begin{array}{c c} x & y = 3x \\ \hline 6 & 18 \\ 8 & 24 \end{array}$	Primer cuadrante



Como las restricciones son

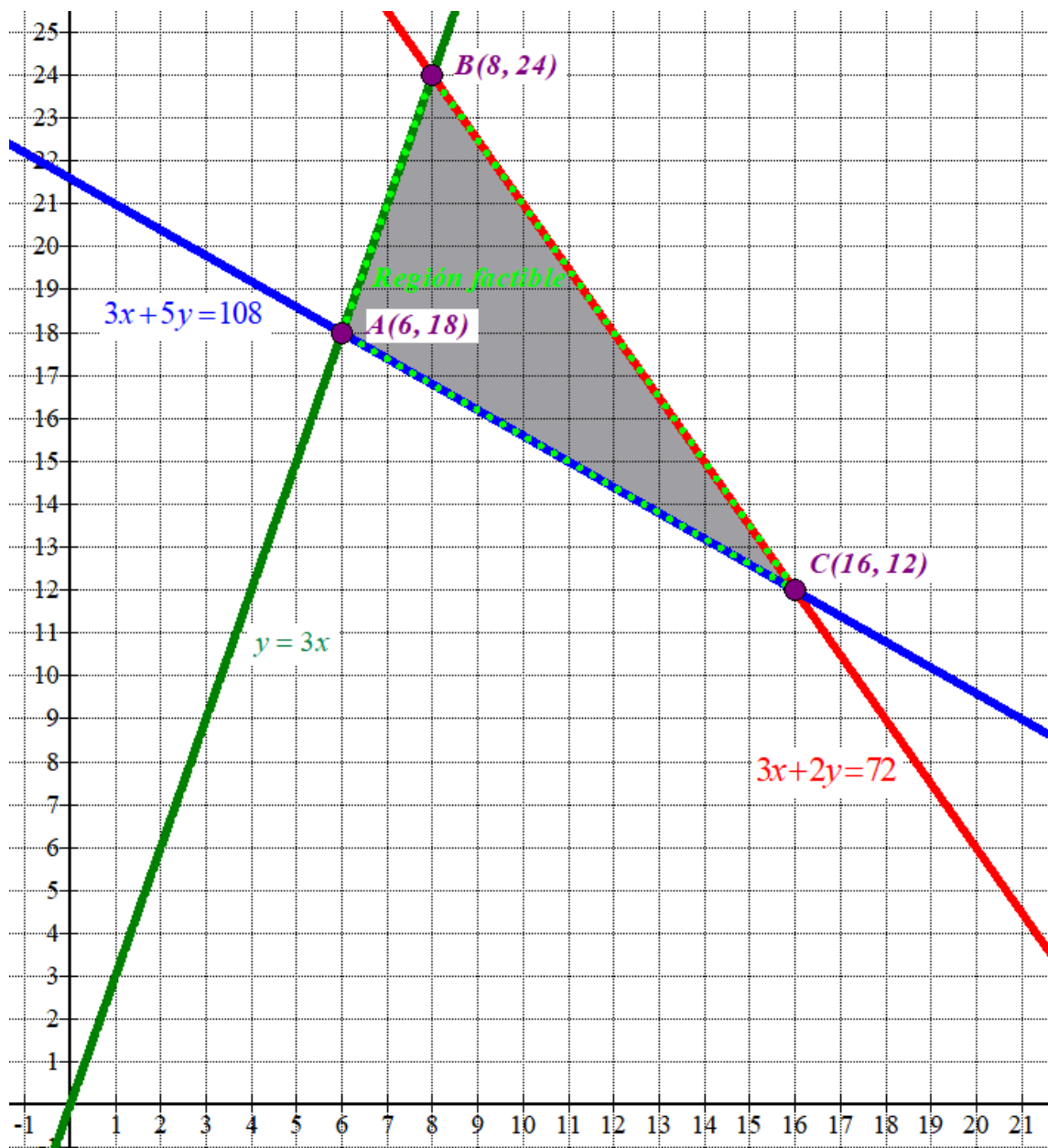
$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y \leq 72 \\ 3x + 5y \geq 108 \\ y \leq 3x \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

que está por encima de la recta azul y por debajo de las rectas verde y roja.

Comprobamos que el punto $P(8, 20)$ perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 3 \cdot 8 + 2 \cdot 20 \leq 72 \\ 3 \cdot 8 + 5 \cdot 20 \geq 108 \\ 20 \leq 3 \cdot 8 \\ 8 \geq 0; 20 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas y la región factible es la coloreada de gris en el siguiente dibujo.



Los vértices son los puntos: $A(6, 18)$, $B(8, 24)$ y $C(16, 12)$.

La función objetivo que deseamos minimizar es el coste de las horas extraordinarias de esa semana $\rightarrow C(x, y) = 300x + 600y$.

Valoramos la función objetivo $C(x, y) = 300x + 600y$ en cada vértice.

$$A(6, 18) \rightarrow C(6, 18) = 1800 + 10800 = 12600$$

$$B(8, 24) \rightarrow C(8, 24) = 2400 + 14400 = 16800$$

$$C(16, 12) \rightarrow C(16, 12) = 4800 + 7200 = 12000 \text{ € ¡Mínimo!}$$

El mínimo coste es de 12 000 euros y se obtiene con 16 horas de la cadena de fabricación A y 12 de la cadena B.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

a) **(1.5 puntos)** Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de cada una de las siguientes funciones en el punto de abscisa $x = 0$:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 2}{-3x + 7} \quad g(x) = \ln\left(\frac{1}{3x+1}\right)$$

b) **(1 punto)** Calcule las integrales definidas siguientes:

$$\int_{-2}^{-1} \frac{5}{3x^4} dx \quad \int_{-3}^0 \frac{e^{\frac{x}{3}}}{5} dx.$$

a) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 0$ es $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 2}{-3x + 7} \Rightarrow f'(x) = \frac{(6x + 5)(-3x + 7) - (3x^2 + 5x - 2)(-3)}{(-3x + 7)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-18x^2 + 42x - 15x + 35 + 9x^2 + 15x - 6}{(-3x + 7)^2} = \frac{-9x^2 + 42x + 29}{(-3x + 7)^2}$$

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{3 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 - 2}{-3 \cdot 0 + 7} = \frac{-2}{7} \\ f'(0) &= \frac{-9 \cdot 0^2 + 42 \cdot 0 + 29}{(-3 \cdot 0 + 7)^2} = \frac{29}{49} \\ y - f(0) &= f'(0)(x - 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - \frac{-2}{7} = \frac{29}{49}x \Rightarrow \boxed{y = \frac{29}{49}x - \frac{2}{7}}$$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de $g(x)$ en $x = 0$ es $y - g(0) = g'(0)(x - 0)$.

Antes de derivar simplificamos la expresión de la función utilizando las propiedades de los logaritmos.

$$g(x) = \ln\left(\frac{1}{3x+1}\right) \Rightarrow g(x) = \ln(1) - \ln(3x+1) = -\ln(3x+1)$$

Seguimos con la determinación de la ecuación de la recta tangente.

$$g(x) = -\ln(3x+1) \Rightarrow g'(x) = -\frac{3}{3x+1}$$

$$\left. \begin{aligned} g(0) &= \ln\left(\frac{1}{3 \cdot 0 + 1}\right) = \ln 1 = 0 \\ g'(0) &= -\frac{3}{3 \cdot 0 + 1} = -3 \\ y - g(0) &= g'(0)(x - 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y - 0 = -3x \Rightarrow \boxed{y = -3x}$$

b) Calculamos el valor de la primera integral definida.

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{-1} \frac{5}{3x^4} dx &= \frac{5}{3} \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^4} dx = \frac{5}{3} \int_{-2}^{-1} x^{-4} dx = \frac{5}{3} \left[\frac{x^{-3}}{-3} \right]_{-2}^{-1} = \frac{5}{3} \left[\frac{1}{-3x^3} \right]_{-2}^{-1} = \\ &= \frac{5}{3} \left(\frac{1}{-3(-1)^3} - \frac{1}{-3(-2)^3} \right) = \frac{5}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{24} \right) = \boxed{\frac{35}{72}}\end{aligned}$$

Calculamos el valor de la segunda integral definida.

$$\int_{-3}^0 \frac{e^{\frac{x}{3}}}{5} dx = \frac{1}{5} \int_{-3}^0 e^{\frac{x}{3}} dx = \frac{1}{5} \left[3e^{\frac{x}{3}} \right]_{-3}^0 = \frac{1}{5} \left(3e^{\frac{0}{3}} - 3e^{\frac{-3}{3}} \right) = \frac{1}{5} (3 - 3e^{-1}) = \frac{1}{5} \left(3 - \frac{3}{e} \right) = \boxed{\frac{3}{5} - \frac{3}{5e}}$$

EJERCICIO 4

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x^2 - 3 & x \leq 1 \\ 1 + \frac{1}{x-2} & x > 1 \end{cases}$$

- a) **(1 punto)** Estudie la continuidad de f . Si la función no es continua en algún punto, indique el tipo de discontinuidad que presenta.
 b) **(0.75 puntos)** Estudie la derivabilidad de f .
 c) **(0.75 puntos)** Determine las asíntotas de f .

- a) En el intervalo $(-\infty, 1)$ la función es $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3$ que es una función polinómica y por tanto continua.

En el intervalo $(1, +\infty)$ la función es $f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$ que es una función racional cuyo denominador se anula en $x = 2$, incluido en el intervalo de definición.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(1 + \frac{1}{x-2} \right) = 1 + \frac{1}{2-2} = 1 + \frac{1}{0} = \infty$$

La función es discontinua en $x = 2$. La función es continua en $(1, 2) \cup (2, +\infty)$.

Estudiamos la continuidad en $x = 1$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 3 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^3 + 2x^2 - 3 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 + \frac{1}{x-2} = 1 + \frac{1}{1-2} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$$

La función es continua en $x = 1$.

Resumiendo: La función es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$. En $x = 2$ es discontinua inevitable de salto infinito.

- b) En el intervalo $(-\infty, 1)$ la función es $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3$ que es una función derivable y su derivada es $f'(x) = 3x^2 + 4x$.

En el intervalo $(1, 2) \cup (2, +\infty)$ la función es $f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$ que es una función derivable y su

derivada es $f'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$.

La función no es continua en $x = 2$ y por tanto no es derivable.

Comprobamos si es derivable en $x = 1$ viendo si coinciden las derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3x^2 + 4x = 7 \\ f'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{(x-2)^2} = \frac{1}{(-1)^2} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(1^-) = 7 \neq 1 = f'(1^+)$$

La función no es derivable en $x = 1$.

Resumiendo: La función es derivable en $\mathbb{R} - \{1, 2\}$.

c) **Asíntotas verticales.** $x = a$

Como su dominio es $\mathbb{R} - \{2\}$ la función presenta una asíntota vertical: $x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(1 + \frac{1}{x-2} \right) = 1 + \frac{1}{2-2} = 1 + \frac{1}{0} = \infty$$

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 2x^2 - 3 = -\infty$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x-2} = 1 + \frac{1}{+\infty} = 1 + 0 = 1$$

La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de la función cuando $x \rightarrow +\infty$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Cuando $x \rightarrow -\infty$

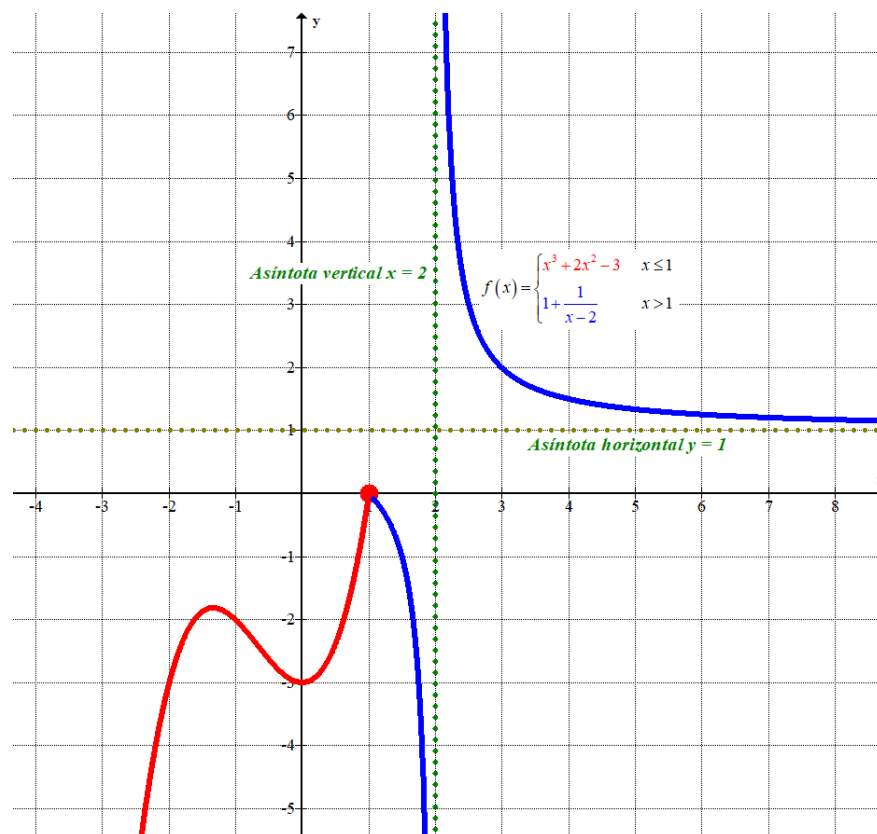
$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x} + \frac{2x^2}{x} - \frac{3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 2x - \frac{3}{x} = +\infty$$

La función no tiene asíntota oblicua.

Cuando $x \rightarrow +\infty$ no tiene asíntota oblicua pues existe asíntota horizontal.

Resumiendo: La función presenta una asíntota vertical: $x = 2$ y una asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$: $y = 1$.

No lo pide pero se ofrece la gráfica para comprobar lo obtenido.

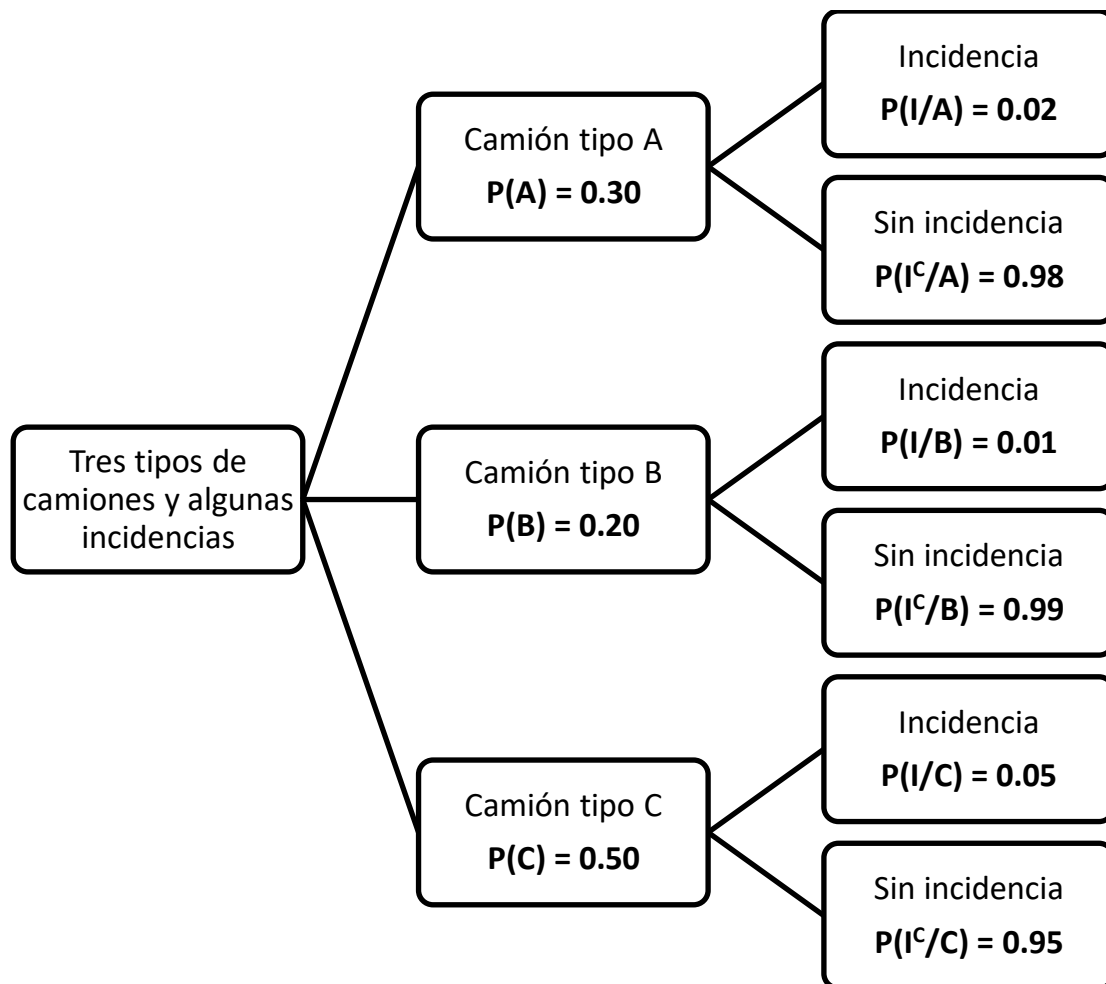


BLOQUE C**EJERCICIO 5**

Una empresa de transporte dispone de tres tipos de camiones, A, B y C. El 30% de los transportes son realizados por camiones de tipo A; el 20% por camiones de tipo B y el resto por camiones de tipo C. Se sabe que los transportes tienen una probabilidad de 0.02 de sufrir algún tipo de incidencia si son realizados en camiones de tipo A; de 0.01 si son realizados en camiones de tipo B y de 0.05 si son realizados en camiones de tipo C. Se elige un transporte de esta empresa al azar.

- a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que no haya sufrido ningún tipo de incidencia.
 b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que lo haya realizado un camión de tipo C si se sabe que sufrió algún tipo de incidencia.
 c) **(0.5 puntos)** Si además se conoce que el 40% de las incidencias sufridas por los camiones de tipo A fueron debidas a la lluvia, calcule la probabilidad de que el transporte haya sido realizado por un camión de tipo A, haya sufrido una incidencia y también esta sea debida a la lluvia.

Realizamos un diagrama de árbol para organizar toda la información.



- a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(I^c) &= P(A)P(I^c/A) + P(B)P(I^c/B) + P(C)P(I^c/C) = \\
 &= 0.3 \cdot 0.98 + 0.2 \cdot 0.99 + 0.5 \cdot 0.95 = \boxed{0.967}
 \end{aligned}$$

- b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/I) = \frac{P(C \cap I)}{P(I)} = \frac{P(C)P(I/C)}{1 - P(I^c)} = \frac{0.5 \cdot 0.05}{1 - 0.967} = \boxed{\frac{25}{33} \approx 0.7576}$$

- c) Llamamos D al suceso “La incidencia es debida a la lluvia”. Nos piden calcular la probabilidad $P(A \cap I \cap D)$.

$$P(A \cap I \cap D) = P(A)P(I/A)P(D/(A \cap I)) = 0.3 \cdot 0.02 \cdot 0.40 = \boxed{0.0024}$$

EJERCICIO 6

Una tienda vende caramelos con sabor a frutas (naranja o limón) y a menta. El 60% son azucarados y de estos el 25% son de limón. De los no azucarados, el 40% son de naranja, el 30% son de limón y el resto de menta. Además, el 40% de todos los caramelos son de naranja. Se escoge un caramelo al azar de esa tienda.

a) **(1.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que sea de naranja sabiendo que es azucarado.

b) **(1 punto)** Razone si es más probable que sea de sabor a frutas o a menta.

Supongamos que en la tienda hay 100 caramelos en total. Vamos a pasar los porcentajes a cifras absolutas y así ordenar toda la información. Después el valor de las probabilidades las obtendremos aplicando la regla de Laplace.

De los 100 caramelos 60 son azucarados, de estos 60 tenemos que el 25% son de limón →

$$60 \cdot \frac{25}{100} = 15 \text{ son de limón, es decir, 15 caramelos son de limón azucarados.}$$

De los no azucarados ($100 - 60 = 40$), el 40% son de naranja ($40 \cdot \frac{40}{100} = 16$ caramelos de naranja

no azucarados), el 30% son de limón ($40 \cdot \frac{30}{100} = 12$ caramelos de limón no azucarados), y el resto de menta ($40 - 16 - 12 = 12$ son de menta no azucarados).

El 40% de todos los caramelos son de naranja (40 son de naranja entre azucarados y no azucarados).

Ponemos todos estos datos en una tabla.

	Azucarados	No azucarados	TOTAL
Limón	15	12	
Naranja		16	40
Menta		12	
TOTAL	60	40	100

Completamos la tabla.

	Azucarados (A)	No azucarados ($\bar{A}$)	TOTAL
Limón (L)	15	12	27
Naranja (N)	24	16	40
Menta (M)	21	12	33
TOTAL	60	40	100

a) Hay 60 caramelos azucarados y de ellos 24 son de naranja → $P(N/A) = \frac{24}{60} = \frac{2}{5} = 0.4$.

b) Si miramos los datos de la tabla vemos que de los 100 caramelos hay $27 + 40 = 67$ de frutas y 33 de menta. Es más probable que sea de frutas.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Llamamos L al suceso “El caramelo es de limón”, N al suceso “El caramelo es de naranja”, M al suceso “El caramelo es de menta” Llamamos A al suceso “El caramelo es azucarado” y $\bar{A}$ al suceso “El caramelo no es azucarado”.

Las probabilidades proporcionadas por el ejercicio son:

$$P(A) = 0.60; P(L/A) = 0.25$$

$$P(N/\bar{A}) = 0.40; P(L/\bar{A}) = 0.30; P(M/\bar{A}) = 1 - 0.40 - 0.30 = 0.30$$

$$P(N) = 0.40$$

a) Nos piden calcular $P(N/A)$.

$$\begin{aligned} P(N/A) &= \frac{P(N \cap A)}{P(A)} = \frac{P(N) - P(N \cap \bar{A})}{P(A)} = \frac{P(N) - P(\bar{A})P(N/\bar{A})}{P(A)} = \\ &= \frac{P(N) - (1 - P(A))P(N/\bar{A})}{P(A)} = \frac{0.4 - (1 - 0.6)0.4}{0.6} = \boxed{\frac{2}{5} = 0.4} \end{aligned}$$

b) Nos piden calcular $P(L \cup N)$ y $P(M)$. Y decir cuál de estas dos probabilidades es mayor.

Calculamos $P(L)$.

$$\begin{aligned} P(L) &= P(L \cap A) + P(L \cap \bar{A}) = P(A)P(L/A) + P(\bar{A})P(L/\bar{A}) = \\ &= 0.60 \cdot 0.25 + 0.40 \cdot 0.30 = 0.27 \end{aligned}$$

Calculamos $P(L \cup N)$.

$$P(L \cup N) = P(L) + P(N) - P(L \cap N) = P(L) + P(N) - 0 = 0.27 + 0.40 = \boxed{0.67}$$

La probabilidad de que el caramelo sea de frutas es de 0.67. La de que sea de menta será $P(M) = 1 - P(L \cup N) = 1 - 0.67 = 0.33$.

La probabilidad de que el caramelo sea de frutas es 0.67 y de que sea de menta es de 0.33. Es más probable que el caramelo sea de frutas.

BLOQUE D**EJERCICIO 7**

a) **(1.25 puntos)** Utilizando los números naturales del 1 al 6, ¿cuántas muestras de tamaño 2 pueden formarse aplicando un muestreo aleatorio simple? Si se elige una de estas muestras al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la media de los números obtenidos sea como máximo 2?

b) **(1.25 puntos)** Se ha diseñado una encuesta para estimar qué proporción de adolescentes de una zona están subscritos a una determinada red social. ¿Qué tamaño debemos tomar para estimar dicha proporción por un intervalo de confianza al 95% con un error máximo de 0.15?

a) Suponiendo que el muestreo es con reemplazamiento. Hay $6 \cdot 6 = 36$ muestras con reemplazamiento de tamaño 2. Algunos de los resultados pueden verse en la tabla siguiente:

Muestras	1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6	2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6	3 1	3 2	...	6 5	6 6
Media	1	1.5	2	2.5	3	3.5	1.5	2	2.5	3	3.5	4	2	2.5	...	5.5	6

De todas las muestras posibles (36) sólo hay 6 (en rojo) que tienen de media 2 o menos.

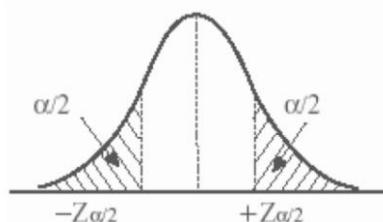
Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que la media de los números obtenidos sea como máximo 2 es $\frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0.1667$.

b) Consideramos $pr = qr = 0.5$.

Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} = 0.15 \Rightarrow \sqrt{\frac{0.25}{n}} = \frac{0.15}{1.96} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{0.25}{n} = \left(\frac{0.15}{1.96} \right)^2 \Rightarrow 0.25 = n \left(\frac{0.15}{1.96} \right)^2 \Rightarrow n = \frac{0.25}{\left(\frac{0.15}{1.96} \right)^2} \approx 42,68$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 43 adolescentes.

EJERCICIO 8

El gasto mensual por vivienda en electricidad de los inquilinos de la zona centro de una determinada ciudad sigue una ley Normal con desviación típica 18.25 €. Se ha tomado una muestra aleatoria de 361 de estas viviendas obteniendo como resultado un gasto medio de 97 €.

a) **(1,25 puntos)** Obtenga el intervalo de confianza del 93% para el gasto medio mensual en electricidad por vivienda.

b) **(1.25 puntos)** ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener una muestra para que el error cometido al estimar la media, con un nivel de confianza del 91%, sea un tercio del error cometido en el intervalo (95.5, 98.5)?

X = El gasto mensual por vivienda en electricidad de los inquilinos de la zona centro de una determinada ciudad.

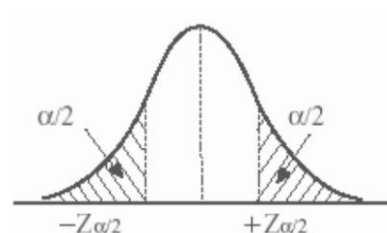
$X = N(\mu, 18.25)$

a) El tamaño de la muestra es $n = 361$. La media muestral es $\bar{x} = 97$ €

Con un nivel de confianza del 93 %

$$1 - \alpha = 0,93 \rightarrow \alpha = 0,07 \rightarrow \alpha/2 = 0,035 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,965 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.81$$

z	0,00	0,01	
0,0	0,5000	0,5040	0,
0,1	0,5398	0,5438	0,
0,2	0,5793	0,5832	0,
0,3	0,6179	0,6217	0,
0,4	0,6554	0,6591	0,
0,5	0,6915	0,6950	0,
0,6	0,7257	0,7291	0,
0,7	0,7580	0,7611	0,
0,8	0,7881	0,7910	0,
0,9	0,8159	0,8186	0,
1,0	0,8413	0,8438	0,
1,1	0,8643	0,8665	0,
1,2	0,8849	0,8869	0,
1,3	0,9032	0,9049	0,
1,4	0,9192	0,9207	0,
1,5	0,9332	0,9345	0,
1,6	0,9452	0,9463	0,
1,7	0,9554	0,9564	0,
1,8	0,9644	0,9649	0,
1,9	0,9713	0,9719	0,
2,0	0,9772	0,9778	0,



Utilizamos la fórmula del error para establecer la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.81 \cdot \frac{18.25}{\sqrt{361}} \approx 1.7386$$

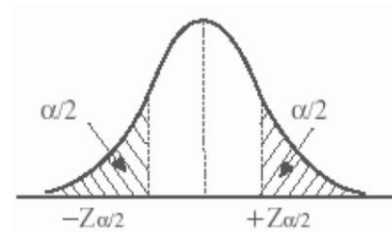
El intervalo de confianza es

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (97 - 1.7386, 97 + 1.7386) = (95.2614, 98.7386)$$

b) Con un nivel de confianza del 91 %

$$1 - \alpha = 0,91 \rightarrow \alpha = 0,09 \rightarrow \alpha/2 = 0,045 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,955 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.7$$

z	0,00	0
0,0	0,4960	0,5
0,1	0,5398	0,5
0,2	0,5793	0,5
0,3	0,6179	0,5
0,4	0,6554	0,5
0,5	0,6915	0,5
0,6	0,7257	0,5
0,7	0,7580	0,5
0,8	0,7881	0,5
0,9	0,8159	0,5
1,0	0,8413	0,5
1,1	0,8643	0,5
1,2	0,8849	0,5
1,3	0,9032	0,5
1,4	0,9192	0,5
1,5	0,9332	0,5
1,6	0,9452	0,5
1,7	0,9554	0,5
1,8	0,9644	0,5
1,9	0,9713	0,5



El error cometido en el intervalo de confianza (95.5, 98.5) es la mitad de la amplitud del intervalo $\rightarrow \frac{98.5 - 95.5}{2} = 1.5$. Un tercio de este error es $\frac{1.5}{3} = 0.5$.

Utilizamos la fórmula del error para determinar el tamaño mínimo de la muestra (n) para que el error sea menor de 0.5.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.7 \cdot \frac{18.25}{\sqrt{n}} = 0.5 \Rightarrow 1.7 \cdot 18.25 = 0.5 \sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.7 \cdot 18.25}{0.5} \Rightarrow n = \left(\frac{1.7 \cdot 18.25}{0.5} \right)^2 = 3850.2025$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 3851 inquilinos.