

**MATEMÁTICAS APLICADAS
A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

El examen consta de 6 ejercicios, **todos con la misma valoración máxima (3,33 puntos)**, de los que puede realizar un **MÁXIMO DE 3** combinados como quiera. Si realiza más ejercicios de los permitidos, **sólo se corregirán los tres primeros realizados**.

EJERCICIO 1. Álgebra. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- a) Determine para que valores de m existe la matriz inversa de A .
b) Despeje la matriz X tal que $X \cdot A + B = C$ y calcúlela para $m=1$.

EJERCICIO 2. Álgebra. Consideramos el siguiente sistema de inecuaciones:

$$y \leq x + 2 \quad x + y \leq 6 \quad x \leq 5 \quad y \geq 0$$

- a) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.
b) Determine el punto o puntos de esa región en donde la función $f(x, y) = x - y$ alcanza sus valores máximo y mínimo. c) Determine esos valores máximo y mínimo.

EJERCICIO 3. Análisis. La cantidad de CO_2 (en millones de toneladas) emitidas a la atmósfera por una determinada región a lo largo del año 2020, viene dada por la función:

$$C(t) = \begin{cases} 5 - \frac{t}{3} & , \quad 0 \leq t < 6 \\ \frac{1}{4}t^2 - 4t + 18 & , \quad 6 \leq t \leq 12 \end{cases} \quad \text{siendo } t \text{ el tiempo transcurrido en meses desde comienzo del año.}$$

- a) Estudie en qué períodos se ha producido un aumento/disminución de la cantidad de CO_2 emitida a la atmósfera.
b) ¿Cuáles son las cantidades máxima y mínima de CO_2 emitidas a la atmósfera a lo largo del año 2020? ¿En qué momentos se produjeron?
c) Represente la gráfica de la función $C(t)$ teniendo en cuenta el estudio realizado en los apartados anteriores.

EJERCICIO 4. Análisis. Un fabricante de automóviles hace un estudio sobre los beneficios, en miles de euros, a lo largo de los diez últimos años, y comprueba que éstos se ajustan a la función

$$B(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3 \quad \text{si } 0 \leq t \leq 10, \text{ (t en años)}$$

- a) ¿Qué beneficios obtuvo la empresa el último año del estudio?
b) Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento de los beneficios
c) ¿En qué años se producen los beneficios máximos y mínimos y a cuánto ascienden?
d) Calcule $\int_1^2 B(t) dt$.

EJERCICIO 5. Estadística y probabilidad. En una población el 45 % son hombres. El 27% de esa población resulta ser hombre y lector de prensa deportiva, mientras que un 38.5% es mujer y no lectora de esa prensa. **a)** De las mujeres, ¿qué porcentaje lee prensa deportiva? **b)** ¿Qué porcentaje es mujer o

lee prensa deportiva? **c)** De los lectores de prensa deportiva, ¿qué porcentaje son hombres? **d)** ¿Son incompatibles los sucesos ser hombre y no leer prensa deportiva? Justifique la respuesta.

EJERCICIO 6. Estadística y probabilidad. Una compañía de seguros quiere determinar qué proporción de sus clientes estaría dispuesta a aceptar una subida de tarifas a cambio de un incremento en sus prestaciones. Una encuesta previa indica que esta proporción está en torno al 15%.

a) ¿De qué tamaño mínimo debería ser la muestra si se quiere estimar dicha proporción con un error inferior a 0,08 y un nivel de confianza del 95%?

Finalmente, se realiza el estudio con una muestra de 196 clientes, de los que 37 manifestaron su conformidad con la propuesta. **b)** Calcule un intervalo de confianza, al 92%, para la proporción de clientes de la compañía que aceptaría dicha propuesta. ¿Cuál es el error máximo cometido?

SOLUCIONES**EJERCICIO 1. Álgebra.** Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- a) Determine para que valores de m existe la matriz inversa de A .
 b) Despeje la matriz X tal que $X \cdot A + B = C$ y calcúlela para $m=1$.

- a) Para que exista la inversa de A su determinante debe ser no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2m$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2m = 0 \Rightarrow m = 0$$

Para que exista la inversa de A el valor de m debe ser distinto de 0.

- b) Para $m = 1$ existe la inversa de A y puedo despejar de la ecuación matricial la matriz X .

$$X \cdot A + B = C \Rightarrow X \cdot A = C - B \Rightarrow X = (C - B) A^{-1}$$

Determinamos la inversa de A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituimos y determinamos X .

$$X = (C - B) A^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2+1 & -4-4-1 \\ 0 & 1 & -4-2 \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{3} \cdot \boxed{3} \times 3 \longrightarrow 2 \times 3$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

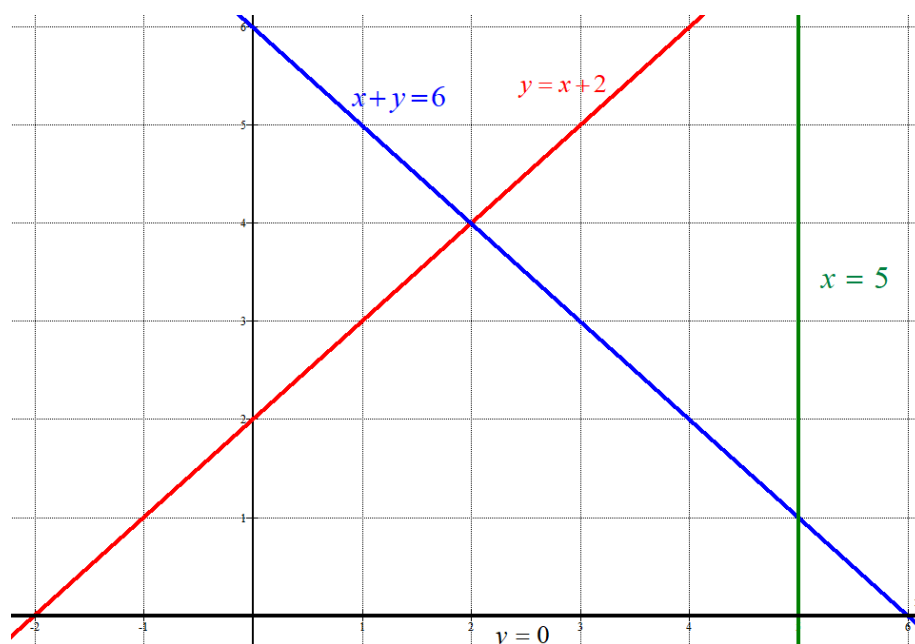
EJERCICIO 2. Álgebra. Consideramos el siguiente sistema de inecuaciones:

$$y \leq x + 2 \quad x + y \leq 6 \quad x \leq 5 \quad y \geq 0$$

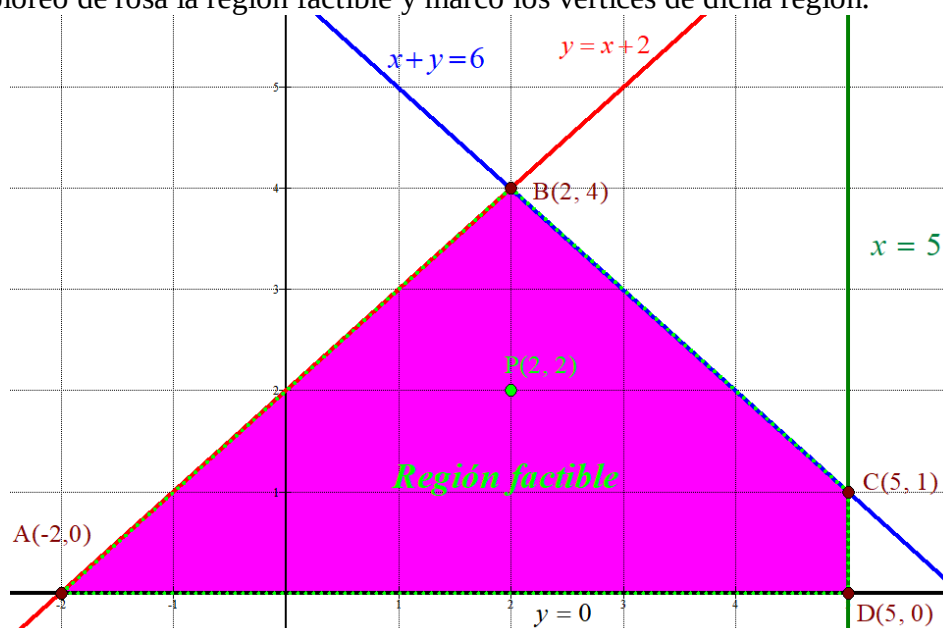
- a) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.
 b) Determine el punto o puntos de esa región en donde la función $f(x, y) = x - y$ alcanza sus valores máximo y mínimo. c) Determine esos valores máximo y mínimo.

a) Representamos las rectas que delimitan la región.

$y = x + 2$		$x + y = 6$		$x = 5$	$y = 0$
x	$y = x + 2$	x	$y = 6 - x$	Recta vertical	Eje OX
0	2	0	6		
2	4	2	4		
4	6	6	0		



Como las restricciones son $y \leq x + 2$ $x + y \leq 6$ $x \leq 5$ $y \geq 0$ entonces la región está por debajo de las rectas azul y roja, por encima de la recta negra y a la izquierda de la recta verde. Coloreo de rosa la región factible y marco los vértices de dicha región.



Compruebo que el punto $P(2,2)$ cumple las restricciones.

$2 \leq 2+2$ $2+2 \leq 6$ $2 \leq 5$ $2 \geq 0$;Se cumplen todas! La región factible es correcta.

Los vértices son $A(-2, 0)$, $B(2, 4)$, $C(5, 1)$ y $D(5, 0)$.

- b) Valoramos la función $f(x, y) = x - y$ en cada uno de los vértices y averiguamos el valor mínimo y máximo de la función.

$$A(-2, 0) \rightarrow f(-2, 0) = -2 - 0 = -2$$

$$B(2, 4) \rightarrow f(2, 4) = 2 - 4 = -2$$

$$C(5, 1) \rightarrow f(5, 1) = 5 - 1 = 4$$

$$D(5, 0) \rightarrow f(5, 0) = 5 - 0 = 5$$

El valor máximo es 5 y se alcanza en el punto $D(5, 0)$ y el mínimo es -2 y se alcanza en toda el segmento AB , en los puntos $A(-2, 0)$, $(-1, 1)$, $(0, 2)$, ..., $B(2, 4)$.

- c) El valor máximo es 5 y el mínimo es -2 .

EJERCICIO 3. Análisis. La cantidad de CO₂ (en millones de toneladas) emitidas a la atmósfera por una determinada región a lo largo del año 2020, viene dada por la función:

$$C(t) = \begin{cases} 5 - \frac{t}{3} & , \quad 0 \leq t < 6 \\ \frac{1}{4}t^2 - 4t + 18 & , \quad 6 \leq t \leq 12 \end{cases} \quad \text{siendo } t \text{ el tiempo transcurrido en meses desde comienzo del año.}$$

- a) Estudie en qué períodos se ha producido un aumento/disminución de la cantidad de CO₂ emitida a la atmósfera.
b) ¿Cuáles son las cantidades máxima y mínima de CO₂ emitidas a la atmósfera a lo largo del año 2020? ¿En qué momentos se produjeron?
c) Represente la gráfica de la función C(t) teniendo en cuenta el estudio realizado en los apartados anteriores.

- a) Estudiamos la continuidad de la función en $t = 6$.

$$\left. \begin{aligned} C(6) &= \frac{1}{4}6^2 - 24 + 18 = 3 \\ \lim_{t \rightarrow 6^-} C(t) &= \lim_{t \rightarrow 6^-} 5 - \frac{t}{3} = 5 - 2 = 3 \\ \lim_{t \rightarrow 6^+} C(t) &= \lim_{t \rightarrow 6^+} \frac{1}{4}t^2 - 4t + 18 = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow C(6) = \lim_{t \rightarrow 6^-} C(t) = \lim_{t \rightarrow 6^+} C(t) = 3.$$

La función es continua en $t = 6$.

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento usamos la derivada.

$$C(t) = \begin{cases} 5 - \frac{t}{3} & , \quad 0 \leq t < 6 \\ \frac{1}{4}t^2 - 4t + 18 & , \quad 6 \leq t \leq 12 \end{cases} \Rightarrow C'(t) = \begin{cases} -\frac{1}{3} & , \quad 0 < t < 6 \\ \frac{2}{4}t - 4 & , \quad 6 < t < 12 \end{cases}$$

En el tramo de 0 a 6 meses la derivada es negativa y la función decrece.

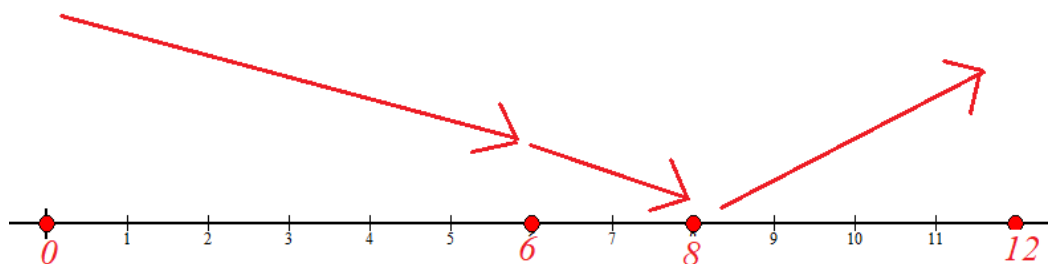
En el tramo de 6 a 12 igualamos a cero la derivada y vemos cuando cambia la función.

$$C'(t) = 0 \Rightarrow \frac{2}{4}t - 4 = 0 \Rightarrow \frac{t}{2} = 4 \Rightarrow t = 8$$

En el mes 8 se produce un cambio de signo.

Del 6 al 8 tomamos $t = 7$ y la derivada es $C'(7) = \frac{2}{4}7 - 4 = -0.5 < 0$. La función decrece del mes 6 al 8.

Del 8 al 12 tomamos $t = 10$ y la derivada es $C'(10) = \frac{2}{4}10 - 4 = 1 > 0$. La función crece del mes 8 al 12.



Como la función es continua el cambio de definición no afecta al decrecimiento en $t = 6$.

Resumiendo: La cantidad de CO₂ emitida a la atmósfera decrece durante los 8 primeros meses y crece del mes 8 al 12.

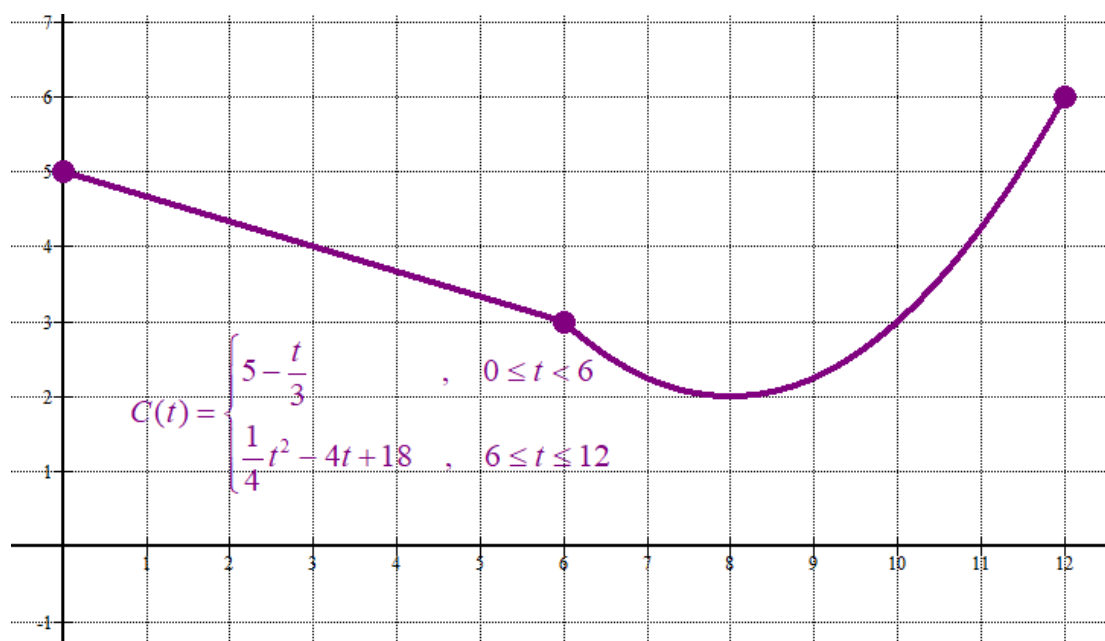
- b) La cantidad mínima se produce en el mes 8 y es de $C(8) = \frac{1}{4}8^2 - 32 + 18 = 2$.

La cantidad máxima se produce en el mes 0 o en el mes 12. Calculamos ambos valores y decidimos.

$$\left. \begin{array}{l} C(0) = 5 - \frac{0}{3} = 5 \\ C(12) = \frac{1}{4}12^2 - 48 + 18 = 6 \end{array} \right\} \text{La cantidad máxima se produce en el mes 12 y su valor es de 6.}$$

- c) Para representar la gráfica hacemos una tabla de valores.

t	$C(t) = 5 - \frac{t}{3}$	t	$C(t) = \frac{1}{4}t^2 - 4t + 18$
0	5	6	3
3	4	8	2
6	2 No se incluye	10	$25 - 40 + 18 = 3$
		12	6



EJERCICIO 4. Análisis. Un fabricante de automóviles hace un estudio sobre los beneficios, en miles de euros, a lo largo de los diez últimos años, y comprueba que éstos se ajustan a la función $B(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3$ si $0 \leq t \leq 10$, (t en años)

- a) ¿Qué beneficios obtuvo la empresa el último año del estudio?
 b) Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento de los beneficios
 c) ¿En qué años se producen los beneficios máximos y mínimos y a cuánto ascienden?
 d) Calcule $\int_1^2 B(t) dt$.

a) $B(10) = 10^3 - 18 \cdot 10^2 + 810 - 3 = 1000 - 1800 + 810 - 3 = 7$

Los beneficios en el año 10 es de 7000 €

- b) Igualamos la derivada a cero.

$$B(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3 \Rightarrow B'(t) = 3t^2 - 36t + 81$$

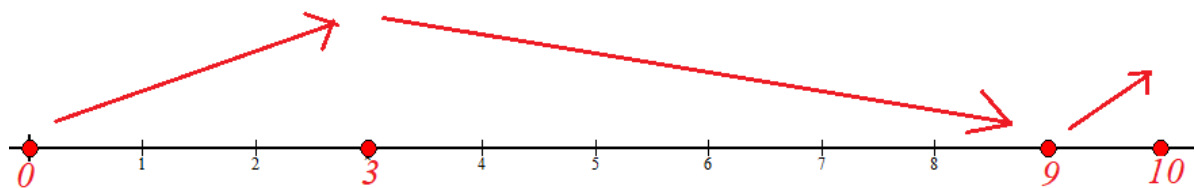
$$B'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 36t + 81 = 0 \Rightarrow t^2 - 12t + 27 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 27}}{2} = \frac{12 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{12+6}{2} = 9 \\ \frac{12-6}{2} = 3 \end{cases}$$

Vemos como evoluciona la función antes, entre y después de $t = 3$ y $t = 9$

- En $(0, 3)$ tomamos $t = 2$ y la derivada es $B'(2) = 12 - 72 + 81 = 21 > 0$. La función crece en $(0, 3)$.
- En $(3, 9)$ tomamos $t = 5$ y la derivada es $B'(5) = 75 - 180 + 81 = -24 < 0$. La función decrece en $(3, 9)$.
- En $(9, 10)$ tomamos $t = 10$ y la derivada es $B'(10) = 300 - 360 + 81 = 21 > 0$. La función crece en $(9, 10)$.

Los beneficios crecen durante los tres primeros años y del año 9 al 10. Decrecen del año 3 al 9.



- c) Valoramos los beneficios en $t = 0$, $t = 3$, $t = 9$ y $t = 10$.

$$B(0) = -3$$

$$B(3) = 3^3 - 18 \cdot 3^2 + 81 \cdot 3 - 3 = 105$$

$$B(9) = 9^3 - 18 \cdot 9^2 + 81 \cdot 9 - 3 = -3$$

$$B(10) = 10^3 - 18 \cdot 10^2 + 81 \cdot 10 - 3 = 7$$

El beneficio máximo se alcanza en el año 3 y es de 105000 €.

El beneficio mínimo se alcanza en el año 0 y 9 y es de -3000 €.

d)

$$\begin{aligned}\int_1^2 B(t) dt &= \int_1^2 t^3 - 18t^2 + 81t - 3 dt = \left[\frac{t^4}{4} - 18\frac{t^3}{3} + 81\frac{t^2}{2} - 3t \right]_1^2 = \\ &= \left[\frac{2^4}{4} - 18\frac{2^3}{3} + 81\frac{2^2}{2} - 6 \right] - \left[\frac{1^4}{4} - 18\frac{1^3}{3} + 81\frac{1^2}{2} - 3 \right] = 4 - 48 + 162 - 6 - \frac{1}{4} + 6 - \frac{81}{2} + 3 = \frac{321}{4}\end{aligned}$$

EJERCICIO 5. Estadística y probabilidad. En una población el 45 % son hombres. El 27% de esa población resulta ser hombre y lector de prensa deportiva, mientras que un 38.5% es mujer y no lectora de esa prensa. **a)** De las mujeres, ¿qué porcentaje lee prensa deportiva? **b)** ¿Qué porcentaje es mujer o lee prensa deportiva? **c)** De los lectores de prensa deportiva, ¿qué porcentaje son hombres? **d)** ¿Son incompatibles los sucesos ser hombre y no leer prensa deportiva? Justifique la respuesta.

Llamemos H = “Ser hombre”, así $\bar{H}$ = “Ser mujer”

D = “Ser lector/a de prensa deportiva” y $\bar{D}$ = “No ser lector de prensa deportiva”

Los datos del ejercicio son $P(H) = 0.45$; $P(H \cap D) = 0.27$; $P(\bar{H} \cap \bar{D}) = 0.385$.

Construimos una tabla de contingencia para obtener fácilmente el resto de probabilidades.

	Ser lector de prensa deportiva (D)	No ser lector de prensa deportiva ($\bar{D}$)	
Ser hombre (H)	27		45
Ser mujer ($\bar{H}$)		38.5	
			100

Completamos los datos que nos faltan de la tabla.

	Ser lector de prensa deportiva (D)	No ser lector de prensa deportiva ($\bar{D}$)	
Ser hombre (H)	27	18	45
Ser mujer ($\bar{H}$)	16.5	38.5	55
	43.5	56.5	100

- a) De 55 mujeres 16.5 leen la prensa. El porcentaje es $\frac{16.5}{55} = \frac{3}{10} = 0.3 = 30\%$
- b) Mujeres son 55 % y hombres que leen la prensa deportiva son 27 %. Los sumamos y hacen un 82%.
- c) De 43,5 personas que leen la prensa deportiva son hombres 27. El porcentaje es $\frac{27}{43.5} = \frac{18}{29} \approx 0.62 = 62\%$
- d) Comprobamos si H y $\bar{D}$ son incompatibles. Para ello debe ser su intersección vacía. Pero los hombres que no leen prensa deportiva son 18% de la población, luego no es vacío y los sucesos no son incompatibles.

EJERCICIO 6. Estadística y probabilidad. Una compañía de seguros quiere determinar qué proporción de sus clientes estaría dispuesta a aceptar una subida de tarifas a cambio de un incremento en sus prestaciones. Una encuesta previa indica que esta proporción está en torno al 15%.

a) ¿De qué tamaño mínimo debería ser la muestra si se quiere estimar dicha proporción con un error inferior a 0,08 y un nivel de confianza del 95%?

Finalmente, se realiza el estudio con una muestra de 196 clientes, de los que 37 manifestaron su conformidad con la propuesta. **b)** Calcule un intervalo de confianza, al 92%, para la proporción de clientes de la compañía que aceptaría dicha propuesta. ¿Cuál es el error máximo cometido?

a) La proporción de personas que están dispuestos a aceptar la subida es $pr = 0.15$

Con un nivel de confianza del 95% hallamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

Utilizamos la fórmula del error

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.15 \cdot 0.85}{n}} = 0.08 \Rightarrow \sqrt{\frac{0.15 \cdot 0.85}{n}} = \frac{0.08}{1.96} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{0.15 \cdot 0.85}{n} = \left(\frac{0.08}{1.96}\right)^2 \Rightarrow n = \frac{0.15 \cdot 0.85}{\left(\frac{0.08}{1.96}\right)^2} \approx 76.53$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 77 clientes para que el error sea inferior a 0.08 con un nivel de confianza del 95%.

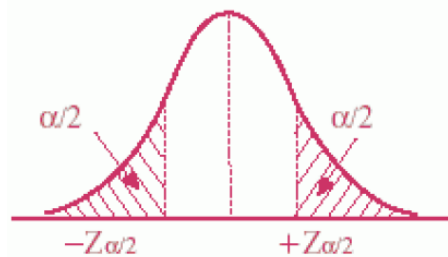
b) El tamaño de la muestra es $n = 196$.

La proporción de clientes que aceptan la subida es $pr = \frac{37}{196} = 0.19$

y por tanto $qr = \frac{196 - 37}{196} = \frac{159}{196}$.

Con un nivel de confianza del 92% hallamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.92 \rightarrow \alpha = 0.08 \rightarrow \alpha/2 = 0.04 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.96 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.75$$



Utilizamos la fórmula del error

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.75 \cdot \sqrt{\frac{\frac{37}{196} \cdot \frac{159}{196}}{196}} \approx 0.049$$

El error máximo cometido es 0.049

El intervalo de confianza es $(0.19 - 0.049, 0.19 + 0.049) = (0.141, 0.239)$