

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso 2023-2024 MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	MODELO.
INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen. Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto. DURACION: 90 minutos.		

1. (2 puntos) Se consideran las matrices A y B dadas por

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 4 & c \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$$

- a) Determine los valores de los parámetros $a, c \in \mathbb{R}$ para los que se verifica $A \cdot B = 6B$
- b) Para $a = 1$ y $c = -1$, calcule $B^t \cdot A \cdot B$, donde B^t denota la matriz transpuesta de B.

2. (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = x^3 + x^2 - x - a, \quad a \in \mathbb{R}$$

- a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ tenga una primitiva que pase por los puntos $(0, 1)$ y $(-1, 1/4)$. Señale la expresión de esta primitiva.
- b) Para $a = 1$, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función clasificando, si procede, los extremos relativos de la función

3. (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x^2 - 1)}{(x - 1)} & \text{si } x < 1 \\ (x^2 + 2x + 1) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- a) Estudie la continuidad de la función $f(x)$ e indique el tipo de discontinuidad si procede.
- b) Calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

4. (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^3 + 4x}{x^2 - 4}$$

- a) Determine las asíntotas de esta función.
- b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = -1$.

5. (2 puntos) Se desea vender batido de chocolate y batido de fresa en una fiesta escolar para recaudar fondos para el viaje de fin de curso. Con la leche de la que se dispone se pueden elaborar 35 litros de batido, y hay cacao en polvo para 30 litros de batido de chocolate como máximo. Se necesitan 15 minutos de preparación por litro de batido de chocolate y 20 minutos por litro de batido de fresa para que tengan la textura correcta. Los batidos tienen que estar listos en 10 horas. Solo hay una batidora y el beneficio que se obtendrá por litro de batido de chocolate es de 10 euros, y por litro de batido de fresa de 11 euros.
- ¿Cuántos litros de cada tipo de batido se deben producir para maximizar los beneficios? ¿Cuál es el beneficio máximo?
6. (2 puntos) Una caja de Lego contiene un total de 50 piezas de tres tipos diferentes (A, B, C). La cantidad de piezas del tipo A más la del tipo B es igual a cuatro veces la cantidad del tipo C. Si a las piezas del tipo A le sumamos el doble de las piezas del tipo B y cuatro veces las del tipo C, el total de piezas de la caja sería de 100. Plantee un sistema de ecuaciones para saber la cantidad de piezas de cada tipo que contendrá la caja.
7. (2 puntos) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real
- $$\begin{cases} a^2x - ay = a \\ a^3x - y = 1 \end{cases}$$
- a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .
b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 2$.
8. (2 puntos) Un estudio europeo sobre hábitos de uso de internet indica que el 62% de los hombres españoles mayores de 16 años participa en redes sociales y que el 81% lee noticias en internet. Además, el 95% de los hombres de este estudio participa en redes sociales o lee noticias en internet. Eligiendo un hombre español mayor de 16 años al azar, calcule la probabilidad de que:
- a) Participe en redes sociales y lea noticias en internet.
b) No participe en redes sociales, sabiendo que no lee noticias en internet.
9. (2 puntos) Se sabe que la proporción de hogares españoles con dos o más ordenadores es $p = 0,75$. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 140$ hogares. Determine:
- a) El número esperado de hogares que no tendrán dos o más ordenadores en la muestra elegida.
b) La probabilidad de que, en la muestra de 140 hogares, el número de ellos con dos o más ordenadores sea entre 98 y 112 hogares.
10. (2 puntos) Durante el adiestramiento de un perro para encontrar trufas, se le deja libre una vez al día en una zona de monte apropiada para encontrar este preciado hongo. En cada operación de búsqueda del animal se ha observado que este se dirige siempre hacia una de tres zonas de monte diferentes, denominadas A, B y C. En dos de cada diez operaciones de búsqueda se dirige hacia A, en cinco de cada diez hacia B y el resto hacia C. El perro detecta trufas en A un 35% de las veces, un 15% en B y un 40% en C. Eligiendo al azar un perro en adiestramiento, calcule la probabilidad de que:
- a) Detecte una trufa en una operación de búsqueda.
b) Sabiendo que ha encontrado una trufa, esta haya sido encontrada en la zona B.

SOLUCIONES

1. (2 puntos) Se consideran las matrices A y B dadas por

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 4 & c \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de los parámetros $a, c \in \mathbb{R}$ para los que se verifica

$$A \cdot B = 6B$$

b) Para $a = 1$ y $c = -1$, calcule $B^t \cdot A \cdot B$, donde B^t denota la matriz transpuesta de B.

a) Resolvemos la ecuación matricial planteada.

$$A \cdot B = 6B \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 4 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2+c \\ 2+a+c \\ 1+4+c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+2+c=6 \rightarrow a=4-c \\ 5+c^2=6c \rightarrow c^2-6c+5=0 \rightarrow c = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(5)}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{6+4}{2} = 5 = c \\ \frac{6-4}{2} = 1 = c \end{cases} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{c=5} \rightarrow \boxed{a=4-5=-1} \\ \boxed{c=1} \rightarrow \boxed{a=4-1=3} \end{cases}$$

Existen dos soluciones: $c = 5, a = -1$ o bien $c = 1, a = 3$.

b) Para $a = 1$ y $c = -1$ las matrices quedan $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Realizamos las operaciones indicadas.

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = (1 \quad 1 \quad -1)$$

$$B^t \cdot A \cdot B = (1 \quad 1 \quad -1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (1+2-1 \quad 2+1-4 \quad 1+1-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= (2 \quad -1 \quad 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (2-1-3) = (-2)$$

2. (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = x^3 + x^2 - x - a, \quad a \in \mathbb{R}$$

a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ tenga una primitiva que pase por los puntos $(0, 1)$ y $(-1, 1/4)$. Señale la expresión de esta primitiva.

b) Para $a = 1$, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función clasificando, si procede, los extremos relativos de la función

a) Calculamos la primitiva de $f(x)$.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int x^3 + x^2 - x - a dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - ax + K$$

Como la primitiva debe pasar por los puntos $(0, 1)$ y $(-1, 1/4)$ se debe cumplir que $F(0) = 1$ y que $F(-1) = \frac{1}{4}$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - ax + K \\ F(-1) = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{(-1)^4}{4} + \frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} - a(-1) + K = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + a + K = \frac{1}{4} \Rightarrow a + K = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a + K = \frac{5}{6}}$$

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - ax + K \\ F(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{0^4}{4} + \frac{0^3}{3} - a \cdot 0 + K = 1 \Rightarrow \boxed{K = 1}$$

Sustituimos $K = 1$ en la primera ecuación y obtenemos el valor de a .

$$a + 1 = \frac{5}{6} \Rightarrow \boxed{a = \frac{5}{6} - 1 = \frac{-1}{6}}$$

Los valores buscados son $K = 1$ y $a = \frac{-1}{6}$.

b) Para $a = 1$ la función queda $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$. Buscamos los puntos críticos de la función averiguando cuando se anula la derivada.

$$f(x) = x^3 + x^2 - x - 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(3)(-1)}}{2(3)} = \frac{-2 \pm 4}{6} = \begin{cases} \frac{-2+4}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ \frac{-2-4}{6} = \frac{-6}{6} = -1 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos puntos críticos.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = 3(-2)^2 + 2(-2) - 1 = 7 > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -1).$$

- En el intervalo $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale

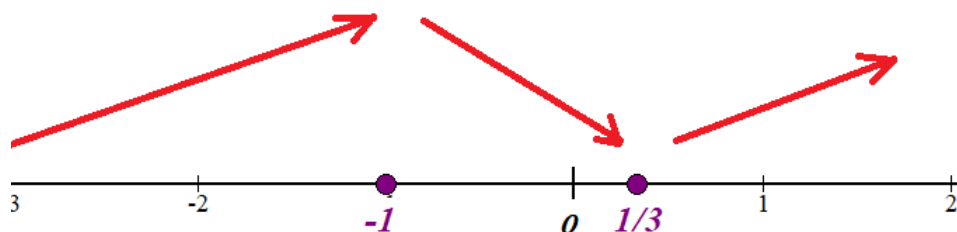
$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - 1 = -1 < 0. \text{ La función decrece en } \left(-1, \frac{1}{3}\right).$$

- En el intervalo $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 1 = 4 > 0$.

La función crece en $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

La función crece en $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ y decrece en $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$.

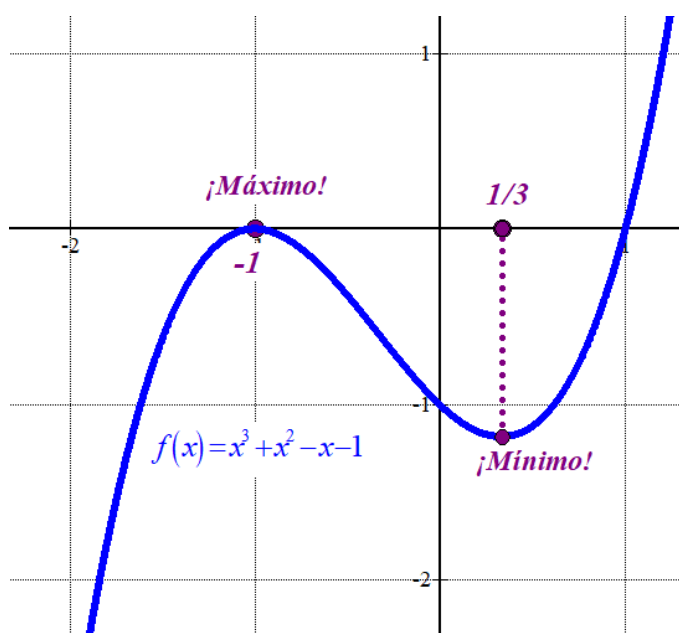
La función sigue el esquema siguiente.



La función presenta un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = \frac{1}{3}$.

Como $f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - (-1) - 1 = 0$ y $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} - 1 = \frac{-32}{27}$ las

coordenadas del máximo relativo son $(-1, 0)$ y las del mínimo relativo son $\left(\frac{1}{3}, \frac{-32}{27}\right)$.



3. (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x^2-1)}{(x-1)} & \text{si } x < 1 \\ (x^2+2x+1) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- a) Estudie la continuidad de la función $f(x)$ e indique el tipo de discontinuidad si procede.
 b) Calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

a) En el intervalo $(-\infty, 1)$ la función es $f(x) = \frac{(x^2-1)}{(x-1)}$. Esta función es continua, pues el

denominador se anula en $x = 1$ que no pertenece al intervalo de definición.

En el intervalo $(1, +\infty)$ la función es $f(x) = x^2 + 2x + 1$. Esta función es continua, pues es una función polinómica.

Estudiamos la continuidad en el cambio de definición $x = 1$.

- Existe $f(1) = 1^2 + 2 + 1 = 4$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x^2-1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x+1 = 2$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + 2x + 1 = 1^2 + 2 + 1 = 4$
- Los tres valores no son iguales: $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4 \neq 2 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

La función es discontinua en $x = 1$. Presentando una discontinuidad inevitable de salto finito.

La función es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

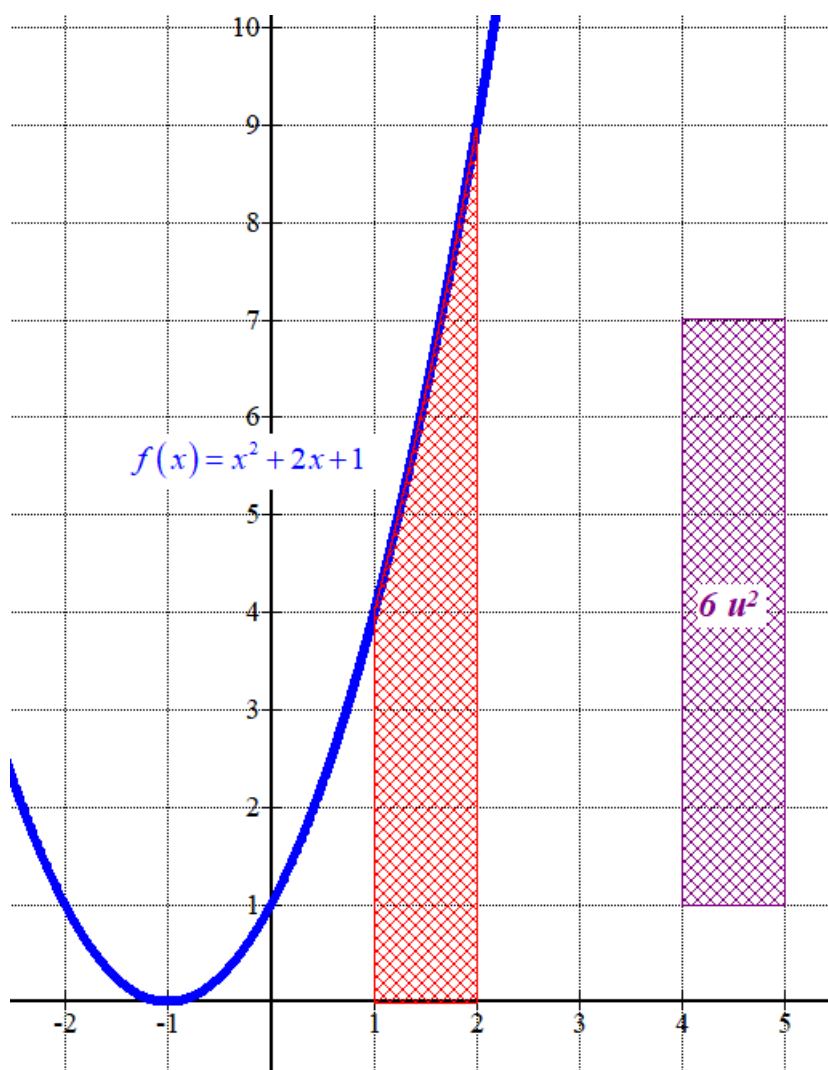
b) Averiguamos si la gráfica de la función corta el eje de abscisas ($y = 0$).

$$f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{(x^2-1)}{(x-1)} = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4}}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \notin [1, +\infty) \end{cases}$$

El punto de corte $x = 1$ está en uno de los extremos de nuestra región, por lo que el área de la región es el valor absoluto de la integral definida entre 1 y 2 de la función que en este intervalo tiene la expresión $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

$$\text{Área} = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 x^2 + 2x + 1 dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right]_1^2 = \left[\frac{2^3}{3} + 2^2 + 2 \right] - \left[\frac{1^3}{3} + 1^2 + 1 \right] =$$

$$= \frac{8}{3} + 4 + 2 - \frac{1}{3} - 1 - 1 = \boxed{\frac{19}{3} \approx 6.33 u^2}$$



4. (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^3 + 4x}{x^2 - 4}$$

a) Determine las asíntotas de esta función.

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = -1$.

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{\pm 2\}$

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x = -2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 4x}{x^2 - 4} = \frac{(-2)^3 + 4(-2)}{(-2)^2 - 4} = \frac{-16}{0} = \infty$$

$x = -2$ es asíntota vertical.

¿ $x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 4x}{x^2 - 4} = \frac{2^3 + 4(2)}{2^2 - 4} = \frac{16}{0} = \infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = +\infty$$

No existe asíntota horizontal

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3 + 4x}{x^2 - 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4x}{x^3 - 4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4x}{x^2 - 4} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4x - x^3 + 4x}{x^2 - 4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8}{x} = \frac{8}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

$y = x$ es asíntota oblicua

b) La recta tangente a $f(x)$ en $x = a$ tiene ecuación $y - f(a) = f'(a)(x - a)$. Calculamos el valor de $f(-1)$ y de $f'(-1)$.

$$f(-1) = \frac{(-1)^3 + 4(-1)}{(-1)^2 - 4} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$$

$$f(x) = \frac{x^3 + 4x}{x^2 - 4} \Rightarrow f'(x) = \frac{(3x^2 + 4)(x^2 - 4) - 2x(x^3 + 4x)}{(x^2 - 4)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(-1) = \frac{(3(-1)^2 + 4)((-1)^2 - 4) - 2(-1)((-1)^3 + 4(-1))}{((-1)^2 - 4)^2} = \frac{7 \cdot (-3) + 2(-5)}{9} = \frac{-31}{9}$$

Aplicamos estos resultados y determinamos la ecuación de la recta tangente.

$$\left. \begin{array}{l} y - f(a) = f'(a)(x - a) \\ a = -1 \\ f(1) = \frac{5}{3} \\ f'(-1) = \frac{-31}{9} \end{array} \right\} \Rightarrow y - \frac{5}{3} = \frac{-31}{9}(x + 1) \Rightarrow y = \frac{-31}{9}x - \frac{31}{9} + \frac{5}{3} \Rightarrow \boxed{y = \frac{-31}{9}x - \frac{16}{9}}$$

5. (2 puntos) Se desea vender batido de chocolate y batido de fresa en una fiesta escolar para recaudar fondos para el viaje de fin de curso. Con la leche de la que se dispone se pueden elaborar 35 litros de batido, y hay cacao en polvo para 30 litros de batido de chocolate como máximo. Se necesitan 15 minutos de preparación por litro de batido de chocolate y 20 minutos por litro de batido de fresa para que tengan la textura correcta. Los batidos tienen que estar listos en 10 horas. Solo hay una batidora y el beneficio que se obtendrá por litro de batido de chocolate es de 10 euros, y por litro de batido de fresa de 11 euros.
¿Cuántos litros de cada tipo de batido se deben producir para maximizar los beneficios? ¿Cuál es el beneficio máximo?

Sea “ x ” la variable que representa el número de batidos de chocolate.

Sea “ y ” la variable que representa el número de batidos de fresa.

Reunimos la información del ejercicio en una tabla.

	Litros de leche	Minutos de preparación	Beneficio
Nº batidos chocolate (x)	x	$15x$	$10x$
Nº batidos fresa (y)	y	$20y$	$11y$
TOTALES	$x + y$	$15x + 20y$	$10x + 11y$

Hallamos las inecuaciones que representan las restricciones del problema.

- Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$
- Con la leche de la que se dispone se pueden elaborar 35 litros de batido $\rightarrow x + y \leq 35$
- Hay cacao en polvo para 30 litros de batido de chocolate como máximo $\rightarrow x \leq 30$
- Los batidos tienen que estar listos en 10 horas = 600 minutos $\rightarrow 15x + 20y \leq 600$

El sistema de inecuaciones que representa las restricciones es:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ x + y \leq 35 \\ x \leq 30 \\ 15x + 20y \leq 600 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ x + y \leq 35 \\ x \leq 30 \\ 3x + 4y \leq 120 \end{array} \right\}$$

La función objetivo que deseamos maximizar es el beneficio $B(x, y) = 10x + 11y$.

Representamos las rectas asociadas a cada inecuación y que delimitan la región factible.

$$x \geq 0; y \geq 0$$

$$x = 30$$

Primer
cuadrante

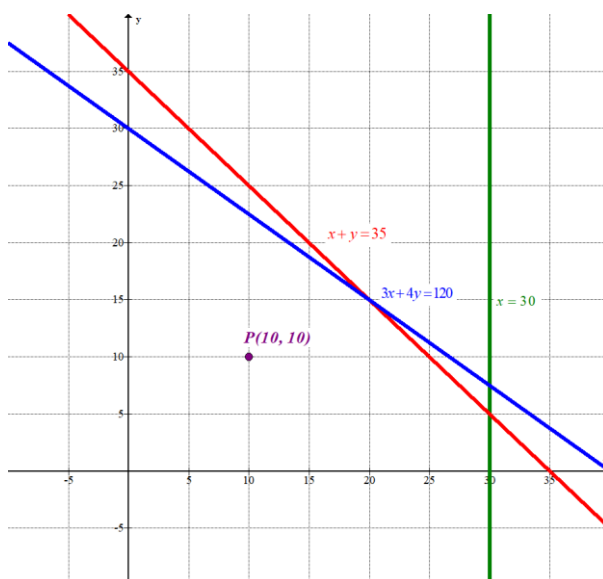
$x = 30$	y
30	0
30	200

$$x + y = 35$$

$$3x + 4y = 120$$

x	$y = 250$
15	20
20	15

x	$y = 2x$
0	30
40	0



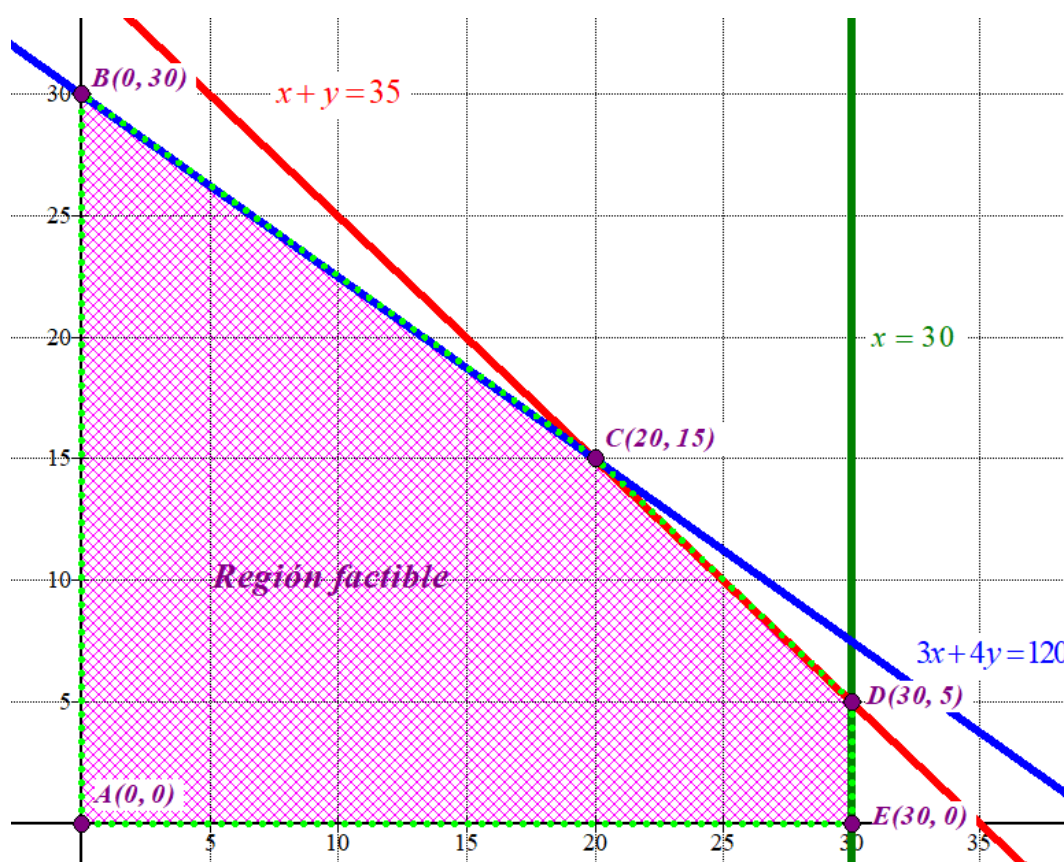
Por las condiciones $\left. \begin{array}{l} x \geq 0; y \geq 0 \\ x + y \leq 35 \\ x \leq 30 \\ 3x + 4y \leq 120 \end{array} \right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada a

la izquierda de la recta vertical verde y por debajo de las rectas roja y azul.

Comprobamos que el punto $P(10, 10)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 10 \geq 0; 10 \geq 0 \\ 10 + 10 \leq 35 \\ 10 \leq 30 \\ 30 + 40 \leq 120 \end{array} \right\} \text{ Se cumplen todas las inecuaciones.}$$

Coloreamos la región factible y marcamos sus vértices:



Valoramos la función $B(x,y) = 10x + 11y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo.

$$A(0,0) \rightarrow B(0,0) = 0$$

$$B(0,30) \rightarrow B(0,30) = 10 \cdot 0 + 11 \cdot 30 = 330$$

$$C(20,15) \rightarrow B(20,15) = 10 \cdot 20 + 11 \cdot 15 = 365 \text{ ¡Máximo!}$$

$$D(30,5) \rightarrow B(30,5) = 10 \cdot 30 + 11 \cdot 5 = 355$$

$$E(30,0) \rightarrow B(30,0) = 10 \cdot 30 + 11 \cdot 0 = 300$$

El beneficio máximo que se puede obtener es de 365 € y se consigue elaborando 20 litros de batido de chocolate y 15 de fresa.

6. (2 puntos) Una caja de Lego contiene un total de 50 piezas de tres tipos diferentes (A, B, C). La cantidad de piezas del tipo A más la del tipo B es igual a cuatro veces la cantidad del tipo C. Si a las piezas del tipo A le sumamos el doble de las piezas del tipo B y cuatro veces las del tipo C, el total de piezas de la caja sería de 100. Plantee un sistema de ecuaciones para saber la cantidad de piezas de cada tipo que contendrá la caja.

Llamamos “x” al número de piezas del tipo A, “y” al número de piezas del tipo B, “z” al número de piezas del tipo C.

Una caja de Lego contiene un total de 50 piezas de tres tipos diferentes (A, B, C) $\rightarrow$

$$x + y + z = 50$$

La cantidad de piezas del tipo A más la del tipo B es igual a cuatro veces la cantidad del tipo C $\rightarrow x + y = 4z$

Si a las piezas del tipo A le sumamos el doble de las piezas del tipo B y cuatro veces las del tipo C, el total de piezas de la caja sería de 100 $\rightarrow x + 2y + 4z = 100$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 50 \\ x + y = 4z \\ x + 2y + 4z = 100 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 50 - y - z \\ x + y = 4z \\ x + 2y + 4z = 100 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 50 - y - z + y = 4z \\ 50 - y - z + 2y + 4z = 100 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 50 = 5z \rightarrow \boxed{z = 10} \\ y + 3z = 50 \end{array} \right\} \Rightarrow y + 30 = 50 \Rightarrow \boxed{y = 20} \Rightarrow \boxed{x = 50 - 20 - 10 = 20}$$

La caja contiene 20 piezas del tipo A, otras 20 del tipo B y 10 del tipo C.

7. (2 puntos) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real

$$\begin{cases} a^2x - ay = a \\ a^3x - y = 1 \end{cases}$$

- a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .
b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 2$.

a) Este sistema tiene como matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} a^2 & -a \\ a^3 & -1 \end{pmatrix}$ y como matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} a^2 & -a & a \\ a^3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} a^2 & -a \\ a^3 & -1 \end{vmatrix} = -a^2 + a^4 = a^2(-1 + a^2)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2(-1 + a^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ -1 + a^2 = 0 \rightarrow a^2 = 1 \rightarrow a = \sqrt{1} = \pm 1 \end{cases}$$

Estudiamos cuatro situaciones diferentes.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq \pm 1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 2.

El rango de la matriz A/B también es 2.

Rango A = Rango A/B = Número de incógnitas = 2. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $a = 0$

El sistema queda $\begin{cases} 0 = 0 \\ -y = 1 \end{cases}$. Las soluciones del sistema son $x = \lambda$; $y = -1$; $\lambda \in \mathbb{R}$

Este sistema tiene infinitas soluciones (compatible indeterminado)

CASO 3. $a = -1$

El sistema queda $\begin{cases} x + y = -1 \\ -x - y = 1 \end{cases}$. Las dos ecuaciones son la misma. El sistema queda en una

sola ecuación $x + y = -1$. Las soluciones del sistema son $x = -1 - \lambda$; $y = \lambda$; $\lambda \in \mathbb{R}$. Este sistema tiene infinitas soluciones (compatible indeterminado)

CASO 4. $a = 1$

El sistema queda $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$. Las dos ecuaciones son la misma. El sistema queda en una

sola ecuación $x - y = 1$. Las soluciones del sistema son $x = 1 + \lambda$; $y = \lambda$; $\lambda \in \mathbb{R}$. Este sistema tiene infinitas soluciones (compatible indeterminado)

Resumiendo: Si $a \neq 0$ y $a \neq \pm 1$ el sistema es compatible determinado y si $a = 0$, $a = -1$ o $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $a = 2$ el sistema queda $\begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ 8x - y = 1 \end{cases}$ y tiene una única solución. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ 8x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 8x - 1 = y \end{cases} \Rightarrow 4x - 8x + 1 = 1 \Rightarrow -4x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} \Rightarrow \boxed{y = 8 \cdot 0 - 1 = -1}$$

La solución es $x = 0$; $y = -1$.

8. (2 puntos) Un estudio europeo sobre hábitos de uso de internet indica que el 62% de los hombres españoles mayores de 16 años participa en redes sociales y que el 81% lee noticias en internet. Además, el 95% de los hombres de este estudio participa en redes sociales o lee noticias en internet. Eligiendo un hombre español mayor de 16 años al azar, calcule la probabilidad de que:

- Participe en redes sociales y lea noticias en internet.
- No participe en redes sociales, sabiendo que no lee noticias en internet.

Llamamos R al suceso “elegir un hombre español mayor de 16 años que participa en redes sociales” e I al suceso “elegir un hombre español mayor de 16 que lee noticias en internet”.

Por los datos proporcionados sabemos que $P(R) = 0.62$; $P(I) = 0.81$ y $P(R \cup I) = 0.95$.

- Nos piden calcular $P(R \cap I)$. Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(R \cup I) = P(R) + P(I) - P(R \cap I) \Rightarrow 0.95 = 0.62 + 0.81 - P(R \cap I) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(R \cap I) = 0.62 + 0.81 - 0.95 = \boxed{0.48}$$

- Nos piden calcular $P(\bar{R} / \bar{I})$. Es una probabilidad condicionada. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(\bar{R} / \bar{I}) = \frac{P(\bar{R} \cap \bar{I})}{P(\bar{I})} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ley de Morgan} \\ P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) \end{array} \right\} = \frac{P(\overline{R \cup I})}{1 - P(I)} =$$

$$= \frac{1 - P(R \cup I)}{1 - P(I)} = \frac{1 - 0.95}{1 - 0.81} = \boxed{\frac{5}{19} \approx 0.2632}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Si un 95 % de los hombres de este estudio participa en redes sociales o lee noticias en internet entonces el 5 % ni participa en redes sociales ni lee noticias en Internet.

Construimos una tabla de contingencia.

	Participa en redes sociales	No participa en redes sociales	
Lee noticias en Internet			81
No lee noticias en Internet		5	
	62		100

Completamos la tabla

	Participa en redes sociales	No participa en redes sociales	
Lee noticias en Internet	48	33	81
No lee noticias en Internet	14	5	19
	62	38	100

Respondemos a las preguntas planteadas utilizando la regla de Laplace y los datos contenidos en la tabla.

- a) La probabilidad de que participe en redes sociales y lea noticias en internet aparece en la celda cruce de la primera fila y la primera columna de la tabla. Es del 48%.
- b) No leen noticias en Internet el 19 % de los hombres encuestados y son el 5 % los que además, no participa en redes sociales. La probabilidad de que un hombre no participe en redes sociales, sabiendo que no lee noticias en internet es $\frac{5}{19}$.

- 9.** (2 puntos) Se sabe que la proporción de hogares españoles con dos o más ordenadores es $p = 0,75$. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 140$ hogares. Determine:
- El número esperado de hogares que no tendrán dos o más ordenadores en la muestra elegida.
 - La probabilidad de que, en la muestra de 140 hogares, el número de ellos con dos o más ordenadores sea entre 98 y 112 hogares.

Consideramos la variable X que cuenta el número de hogares con dos o más ordenadores de una muestra de 140 hogares.

La probabilidad de que un hogar cuente con dos o más ordenadores es 0.75.

X es una variable binomial de parámetros $n = 140$ y $p = 0.75$. $X = B(140, 0.75)$

- a) La esperanza de X es el producto $n \cdot p$. Este producto vale $n \cdot p = 140 \cdot 0.75 = 105$.
Se espera que de una muestra de 140 hallan 105 hogares con dos o más ordenadores, por lo que se espera que en la muestra hayan $140 - 105 = 35$ hogares que no tengan dos o más ordenadores.

- b) Nos piden calcular $P(98 < X < 112)$. Como el tamaño de la muestra es muy grande aproximamos la binomial X a una normal Y de media $\mu = n \cdot p = 105$ y desviación típica

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{140 \cdot 0.75 \cdot 0.25} = \frac{\sqrt{105}}{2} \approx 5.12. \quad Y = N\left(105, \frac{\sqrt{105}}{2}\right).$$

Esta aproximación es buena pues $n = 140 > 20$; $n \cdot p = 105 > 5$ y $n \cdot q = 140 \cdot 0.25 = 35 > 5$.
Calculamos la probabilidad pedida.

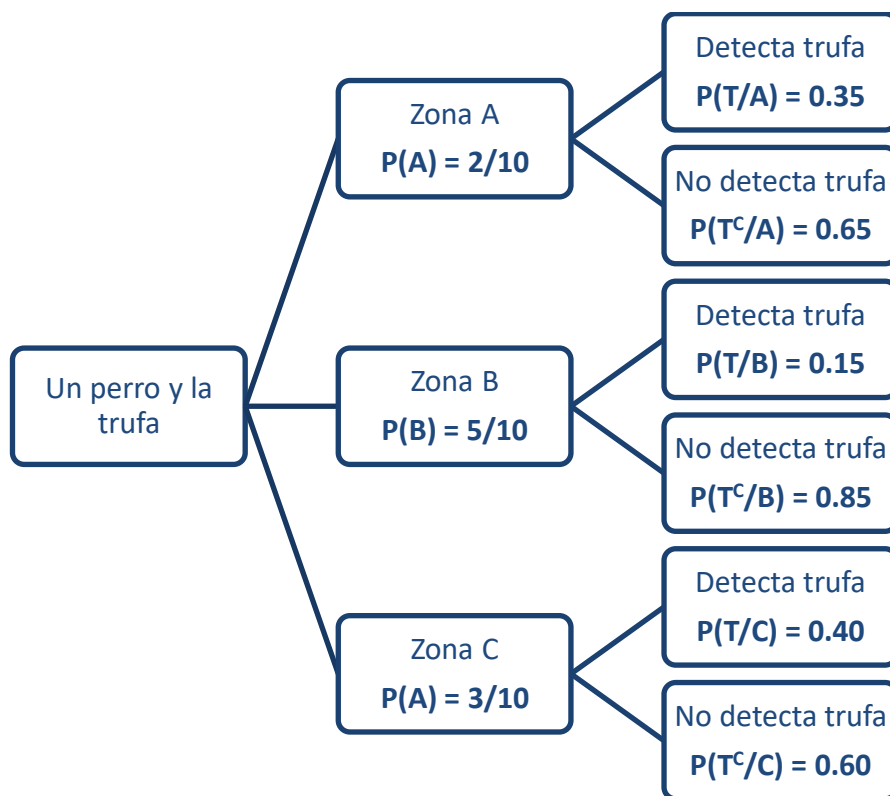
$$\begin{aligned} P(98 < X < 112) &= \{\text{Corrección de Yates}\} = P(98.5 < Y < 111.5) = \left\{ \text{Tipificamos} \right\} = \\ &= P\left(\frac{98.5 - 105}{\sqrt{105}/2} < Z < \frac{111.5 - 105}{\sqrt{105}/2}\right) = P(-1.27 < Z < 1.27) = \\ &= P(Z < 1.27) - P(Z < -1.27) = P(Z < 1.27) - P(Z > 1.27) = \\ &= P(Z < 1.27) - [1 - P(Z < 1.27)] = P(Z < 1.27) - 1 + P(Z < 1.27) = \\ &= 2P(Z < 1.27) - 1 = \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos } P(Z < 1.27) \text{ en la} \\ \text{tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 2 \cdot 0.898 - 1 = 0.796 \end{aligned}$$

En una muestra de 140 hogares la probabilidad de que haya entre 98 y 112 hogares con dos o más ordenadores es de 0.796.

10. (2 puntos) Durante el adiestramiento de un perro para encontrar trufas, se le deja libre una vez al día en una zona de monte apropiada para encontrar este preciado hongo. En cada operación de búsqueda del animal se ha observado que este se dirige siempre hacia una de tres zonas de monte diferentes, denominadas A, B y C. En dos de cada diez operaciones de búsqueda se dirige hacia A, en cinco de cada diez hacia B y el resto hacia C. El perro detecta trufas en A un 35% de las veces, un 15% en B y un 40% en C. Eligiendo al azar un perro en adiestramiento, calcule la probabilidad de que:

- Detecte una trufa en una operación de búsqueda.
- Sabiendo que ha encontrado una trufa, esta haya sido encontrada en la zona B.

Llamamos A, B y C a los sucesos “El perro se dirige a la zona A, B o C” respectivamente. Llamamos T al suceso “El perro detecta trufa”. Realizamos un diagrama de árbol.



- Nos piden hallar $P(T)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(T) = P(A)P(T/A) + P(B)P(T/B) + P(C)P(T/C) =$$

$$= \frac{2}{10} \cdot 0.35 + \frac{5}{10} \cdot 0.15 + \frac{3}{10} \cdot 0.40 = 0.07 + 0.075 + 0.12 = \boxed{0.265}$$

- Nos piden hallar $P(B/T)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/T) = \frac{P(B \cap T)}{P(T)} = \frac{P(B)P(T/B)}{P(T)} = \frac{\frac{5}{10} \cdot 0.15}{0.265} = \frac{15}{53} \approx 0.283$$