



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JULIOL 2017	CONVOCATORIA: JULIO 2017
Assignatura: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	Asignatura: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
BAREMO DEL EXAMEN: Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción. Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.	

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1. Representa gráficamente la región determinada por el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 10 \\ x \leq 20 \\ x \geq \frac{y}{3} \\ 12x + 20y \geq 360 \end{cases}$$

y calcula sus vértices. ¿Cuál es el mínimo de la función $f(x, y) = x - 2y$ en esta región? ¿En qué punto se alcanza?

Problema 2. La evolución del precio de cierta acción, en euros, un día determinado siguió la función:

$$f(x) = 35,7 \frac{x+2}{x^2+21}, \quad x \in [0, 8]$$

donde x representa el tiempo, en horas, transcurrido desde la apertura de la sesión. Se pide:

- Calcular el valor máximo que alcanzó la acción y en qué momento se alcanzó.
- Calcular el valor mínimo que alcanzó la acción y en qué momento se alcanzó.
- Una persona compró 20 acciones en el momento de la apertura ($x = 0$) y las vendió justo al cierre ($x = 8$). Determinar si obtuvo ganancias o pérdidas y la cuantía de estas.

Problema 3. El 70% de los solicitantes de un puesto de trabajo tiene experiencia y, además, una formación acorde con el puesto. Sin embargo, hay un 20% que tiene experiencia y no una formación acorde con el puesto. Se sabe también que entre los solicitantes que tienen formación acorde con el puesto, un 87,5% tiene experiencia.

- ¿Cuál es la probabilidad de que un solicitante elegido al azar no tenga experiencia?
- Si un solicitante elegido al azar tiene experiencia, ¿cuál es la probabilidad de que tenga una formación acorde con el puesto?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un solicitante elegido al azar no tenga formación acorde con el puesto ni experiencia?

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas

Problema 1. Un estudiante obtuvo una calificación de 7,5 puntos en un examen de tres preguntas. En la tercera pregunta obtuvo un punto más que en la segunda y los puntos que consiguió en la primera pregunta quintuplicaron la diferencia entre la puntuación obtenida en la tercera y primera preguntas. ¿Cuál fue la puntuación obtenida en cada una de las preguntas?

Problema 2. Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x - 20 & x \leq 3 \\ \frac{2}{a-x} & x > 3 \end{cases}$

- a) Calcula el valor de a para el que $f(x)$ es continua en $x = 3$.
- b) Para $a = 0$, estudia el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
- c) Para $a = 0$, calcula los máximos y mínimos locales de $f(x)$.

Problema 3. El 60% de los componentes electrónicos producidos en una fábrica proceden de la máquina A y el 40% de la máquina B. La proporción de componentes electrónicos defectuosos en A es 0,1 y en B es 0,05.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que un componente electrónico de dicha fábrica seleccionado al azar sea defectuoso?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que, sabiendo que un componente electrónico no es defectuoso, proceda de la máquina A?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que un componente electrónico de dicha fábrica seleccionado al azar sea defectuoso y proceda de la máquina B?

OPCIÓN A

Problema 1. Representa gráficamente la región determinada por el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 10 \\ x \leq 20 \\ x \geq \frac{y}{3} \\ 12x + 20y \geq 360 \end{cases}$$

y calcula sus vértices. ¿Cuál es el mínimo de la función $f(x, y) = x - 2y$ en esta región? ¿En qué punto se alcanza?

Representamos las rectas que delimitan la región.

$$x = 10$$

$x = 10$	y
10	0
10	10
10	30

$$x = 20$$

$x = 20$	y
20	0
20	20
20	60

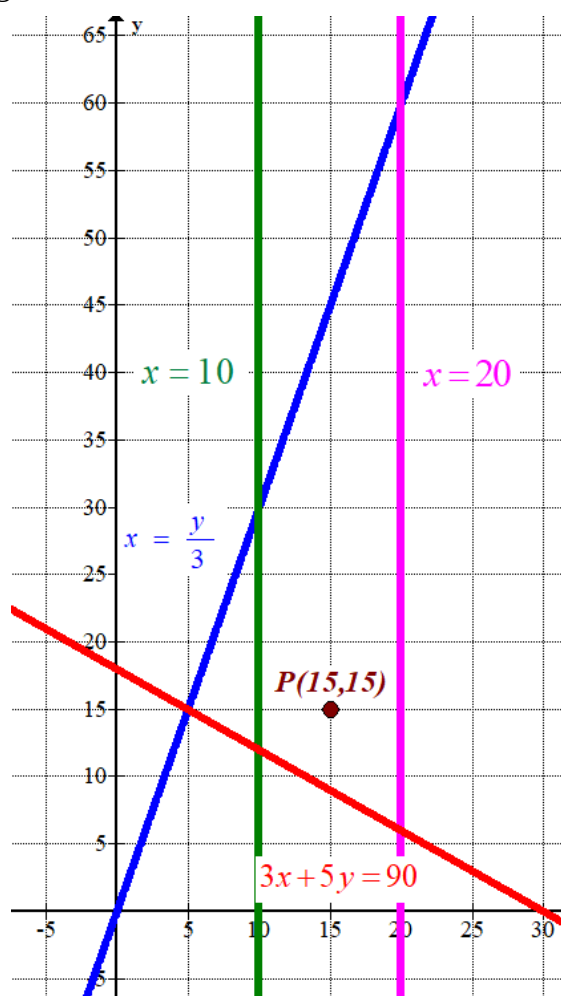
$$x = \frac{y}{3}$$

$$12x + 20y = 360$$

$$3x + 5y = 90$$

x	$y = 3x$
0	0
10	30
20	60

x	$y = \frac{90 - 3x}{5}$
10	10
20	6
30	0

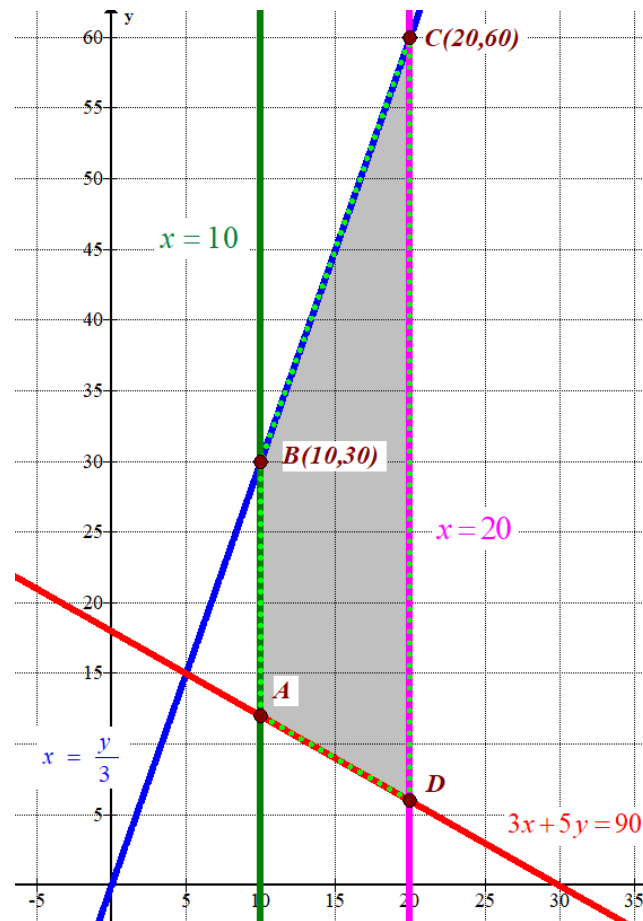


Como las restricciones son $\begin{cases} x \geq 10 \\ x \leq 20 \\ x \geq \frac{y}{3} \\ 12x + 20y \geq 360 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 10 \\ x \leq 20 \\ x \geq \frac{y}{3} \\ 3x + 5y \geq 90 \end{cases}$ la región es la zona del plano

situada entre las dos rectas verticales, por debajo de la recta azul y por encima de la recta roja. Comprobamos que el punto $P(15, 15)$ perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\begin{cases} 15 \geq 10 \\ 15 \leq 20 \\ 15 \geq \frac{15}{3} \\ 12 \cdot 15 + 20 \cdot 15 \geq 360 \end{cases} \quad \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos la región en el siguiente dibujo e indicamos sus vértices.



Determinamos las coordenadas de los vértices A y D.

$$A \rightarrow \begin{cases} x=10 \\ 3x+5y=90 \end{cases} \Rightarrow 30+5y=90 \Rightarrow 5y=60 \Rightarrow y=\frac{60}{5}=12 \Rightarrow A(10,12)$$

$$B \rightarrow \begin{cases} x=20 \\ 3x+5y=90 \end{cases} \Rightarrow 60+5y=90 \Rightarrow 5y=30 \Rightarrow y=\frac{30}{5}=6 \Rightarrow D(20,6)$$

Valoramos la función $f(x,y) = x - 2y$ en cada uno de sus vértices en busca del valor mínimo.

$$A(10, 12) \rightarrow f(10,12) = 10 - 2 \cdot 12 = -14$$

$$B(10, 30) \rightarrow f(10,30) = 10 - 2 \cdot 30 = -50$$

$$C(20, 60) \rightarrow f(20,60) = 20 - 2 \cdot 60 = -100 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$D(20, 6) \rightarrow f(20,6) = 20 - 2 \cdot 6 = 8$$

El valor mínimo que alcanza la función en la región es -100 y lo alcanza en el punto $C(20, 60)$.

Problema 2. La evolución del precio de cierta acción, en euros, un día determinado siguió la función:

$$f(x) = 35,7 \frac{x+2}{x^2+21}, \quad x \in [0,8]$$

donde x representa el tiempo, en horas, transcurrido desde la apertura de la sesión. Se pide:

- Calcular el valor máximo que alcanzó la acción y en qué momento se alcanzó.
- Calcular el valor mínimo que alcanzó la acción y en qué momento se alcanzó.
- Una persona compró 20 acciones en el momento de la apertura ($x = 0$) y las vendió justo al cierre ($x = 8$). Determinar si obtuvo ganancias o pérdidas y la cuantía de estas.

a) Derivamos la función y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$f(x) = 35,7 \frac{x+2}{x^2+21} \Rightarrow f'(x) = 35,7 \frac{1 \cdot (x^2+21) - (2x)(x+2)}{(x^2+21)^2} = 35,7 \frac{x^2+21-2x^2-4x}{(x^2+21)^2}$$

$$f'(x) = 35,7 \frac{-x^2-4x+21}{(x^2+21)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 35,7 \frac{-x^2-4x+21}{(x^2+21)^2} = 0 \Rightarrow -x^2-4x+21 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(-1)(21)}}{2(-1)} = \frac{4 \pm 10}{-2} = \begin{cases} \frac{4+10}{-2} = -7 \notin [0,8] \\ \frac{4-10}{-2} = 3 \in [0,8] \end{cases}$$

Determinamos la evolución del signo de la derivada antes y después de $x = 3$.

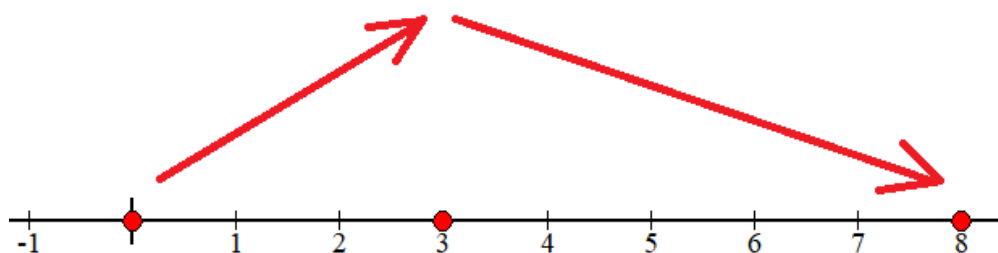
- En el intervalo $[0,3)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale

$$f'(1) = 35,7 \frac{-1^2-4 \cdot 1+21}{(1^2+21)^2} = 1.18 > 0. \text{ La función crece en } [0,3).$$

- En el intervalo $(3,8]$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale

$$f'(4) = 35,7 \frac{-4^2-4 \cdot 4+21}{(4^2+21)^2} = -0.28 < 0. \text{ La función decrece en } (3,8].$$

La función sigue el esquema siguiente.



La función presenta un máximo relativo en $x = 3$. Como $f(3) = 35,7 \frac{3+2}{3^2+21} = 5.95$ podemos decir que la acción consigue un precio máximo de 5.95 € al cabo de 3 horas de apertura de la sesión del día.

- b) A partir del estudio realizado en el apartado anterior podemos apreciar que el valor mínimo de la función se alcanza en uno de los extremos del intervalo de definición $[0,8]$. Valoramos la función en cada uno de los extremos y determinamos el valor mínimo.

$$f(0) = 35,7 \frac{0+2}{0^2+21} = 3.4$$

$$f(8) = 35,7 \frac{8+2}{8^2+21} = 4.2$$

El precio mínimo de la acción es de 3.4 € y se alcanza al inicio de la sesión ($x = 0$).

- c) Si se compran las acciones al inicio de la sesión su precio será de 3.4 € por acción. Esto hace un gasto total de $20 \cdot 3.4 = 68$ €. Si vende las 20 acciones al final de la sesión cuando su precio era de 4.2 € por acción lo que recibe es un total de $20 \cdot 4.2 = 84$ €, al venderlas más caras de lo que la compró se obtienen ganancias. Estas ganancias son de $84 - 68 = 16$ €.

Problema 3. El 70% de los solicitantes de un puesto de trabajo tiene experiencia y, además, una formación acorde con el puesto. Sin embargo, hay un 20% que tiene experiencia y no una formación acorde con el puesto. Se sabe también que entre los solicitantes que tienen formación acorde con el puesto, un 87,5% tiene experiencia.

- ¿Cuál es la probabilidad de que un solicitante elegido al azar no tenga experiencia?
- Si un solicitante elegido al azar tiene experiencia, ¿cuál es la probabilidad de que tenga una formación acorde con el puesto?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un solicitante elegido al azar no tenga formación acorde con el puesto ni experiencia?

Si se sabe que entre los solicitantes que tienen formación acorde con el puesto (x), un 87,5% tiene experiencia y estos son el 70 % $\rightarrow 87.5 \cdot x = 70 \Rightarrow x = \frac{70}{87.5} = 0.8$.

Esto significa que el 80 % de los solicitantes tienen formación acorde con el puesto. Realizamos una tabla de contingencia con los datos proporcionados y obtenemos el resto de información.

	Formación acorde con el puesto (F)	Formación no acorde con el puesto ($\bar{F}$)	
Tiene experiencia (X)	70	20	
No tiene experiencia ($\bar{X}$)			
	80		100

Completamos la tabla.

	Formación acorde con el puesto (F)	Formación no acorde con el puesto ($\bar{F}$)	
Tiene experiencia (X)	70	20	90
No tiene experiencia ($\bar{X}$)	10	0	10
	80	20	100

Respondemos a lo planteado en el problema.

- En la tabla se observa que hay un 10 % de solicitantes sin experiencia. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad pedida es 0.10.
- En la tabla observamos la primera fila y vemos que hay 90 solicitantes con experiencia, de los cuales 70 tienen formación acorde con el puesto. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(F / X) = \frac{70}{90} = \frac{7}{9} \approx 0.778$$

- En la tabla observamos que hay un 0 % de solicitantes sin experiencia ni formación acorde con el puesto, Por lo que la probabilidad pedida es 0.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Utilizamos las fórmulas de la probabilidad.

Sabemos que $P(X \cap F) = 0.70$, $P(X \cap \bar{F}) = 0.20$.

Como entre los solicitantes que tienen formación acorde con el puesto, un 87,5% tiene experiencia entonces:

$$P(X/F) = 0.875 \Rightarrow \frac{P(X \cap F)}{P(F)} = 0.875 \Rightarrow P(F) = \frac{P(X \cap F)}{0.875} = \frac{0.7}{0.875} = 0.80$$

a) Nos piden calcular $P(\bar{X})$.

$$P(\bar{X}) = 1 - P(X) = 1 - [P(X \cap F) + P(X \cap \bar{F})] = 1 - [0.70 + 0.20] = 0.10$$

b) Nos piden calcular $P(F/X)$.

$$P(F/X) = \frac{P(F \cap X)}{P(X)} = \frac{P(F \cap X)}{1 - P(\bar{X})} = \frac{0.70}{1 - 0.10} = \frac{7}{9} \approx 0.778$$

c) Nos piden calcular $P(\bar{F} \cap \bar{X})$.

$$P(\bar{F} \cap \bar{X}) = P(\overline{F \cup X}) = 1 - P(F \cup X) = 1 - [P(F) + P(X) - P(F \cap X)] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} P(F) = 0.80 \\ P(X) = 1 - P(\bar{X}) = 1 - 0.1 = 0.9 \\ P(X \cap F) = 0.70 \end{array} \right\} = 1 - [0.80 + 0.90 - 0.7] = 0$$

OPCIÓN B

Problema 1. Un estudiante obtuvo una calificación de 7,5 puntos en un examen de tres preguntas. En la tercera pregunta obtuvo un punto más que en la segunda y los puntos que consiguió en la primera pregunta quintuplicaron la diferencia entre la puntuación obtenida en la tercera y primera preguntas. ¿Cuál fue la puntuación obtenida en cada una de las preguntas?

Llamamos x, y, z a la puntuación obtenida en la primera, segunda y tercera pregunta.

“Un estudiante obtuvo una calificación de 7,5 puntos en un examen de tres preguntas” $\rightarrow x + y + z = 7.5$

“En la tercera pregunta obtuvo un punto más que en la segunda” $\rightarrow z = y + 1$

“Los puntos que consiguió en la primera pregunta quintuplicaron la diferencia entre la puntuación obtenida en la tercera y primera preguntas” $\rightarrow x = 5(z - x)$

Reunimos estas ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 7.5 \\ z = y + 1 \\ x = 5(z - x) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + y + 1 = 7.5 \\ x = 5(y + 1 - x) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y = 6.5 \\ x = 5y + 5 - 5x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 6.5 - 2y \\ 6x = 5y + 5 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6(6.5 - 2y) = 5y + 5 \Rightarrow 39 - 12y = 5y + 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 34 = 17y \Rightarrow \boxed{y = \frac{34}{17} = 2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x = 6.5 - 2 \cdot 2 = 2.5} \\ \boxed{z = 2 + 1 = 3} \end{array} \right.$$

Obtuvo 2.5 puntos en la primera pregunta, 2 puntos en la segunda y 3 en la tercera.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 7.5 \\ z = y + 1 \rightarrow -y + z = 1 \\ x = 5(z - x) \rightarrow x = 5z - 5x \rightarrow 6x - 5z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 7.5 \\ -y + z = 1 \\ 6x - 5z = 0 \end{array} \right\}$$

Con el método de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7.5 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{37.5 + 5}{5 + 6 + 6} = \frac{42.5}{17} = 2.5$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7.5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-5 + 45 - 6}{17} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7.5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{6 + 45}{17} = \frac{51}{17} = 3$$

Problema 2. Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x - 20 & x \leq 3 \\ \frac{2}{a-x} & x > 3 \end{cases}$

- a) Calcula el valor de a para el que $f(x)$ es continua en $x = 3$.
 b) Para $a = 0$, estudia el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
 c) Para $a = 0$, calcula los máximos y mínimos locales de $f(x)$.

a) Para que la función sea continua en $x = 3$ debe cumplirse:

- Existe $f(3) \rightarrow f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3 - 20 = -2$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x^3 - 3x - 20 = -2$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2}{a-x} = \frac{2}{a-3}$
- Los tres valores son iguales $\rightarrow -2 = \frac{2}{a-3} \rightarrow a-3 = \frac{2}{-2} = -1 \Rightarrow a = -1+3 = 2$

El valor buscado es $a = 2$.

b) Para $a = 0$ la función queda $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x - 20 & x \leq 3 \\ \frac{2}{-x} & x > 3 \end{cases}$. Estudiamos el signo de la derivada.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & x < 3 \\ \frac{0 - 2(-1)}{(-x)^2} = \frac{2}{x^2} & x > 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1 & x < 3 \\ \frac{2}{x^2} = 0 \rightarrow 2 = 0 \rightarrow \text{¡Imposible!} & x > 3 \end{cases}$$

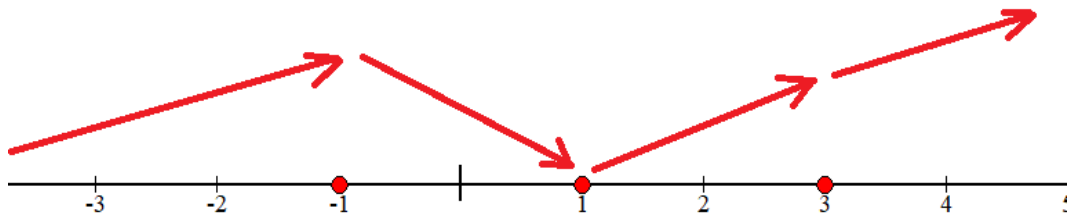
En el intervalo $(-\infty, 3)$ estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = -1$ y $x = 1$.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 3 = 9 > 0$. La función crece en $(-\infty, -1)$.
- En el intervalo $(-1, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 3 = -3 < 0$. La función decrece en $(-1, 1)$.
- En el intervalo $(1, 3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 9 > 0$. La función crece en $(1, 3)$.

En el intervalo $(3, +\infty)$ la derivada es $f'(x) = \frac{2}{x^2}$ que siempre es positiva. La función crece en $(3, +\infty)$.

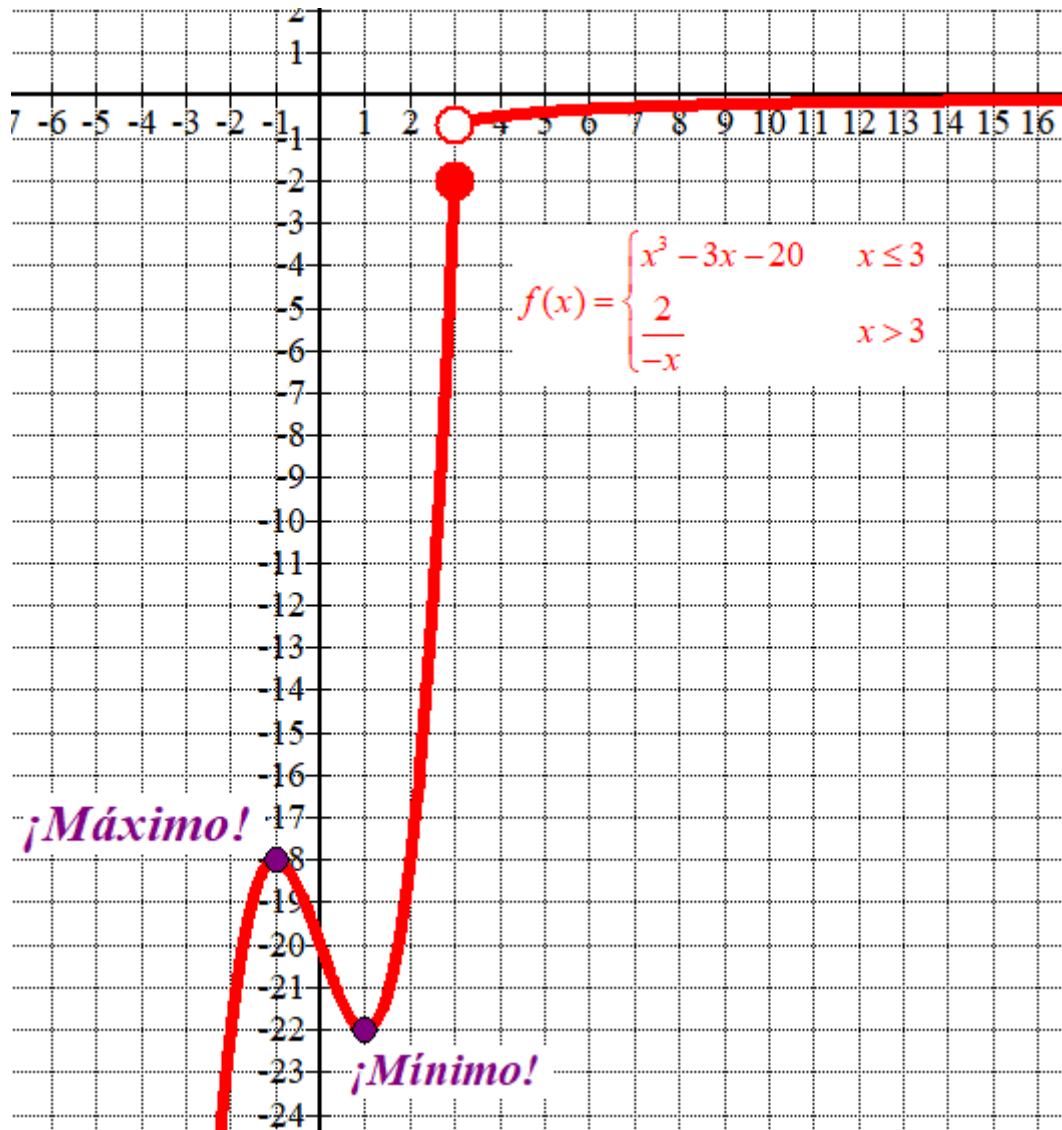
Resumiendo: La función crece en $(-\infty, -1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$ y decrece en $(-1, 1)$.

c) Para $a = 0$ la función queda $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x - 20 & x \leq 3 \\ \frac{2}{-x} & x > 3 \end{cases}$. Hemos visto en el apartado anterior que la función sigue el esquema siguiente.



La función presenta un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 1$.

Como $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) - 20 = -18$ y $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 - 20 = -22$ el máximo relativo tiene coordenadas $(-1, -18)$ y el mínimo relativo tiene coordenadas $(1, -22)$.

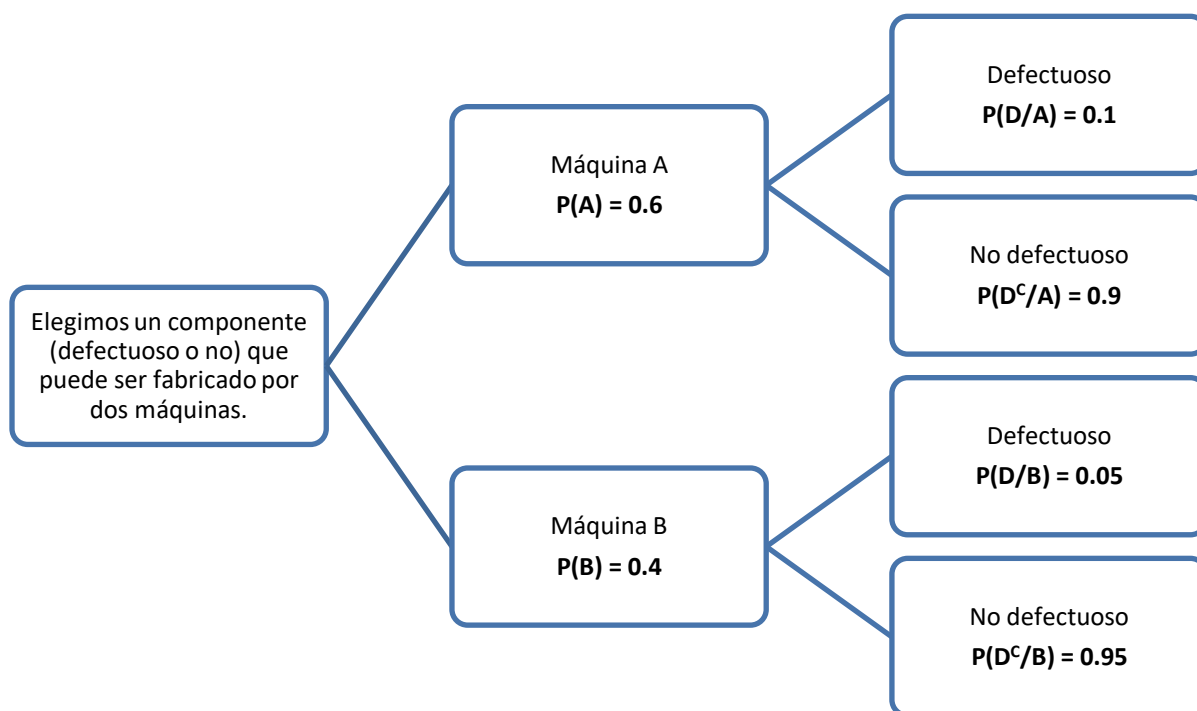


Problema 3. El 60% de los componentes electrónicos producidos en una fábrica proceden de la máquina A y el 40% de la máquina B. La proporción de componentes electrónicos defectuosos en A es 0,1 y en B es 0,05.

- ¿Cuál es la probabilidad de que un componente electrónico de dicha fábrica seleccionado al azar sea defectuoso?
- ¿Cuál es la probabilidad de que, sabiendo que un componente electrónico no es defectuoso, proceda de la máquina A?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un componente electrónico de dicha fábrica seleccionado al azar sea defectuoso y proceda de la máquina B?

Llamamos A al suceso “el componente electrónico procede de la máquina A”, B al suceso “el componente electrónico procede de la máquina B” y D al suceso “el componente electrónico es defectuoso”.

Realizamos un diagrama de árbol.



- Nos piden calcular $P(D)$. Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) = 0.6 \cdot 0.1 + 0.4 \cdot 0.05 = 0.08$$

- Nos piden calcular $P(A/D^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D^c) = \frac{P(A \cap D^c)}{P(D^c)} = \frac{P(A)P(A/D^c)}{1 - P(D)} = \frac{0.6 \cdot 0.9}{1 - 0.08} = \frac{27}{46} \approx 0.587$$

- Nos piden calcular $P(D \cap B)$.

$$P(D \cap B) = P(B)P(D/B) = 0.4 \cdot 0.05 = 0.02$$