

PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD

MATEMÁTICAS II

CURSO 2017-2018

- Instrucciones:**
- a) Duración: 1 hora y 30 minutos**
 - b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.**
 - c) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.**
 - d) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.**

Opción A

Ejercicio 1.- [2.5 puntos] Halla los coeficientes a , b y c sabiendo que la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene en $x = 1$ un punto de derivada nula que no es extremo relativo y que la gráfica de f pasa por el punto $(1,1)$.

Ejercicio 2.- Considera las funciones f y $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = |x^2 - 2x|$.

- a) [1'25 puntos]** Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g y calcula los puntos de corte de dichas gráficas.
- b) [1'25 puntos]** Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g .

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y + (m+3)z = 3 \\ x + y + z = 3m \\ 2x + 4y + 3(m+1)z = 8 \end{cases}$$

- a) [1'75 puntos]** Discútelos según los valores del parámetro m .
- b) [0'75 puntos]** Resuelve el sistema para $m = -2$.

Ejercicio 4.- Considera los puntos $P(1,0,-1)$, $Q(2,1,1)$ y la recta r dada por $x-5 = y = \frac{z+2}{-2}$.

- a) [1'25 puntos]** Determina el punto simétrico de P respecto a r .
- b) [1'25 puntos]** Calcula el punto de r que equidista de P y Q .

PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD

MATEMÁTICAS II

CURSO 2017-2018

Instrucciones: a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

d) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

Opción B**Ejercicio 1.- [2'5 puntos]** Determina $k \neq 0$ sabiendo que la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida

$$\text{por } f(x) = \begin{cases} 3 - kx^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{kx} & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ es derivable}$$

Ejercicio 2.- Considera las funciones f y $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $g(x) = -\frac{x^2}{4}$ y $f(x) = 3 - x^2$

- a) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$ y comprueba que también es tangente a la gráfica de g . Determina el punto de tangencia con la gráfica de g .
- b) [0'75 puntos] Esboza el recinto limitado por la recta $y = 4 - 2x$ y las gráficas de f y g . Calcula todos los puntos de corte entre las gráficas (y la recta).
- c) [0'75 punto] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Ejercicio 3.-

- a) [1,5 puntos] Justifica que es posible hacer un pago de 34,50 euros cumpliendo las siguientes restricciones:
- utilizando únicamente monedas de 50 céntimos de euro, de 1 euro y de 2 euros;
 - se tienen que utilizar exactamente un total de 30 monedas;
 - tiene que haber igual número de monedas de 1 euro como de 50 céntimos y 2 euros juntas.
- ¿De cuántas maneras y con cuántas monedas de cada tipo se puede hacer el pago?
- b) [1 punto] Si se redondea la cantidad a pagar a 35 euros, justifica si es posible o no seguir haciendo el pago bajo las mismas condiciones que en el apartado anterior.

Ejercicio 4.- Considera el punto $P(2, -1, 3)$ y el plano π de ecuación $3x + 2y + z = 5$.

- a) [1,75 puntos] Calcula el punto simétrico de P respecto de π .
- b) [0,75 puntos] Calcula la distancia de P a π .

SOLUCIONES**Opción A**

Ejercicio 1.- [2.5 puntos] Halla los coeficientes a , b y c sabiendo que la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene en $x = 1$ un punto de derivada nula que no es extremo relativo y que la gráfica de f pasa por el punto $(1,1)$.

Calculamos la derivada de la función.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$\text{En } x = 1 \text{ se anula la derivada} \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = 0 \Rightarrow \boxed{2a + b = -3}$$

Como $x = 1$ no es extremo relativo la derivada segunda se anula en $x = 1$.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f''(x) = 6x + 2a$$

$$x = 1 \text{ no es extremo} \Rightarrow f''(1) = 0 \Rightarrow 6 \cdot 1 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow \boxed{a = -3}$$

La gráfica pasa por el punto $(1, 1)$.

$$f(1) = 1 \Rightarrow 1 = 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \Rightarrow \boxed{a + b + c = 0}$$

Juntamos las tres ecuaciones y resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} 2a + b = -3 \\ \boxed{a = -3} \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(-3) + b = -3 \\ -3 + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 + b = -3 \\ b + c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{b = 3} \\ b + c = 3 \end{cases} \Rightarrow 3 + c = 3 \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

Los valores buscados son $a = -3$, $b = 3$ y $c = 0$.

Ejercicio 2.- Considera las funciones f y $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = |x^2 - 2x|$.

a) [1'25 puntos] Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g y calcula los puntos de corte de dichas gráficas.

b) [1'25 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g .

a) La función $f(x) = 6x - x^2$ es una parábola y la función $g(x) = |x^2 - 2x|$ es una función valor absoluto que se expresa como función a trozos:

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ó} \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow g(x) = |x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x < 0 \\ -(x^2 - 2x) & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

Igualemos las funciones en busca de los puntos de corte.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow |x^2 - 2x| = 6x - x^2 \Rightarrow$$

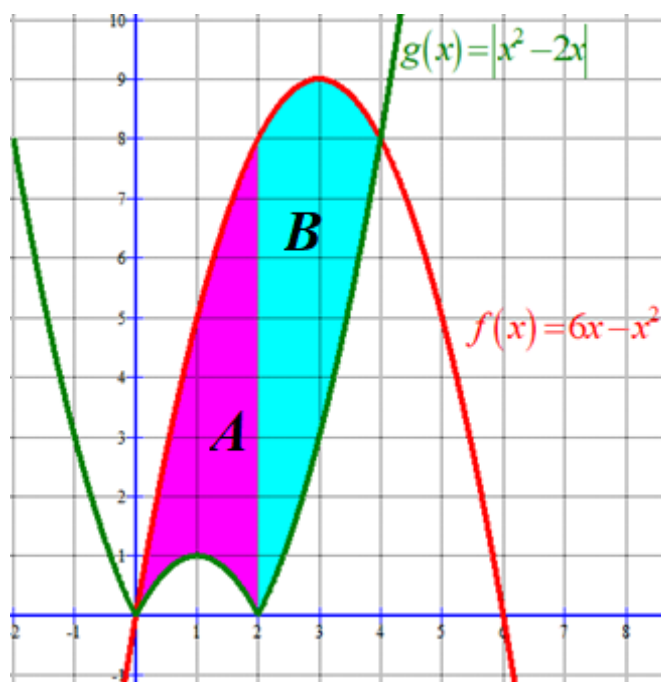
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = 6x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow 2x(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ó} \\ x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases} \\ \text{ó} \\ -(x^2 - 2x) = 6x - x^2 \Rightarrow -x^2 + 2x = 6x - x^2 \Rightarrow 0 = 4x \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

Se cortan en $x = 0$ y en $x = 4$.

Hacemos una tabla de valores para cada una de las funciones entre 0 y 4.

x	$y = f(x) = 6x - x^2$
0	0
1	$6 - 1 = 5$
2	$12 - 4 = 8$
3	$18 - 9 = 9$
4	$24 - 16 = 8$

x	$y = g(x) = x^2 - 2x $
0	$ 0 = 0$
1	$ 1 - 2 = 1$
2	$ 4 - 4 = 0$
3	$ 9 - 6 = 3$
4	$ 16 - 8 = 8$



- b)** Calculamos el valor del área del recinto de color rosa (A), limitada por las funciones $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = |x^2 - 2x| = 2x - x^2$ si $0 < x < 2$.

$$\begin{aligned}\text{Área recinto rosa} &= \int_0^2 (6x - x^2 - (2x - x^2)) dx = \int_0^2 (6x - x^2 - 2x + x^2) dx = \int_0^2 4x dx = \\ &= \left[2x^2 \right]_0^2 = 2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 0^2 = 8 \text{ u}^2\end{aligned}$$

- Calculamos el valor del área del recinto de color azul (B), limitada por las funciones $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = |x^2 - 2x| = x^2 - 2x$ si $x > 2$.

$$\begin{aligned}\text{Área recinto azul} &= \int_2^4 (6x - x^2 - (x^2 - 2x)) dx = \int_2^4 (6x - x^2 - x^2 + 2x) dx = \int_2^4 (-2x^2 + 8x) dx = \\ &= \left[-2 \frac{x^3}{3} + 4x^2 \right]_2^4 = \left[-2 \frac{4^3}{3} + 4 \cdot 4^2 \right] - \left[-2 \frac{2^3}{3} + 4 \cdot 2^2 \right] = -\frac{128}{3} + 64 + \frac{16}{3} - 16 = \frac{32}{3} = 10,66 \text{ u}^2\end{aligned}$$

El área total es la suma del área de ambas regiones: Área total = $8 + 10,66 = 18,66 \text{ u}^2$

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y + (m+3)z = 3 \\ x + y + z = 3m \\ 2x + 4y + 3(m+1)z = 8 \end{cases}$$

a) [1'75 puntos] Discútelos según los valores del parámetro m .

b) [0'75 puntos] Resuelve el sistema para $m = -2$.

a) Consideramos la matriz de coeficientes asociada al sistema.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m+3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3(m+1) \end{pmatrix} \text{ con determinante}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m+3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3(m+1) \end{vmatrix} = 3m + 3 + 4 + 4m + 12 - (2m + 6 + 6m + 6 + 4) = -m + 3$$

Lo igualamos a cero $\rightarrow -m + 3 = 0 \Rightarrow m = 3$

Analizamos el sistema en los dos casos siguientes

CASO 1. $m \neq 3$

Para $m \neq 3$ el determinante de A es no nulo y su rango es 3, por lo que el rango de la matriz ampliada también es 3 e igual que el número de incógnitas.

El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (una única solución).

CASO 2. $m = 3$

En este caso el sistema queda:

$$\begin{cases} x + 2y + 6z = 3 \\ x + y + z = 9 \\ 2x + 4y + 12z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Simplificamos la ecuación } 3^a \\ \text{dividiendola entre 2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 6z = 3 \\ x + y + z = 9 \\ x + 2y + 6z = 4 \end{cases}$$

Como observamos la ecuación 1ª y la 3ª tienen el primer miembro de la igualdad idénticos y el segundo distinto, esto plantea un sistema de ecuaciones imposible y por tanto el sistema es INCOMPATIBLE (no tiene solución).

b) Para $m = -2$ estamos en el caso 1 y el sistema es compatible determinado, podemos resolverlo utilizando el método de Cramer.

Para $m = -2$ el sistema queda:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x + y + z = -6 \\ 2x + 4y - 3z = 8 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -6 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-9+16-24-8-36-12}{-3+4+4-2+6-4} = \frac{-73}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \\ 2 & 8 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{18+6+\cancel{8}+12+9-\cancel{8}}{5} = \frac{45}{5} = 9$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -6 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{8-\cancel{24}+12-6-16+\cancel{24}}{5} = \frac{-2}{5}$$

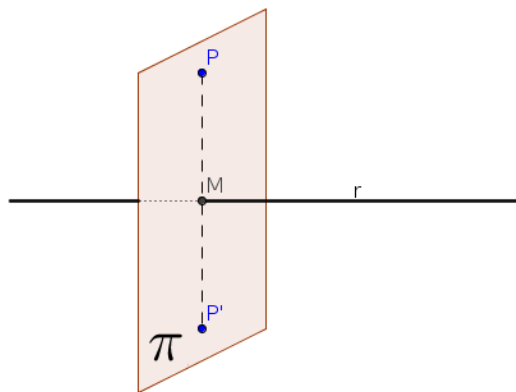
La solución del sistema es $x = \frac{-73}{5}$; $y = 9$; $z = \frac{-2}{5}$

Ejercicio 4.- Considera los puntos $P(1,0,-1)$, $Q(2,1,1)$ y la recta r dada por $x-5 = y = \frac{z+2}{-2}$.

a) [1'25 puntos] Determina el punto simétrico de P respecto a r .

b) [1'25 puntos] Calcula el punto de r que equidista de P y Q .

a) Para calcular las coordenadas del punto P' simétrico de P respecto de la recta r procederemos como indica el dibujo:



Hallamos la ecuación del plano π perpendicular a la recta r que pasa por el punto $P(1, 0, -1)$

$$r \equiv x-5 = y = \frac{z+2}{-2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (1, 1, -2) \\ P_r(5, 0, -2) \end{cases}$$

$$\vec{n} = \vec{v}_r = (1, 1, -2) \Rightarrow \begin{cases} \pi \equiv x + y - 2z + D = 0 \\ P(1, 0, -1) \in \pi \end{cases} \Rightarrow 1 + 0 + 2 + D = 0 \Rightarrow D = -3$$

$$\pi \equiv x + y - 2z - 3 = 0$$

Hallamos el punto M de corte entre la recta y el plano.

$$\begin{aligned} r \equiv \begin{cases} \vec{v}_r = (1, 1, -2) \\ P_r(5, 0, -2) \end{cases} &\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 5 + t \\ y = t \\ z = -2 - 2t \end{cases} \\ \pi \equiv x + y - 2z - 3 = 0 &\Rightarrow \pi \equiv x + y - 2z - 3 = 0 \end{aligned} \Rightarrow (5+t) + t - 2(-2-2t) - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 + t + t + 4 + 4t - 3 = 0 \Rightarrow 6t + 6 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 - 1 = 4 \\ y = -1 \\ z = -2 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(4, -1, 0)$$

Si P' tiene coordenadas (a, b, c) como el punto M es el punto medio del segmento PP' tenemos que se cumple:

$$\left. \begin{array}{l} P'(a,b,c) \\ P(1,0,-1) \\ M(4,-1,0) \end{array} \right\} \Rightarrow (4,-1,0) = \frac{(a,b,c) + (1,0,-1)}{2} \Rightarrow (8,-2,0) = (a,b,c) + (1,0,-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a,b,c) = (8,-2,0) - (1,0,-1) = (7,-2,1)$$

El punto simétrico de $P(1,0,-1)$ respecto de la recta r tiene coordenadas $P'(7, -2, 1)$.

b) Un punto A de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 5 + t \\ y = t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$ tiene coordenadas $A(5+t, t, -2-2t)$.

Hallamos las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{AQ}$.

$$\left. \begin{array}{l} P(1,0,-1) \\ Q(2,1,1) \\ A(5+t,t,-2-2t) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AP} = (1,0,-1) - (5+t,t,-2-2t) = (-4-t,-t,1+2t) \\ \overrightarrow{AQ} = (2,1,1) - (5+t,t,-2-2t) = (-3-t,1-t,3+2t) \end{cases}$$

Para que el punto A sea equidistante de los puntos P y Q deben tener el mismo módulo los vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{AQ}$.

$$\left. \begin{array}{l} |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(-4-t)^2 + (-t)^2 + (1+2t)^2} \\ |\overrightarrow{AQ}| = \sqrt{(-3-t)^2 + (1-t)^2 + (3+2t)^2} \\ |\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{AQ}| \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(-4-t)^2 + (-t)^2 + (1+2t)^2} = \sqrt{(-3-t)^2 + (1-t)^2 + (3+2t)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-4-t)^2 + (-t)^2 + (1+2t)^2 = (-3-t)^2 + (1-t)^2 + (3+2t)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 + \cancel{t^2} + 8t + \cancel{t^2} + 1 + \cancel{4t^2} + 4t = 9 + \cancel{t^2} + 6t + 1 + \cancel{t^2} - 2t + 9 + \cancel{4t^2} + 12t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12t + 17 = 16t + 19 \Rightarrow -4t = 2 \Rightarrow \boxed{t = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}}$$

El punto A buscado tiene coordenadas $A\left(5 - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2 - 2 \cdot \frac{-1}{2}\right) \Rightarrow A\left(\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$

Opción B

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Determina $k \neq 0$ sabiendo que la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida

por $f(x) = \begin{cases} 3 - kx^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{kx} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ es derivable

Para ser derivable debe ser continua y para ello debe serlo en $x = 1$. Los límites laterales en $x = 1$ deben ser iguales.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 3 - kx^2 = 3 - k \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{kx} = \frac{2}{k} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{2}{k} = 3 - k \Rightarrow 2 = 3k - k^2 \Rightarrow k^2 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = \boxed{2=k} \\ \frac{3-1}{2} = \boxed{1=k} \end{cases}$$

Calculamos la derivada de la función en $\mathbb{R} - \{1\}$

$$f(x) = \begin{cases} 3 - kx^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{kx} & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -2kx & \text{si } x < 1 \\ -\frac{2}{kx^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Para que sea derivable en $x = 1$ deben coincidir las derivadas laterales.

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -2kx = -2k \\ f'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2}{kx^2} = -\frac{2}{k} \\ f'(1^-) &= f'(1^+) \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\frac{2}{k} = -2k \Rightarrow 2 = 2k^2 \Rightarrow 1 = k^2 \Rightarrow \boxed{k = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Para que se cumplan las dos condiciones y la función sea derivable el valor de k debe ser 1.

Ejercicio 2.- Considera las funciones f y $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $g(x) = -\frac{x^2}{4}$ y $f(x) = 3 - x^2$

- a) [1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$ y comprueba que también es tangente a la gráfica de g . Determina el punto de tangencia con la gráfica de g .
- b) [0'75 puntos]** Esboza el recinto limitado por la recta $y=4-2x$ y las gráficas de f y g . Calcula todos los puntos de corte entre las gráficas (y la recta).
- c) [0'75 punto]** Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

- a)** La ecuación de la recta tangente a f en $x=1$ es $y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$$f(x) = 3 - x^2 \Rightarrow f'(x) = -2x$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 3 - 1 = 2 \\ f'(1) = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow y - 2 = -2(x-1) \Rightarrow y - 2 = -2x + 2 \Rightarrow \boxed{y = -2x + 4}$$

Para que sea tangente a la función g debemos buscar el punto de la gráfica de g que tiene derivada igual a -2 .

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = -\frac{x^2}{4} \Rightarrow g'(x) = -\frac{2x}{4} = -\frac{x}{2} \\ g'(x) = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{x}{2} = -2 \Rightarrow -x = -4 \Rightarrow x = 4$$

Calculamos la recta tangente a la gráfica de g en $x=4$ y comprobamos si es igual a la recta tangente obtenida anteriormente.

La ecuación de la recta tangente a g en $x=4$ es $y - g(4) = g'(4)(x-4)$

$$\left. \begin{array}{l} g'(x) = -\frac{x}{2} \Rightarrow g'(4) = -2 \\ g(4) = -\frac{4^2}{4} = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow y - (-4) = -2(x-4) \Rightarrow y + 4 = -2x + 8 \Rightarrow \boxed{y = -2x + 4}$$

Como se comprueba las rectas tangentes a f en $x=1$ y a g en $x=4$ son iguales.

- b)** Hallamos los puntos de corte de la recta con cada una de las funciones.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 3 - x^2 \\ y = -2x + 4 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x + 4 = 3 - x^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1$$

La función $f(x)$ solo corta a la recta tangente en $x=1$

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = -\frac{x^2}{4} \\ y = -2x + 4 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x + 4 = -\frac{x^2}{4} \Rightarrow -8x + 16 = -x^2 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(16)}}{2(1)} = \frac{8 \pm \sqrt{0}}{2} = 4$$

La función $g(x)$ solo corta a la recta tangente en $x = 4$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 3 - x^2 = -\frac{x^2}{4} \Rightarrow 12 - 4x^2 = -x^2 \Rightarrow -3x^2 = -12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

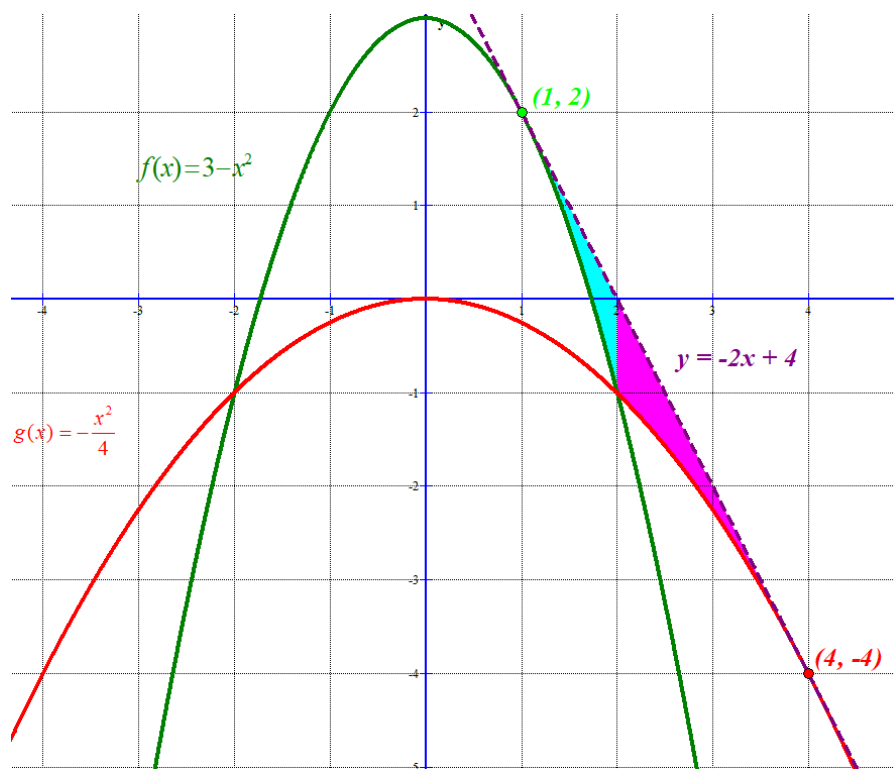
Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ solo coinciden en $x = -2$ y en $x = 2$

Dibujamos la gráfica de las funciones y la recta tangente realizando previamente una tabla de valores entre -2 y 4 .

x	$g(x) = -\frac{x^2}{4}$
-2	-1
-1	-0,25
0	0
1	-0,25
2	-1
4	-4

x	$f(x) = 3 - x^2$
-2	-1
-1	2
0	3
1	2
2	-1
4	-13

x	$y = -2x + 4$
0	4
1	2
2	0
3	-2
4	-4



- c) Observando el dibujo del recinto este es pequeño y nos debe salir un área de aproximadamente 1 unidad cuadrada.

Lo dividimos en dos partes, calculamos el área de cada parte y las sumamos para obtener el área total.

El área del recinto azul es una integral definida entre 1 y 2 de la función $y = -2x + 4$ menos $f(x) = 3 - x^2$.

$$\text{Área azul} = \int_1^2 -2x + 4 - (3 - x^2) dx = \int_1^2 -2x + 4 - 3 + x^2 dx = \int_1^2 x^2 - 2x + 1 dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_1^2 = \left[\frac{2^3}{3} - 2^2 + 2 \right] - \left[\frac{1^3}{3} - 1^2 + 1 \right] = \frac{8}{3} - 4 + 2 - \frac{1}{3} + 1 - 1 = \frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3} u^2$$

El área del recinto rosa es una integral definida entre 2 y 4 de la función $y = -2x+4$ menos

$$g(x) = -\frac{x^2}{4}$$

$$\text{Área rosa} = \int_2^4 -2x + 4 - \left(-\frac{x^2}{4}\right) dx = \int_2^4 -2x + 4 + \frac{x^2}{4} dx = \int_2^4 \frac{x^2}{4} - 2x + 4 dx = \left[\frac{x^3}{12} - x^2 + 4x \right]_2^4 =$$

$$= \left[\frac{4^3}{12} - 4^2 + 4 \cdot 4 \right] - \left[\frac{2^3}{12} - 2^2 + 4 \cdot 2 \right] = \frac{64}{12} - 16 + 16 - \frac{8}{12} + 4 - 8 = \frac{56}{12} - 4 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} u^2$$

El área total es $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 u^2$.

Ejercicio 3.-

a) [1,5 puntos] Justifica que es posible hacer un pago de 34,50 euros cumpliendo las siguientes restricciones:

- utilizando únicamente monedas de 50 céntimos de euro, de 1 euro y de 2 euros;
 - se tienen que utilizar exactamente un total de 30 monedas;
 - tiene que haber igual número de monedas de 1 euro como de 50 céntimos y 2 euros juntas.
- ¿De cuántas maneras y con cuántas monedas de cada tipo se puede hacer el pago?

b) [1 punto] Si se redondea la cantidad a pagar a 35 euros, justifica si es posible o no seguir haciendo el pago bajo las mismas condiciones que en el apartado anterior.

a) Llamemos x = número de monedas de 50 cts, y = nº de monedas de 1 euro, z = nº monedas de 2 euros.

Obtenemos las ecuaciones correspondientes a las condiciones ofrecidas en el ejercicio.

“se tienen que utilizar exactamente un total de 30 monedas” $\rightarrow x + y + z = 30$

“tiene que haber igual número de monedas de 1 euro como de 50 céntimos y 2 euros juntas” $\rightarrow y = x + z$

“hacer un pago de 34,50 euros” $\rightarrow 0,5x + y + 2z = 34,5$

Formamos un sistema con las tres ecuaciones y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 30 \\ 0,5x + y + 2z = 34,5 \\ y = x + z \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Para no manejar decimales} \\ \text{multiplico por 2 la 2ª ecuación} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 30 \\ x + 2y + 4z = 69 \\ -x + y - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª + Ecuación 1ª} \\ -x + y - z = 0 \\ x + y + z = 30 \\ \hline 2y = 30 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 30 \\ x + 2y + 4z = 69 \\ 2y = 30 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª} \\ x + 2y + 4z = 69 \\ -x - y - z = -30 \\ \hline y + 3z = 39 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 30 \\ y + 3z = 39 \\ \boxed{y = 15} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 15 + z = 30 \\ 15 + 3z = 39 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + z = 15 \\ 3z = 24 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + z = 15 \\ \boxed{z = 8} \end{array} \right\} \Rightarrow x + 8 = 15 \Rightarrow \boxed{x = 7}$$

Solo hay una forma de conseguirlo, con 7 monedas de 50 cts, 15 de 1 euro y 8 de 2 euros.

b) Cambiamos la ecuación correspondiente y volvemos a resolver.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 30 \\ 0,5x + y + 2z = 35 \\ y = x + z \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Para no manejar decimales} \\ \text{multiplico por 2 la 2ª ecuación} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 30 \\ x + 2y + 4z = 70 \\ -x + y - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª + Ecuación 1ª} \\ -x + y - z = 0 \\ x + y + z = 30 \\ \hline 2y = 30 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 30 \\ x + 2y + 4z = 70 \\ 2y = 30 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª} \\ x + 2y + 4z = 70 \\ -x - y - z = -30 \\ \hline y + 3z = 40 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 30 \\ y + 3z = 40 \\ \boxed{y = 15} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 15 + z = 30 \\ 15 + 3z = 40 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + z = 15 \\ 3z = 25 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + z = 15 \\ \boxed{z = \frac{25}{3}} \end{array} \right\} \Rightarrow x + \frac{25}{3} = 15 \Rightarrow x = 15 - \frac{25}{3} \Rightarrow \boxed{x = \frac{20}{3}}$$

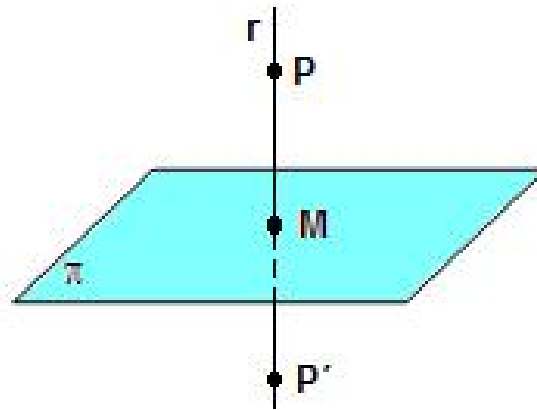
No es posible, pues la solución da un número decimal de monedas de 50 cts y de 2 euros.

Ejercicio 4.- Considera el punto $P(2, -1, 3)$ y el plano π de ecuación $3x + 2y + z = 5$.

a) [1,75 puntos] Calcula el punto simétrico de P respecto de π .

b) [0,75 puntos] Calcula la distancia de P a π .

a) Para obtener las coordenadas del punto P' simétrico de P respecto de un plano π seguiremos el procedimiento descrito en el dibujo.



Hallamos la recta r perpendicular al plano $3x + 2y + z = 5$ y que pasa por P . Por ser perpendicular el vector director de la recta es el vector normal del plano.

$$\pi \equiv 3x + 2y + z = 5 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (3, 2, 1) \\ P(2, -1, 3) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \left. \begin{array}{l} x = 2 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 + t \end{array} \right\}$$

Hallamos el punto M de corte de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 3x + 2y + z = 5 \\ x = 2 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 + t \end{array} \right\} \Rightarrow 3(2 + 3t) + 2(-1 + 2t) + 3 + t = 5 \Rightarrow 6 + 9t - 2 + 4t + 3 + t = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14t = -2 \Rightarrow t = \frac{-2}{14} = -\frac{1}{7} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 2 + 3\left(-\frac{1}{7}\right) = 2 - \frac{3}{7} = \frac{11}{7} \\ y = -1 + 2\left(-\frac{1}{7}\right) = -1 - \frac{2}{7} = -\frac{9}{7} \\ z = 3 - \frac{1}{7} = \frac{20}{7} \end{array} \right\} \Rightarrow M\left(\frac{11}{7}, -\frac{9}{7}, \frac{20}{7}\right)$$

Llamemos a las coordenadas del punto $P'(a, b, c)$. El punto M es el punto medio del segmento PP' por lo que se cumple:

$$\left. \begin{array}{l} M\left(\frac{11}{7}, -\frac{9}{7}, \frac{20}{7}\right) \\ P(2, -1, 3) \\ P'(a, b, c) \end{array} \right\} \Rightarrow M\left(\frac{11}{7}, -\frac{9}{7}, \frac{20}{7}\right) = \frac{(2, -1, 3) + (a, b, c)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{11}{7}, -\frac{9}{7}, \frac{20}{7}\right) = (2, -1, 3) + (a, b, c) \Rightarrow \left(\frac{22}{7}, -\frac{18}{7}, \frac{40}{7}\right) - (2, -1, 3) = (a, b, c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a, b, c) = \left(\frac{8}{7}, -\frac{11}{7}, \frac{19}{7}\right)$$

El punto P' tiene coordenadas $\left(\frac{8}{7}, -\frac{11}{7}, \frac{19}{7}\right)$

b) La distancia de P al plano π es el módulo del vector $\overrightarrow{PM}$.

$$\overrightarrow{PM} = \left(\frac{11}{7}, -\frac{9}{7}, \frac{20}{7}\right) - (2, -1, 3) = \left(-\frac{3}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{1}{7}\right)$$

$$|\overrightarrow{PM}| = \sqrt{\left(-\frac{3}{7}\right)^2 + \left(-\frac{2}{7}\right)^2 + \left(-\frac{1}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{14}{49}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

La distancia es $\frac{\sqrt{14}}{7} = 0,53u$