



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: EXEMPLE EXAMEN 2024	CONVOCATORIA: EJEMPLO EXAMEN 2024
Assignatura: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	Asignatura: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. II

BAREMO DEL EXAMEN: Se han de contestar tres problemas de entre los seis propuestos. Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1. Consideremos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

- Hallar la inversa de la matriz A . (2 puntos)
- Hallar la matriz X que satisface la ecuación $AX = B$. (2 puntos)
- Hallar la matriz Y que satisface la ecuación $Y^T A = B$, donde Y^T representa la matriz traspuesta de Y . (3 puntos)
- Hallar la matriz Z que satisface la ecuación $AZA = B$. (3 puntos)

Problema 2. Una empresa de alquiler de coches dispone de tres modelos de coche para alquilar. El más barato se alquila por 15 euros al día; el modelo intermedio, por 25; y el más caro, por 40. La flota consta de un total de 100 coches. Sabemos que si un día la empresa alquila todos sus coches sus ingresos serán de 2 225 euros. Sabemos también que un día que la empresa alquiló la mitad de los coches más baratos, la quinta parte de los intermedios y solo uno de los más caros sus ingresos fueron de 590 euros. ¿Cuántos coches de cada modelo tiene la empresa?

(Planteamiento correcto 5 puntos --- Resolución correcta 5 puntos)

Problema 3. Se considera la función $f(x) = \frac{4x^2 + 11x - 20}{(x-2)^2}$. Se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- d) Los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)
- e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

Problema 4. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3, & \text{si } 0 \leq x \leq 3, \\ -x^2 + 10x - 15, & \text{si } 3 < x \leq 6, \\ x + 4, & \text{si } 6 < x \leq 10. \end{cases}$$

Se pide:

- a) Estudiar la continuidad de la función $f(x)$ en el intervalo $[0,10]$. (3 puntos)
- b) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ en el intervalo $[0,10]$. (3 puntos)
- c) Calcular el área de la región delimitada por la función $f(x)$, la recta de ecuación $x = 4$, la recta de ecuación $x = 6$ y el eje OX . (4 puntos)

Problema 5. Una urna contiene tres bolas rojas y dos negras, que se van extrayendo de una en una, sin reposición. Calcula:

- a) La probabilidad de que las dos primeras bolas extraídas sean del mismo color. (3 puntos)
- b) La probabilidad de que las dos primeras bolas extraídas sean negras, sabiendo que la tercera es roja. (4 puntos)
- c) La probabilidad de que al extraer las cinco bolas cada una sea de color distinto a la extraída anteriormente. (3 puntos)

Problema 6. La colibacilosis es una enfermedad que afecta a los loros. En un centro veterinario, se estima en un 40% la proporción de loros portadores de la enfermedad. Se realiza un test diagnóstico de la enfermedad entre los loros del centro veterinario. Cuando un loro es portador de la enfermedad, el test da positivo en el 90% de los casos. Si el loro no es portador de la enfermedad, el test da negativo en el 85% de los casos. Se escoge un loro al azar del centro veterinario. Calcula:

- a) La probabilidad de que el loro sea portador de la enfermedad y su test dé positivo. (3 puntos)
- b) La probabilidad de que el test dé positivo. (3 puntos)
- c) La probabilidad de que el loro sea portador de la enfermedad, si sabemos que ha dado negativo en el test. (4 puntos)

Soluciones

Problema 1. Consideremos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

- a) Hallar la inversa de la matriz A. (2 puntos)
- b) Hallar la matriz X que satisface la ecuación $AX = B$. (2 puntos)
- c) Hallar la matriz Y que satisface la ecuación $Y^T A = B$, donde Y^T representa la matriz traspuesta de Y. (3 puntos)
- d) Hallar la matriz Z que satisface la ecuación $AZA = B$. (3 puntos)

a) Hallamos el determinante de A, comprobamos que no es nulo y determinamos su inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 - 1 + 1 - 0 - 0 = 1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Despejamos la matriz X de la ecuación matricial utilizando la inversa de la matriz A.

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1+2 & 0+0+3 & -1+0+2 \\ -2+2-2 & 0+0-3 & 1+0-2 \\ 0-1+2 & 0+0+3 & 0+0+2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Despejamos la matriz Y^T de la ecuación matricial utilizando la inversa de la matriz A.

$$Y^T A = B \Rightarrow Y^T = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0+0 & -2+0+1 & 2+0-1 \\ 1+0+0 & -1+0+0 & 1+0+0 \\ 2-3+0 & -2+6-2 & 2-3+2 \end{pmatrix}$$

$$Y^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Despejamos la matriz Z de la ecuación matricial utilizando la inversa de la matriz A .

$$AZA = B \Rightarrow Z = A^{-1}BA^{-1} = XA^{-1}$$

$$Z = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-3+0 & -3+6-1 & 3-3+1 \\ -2+3+0 & 2-6+1 & -2+3-1 \\ 1-3+0 & -1+6-2 & 1-3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 2. Una empresa de alquiler de coches dispone de tres modelos de coche para alquilar. El más barato se alquila por 15 euros al día; el modelo intermedio, por 25; y el más caro, por 40. La flota consta de un total de 100 coches. Sabemos que si un día la empresa alquila todos sus coches sus ingresos serán de 2 225 euros. Sabemos también que un día que la empresa alquiló la mitad de los coches más baratos, la quinta parte de los intermedios y solo uno de los más caros sus ingresos fueron de 590 euros. ¿Cuántos coches de cada modelo tiene la empresa?

(Planteamiento correcto 5 puntos --- Resolución correcta 5 puntos)

Llamamos “x” al número de coches del modelo barato, “y” al número de coches del modelo intermedio y “z” al número de coches del modelo caro.

“La flota consta de un total de 100 coches” $\rightarrow x + y + z = 100$

“Si un día la empresa alquila todos sus coches sus ingresos serán de 2 225 euros” $\rightarrow 15x + 25y + 40z = 2225 \Rightarrow 3x + 5y + 8z = 445$.

“Un día que la empresa alquiló la mitad de los coches más baratos, la quinta parte de los intermedios y solo uno de los más caros sus ingresos fueron de 590 euros” $\rightarrow$

$$15 \frac{x}{2} + 25 \frac{y}{5} + 40 = 590 \Rightarrow 15 \frac{x}{2} + 5y = 550 \Rightarrow \frac{3x}{2} + y = 110.$$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ 3x + 5y + 8z = 445 \\ \frac{3x}{2} + y = 110 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ 3x + 5y + 8z = 445 \\ 3x + 2y = 220 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^a - \text{Ecuación 2}^a \\ 3x + 2y = 220 \\ -3x - 5y - 8z = -445 \\ \hline -3y - 8z = -225 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3}^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^a - 3 \cdot \text{Ecuación 2}^a \\ 3x + 5y + 8z = 445 \\ -3x - 3y - 3z = -300 \\ \hline 2y + 5z = 145 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ 2y + 5z = 145 \\ -3y - 8z = -225 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Ecuación 3}^a + 3 \cdot \text{Ecuación 2}^a \\ -6y - 16z = -450 \\ 6y + 15z = 435 \\ \hline -z = -15 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ 2y + 5z = 145 \\ -z = -15 \rightarrow \boxed{z = 15} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + 15 = 100 \\ 2y + 75 = 145 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 85 \\ 2y = 70 \rightarrow y = \frac{70}{2} = 35 \end{array} \right\} \Rightarrow x + 35 = 85 \Rightarrow \boxed{x = 50}$$

La empresa tiene 50 coches baratos, 35 intermedios y 15 caros.

Problema 3. Se considera la función $f(x) = \frac{4x^2 + 11x - 20}{(x-2)^2}$. Se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)
- d) Los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)
- e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{2\}$.

Hallamos los puntos de corte con los ejes coordenados.

Puntos de corte con el eje de abscisas ($y = 0$) $\rightarrow$

$$0 = \frac{4x^2 + 11x - 20}{(x-2)^2} \Rightarrow 4x^2 + 11x - 20 = 0 \Rightarrow x = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4(4)(-20)}}{2(4)} =$$

$$= \begin{cases} \frac{-11+21}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1.25 \\ \frac{-11-21}{8} = \frac{-32}{8} = -4 \end{cases}$$

Con el eje de abscisas los puntos de corte son A(1.25, 0) y B(-4, 0).

Punto de corte con el eje de ordenadas ($x = 0$) $\rightarrow f(0) = \frac{4 \cdot 0^2 + 11 \cdot 0 - 20}{(0-2)^2} = \frac{-20}{4} = -5.$

Con el eje de ordenadas el punto de corte es C(0, -5).

b) **Asíntotas verticales.** $x = a$

¿ $x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 + 11x - 20}{(x-2)^2} = \frac{4 \cdot 2^2 + 11 \cdot 2 - 20}{(2-2)^2} = \frac{18}{0} = \infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 11x - 20}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{x^2} = 4$$

$y = 4$ es asíntota horizontal.

c) Buscamos los puntos críticos de la función averiguando cuando se anula la derivada.

$$f(x) = \frac{4x^2 + 11x - 20}{(x-2)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(8x+11)(x-2)^2 - 2(x-2)(4x^2 + 11x - 20)}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{(8x+11)(x-2) - 2(4x^2+11x-20)}{(x-2)^3} = \frac{\cancel{8x^2} - 16x + 11x - 22 - \cancel{8x^2} - 22x + 40}{(x-2)^3}$$

$$f'(x) = \frac{-27x+18}{(x-2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-27x+18}{(x-2)^3} = 0 \Rightarrow -27x+18 = 0 \Rightarrow x = \frac{18}{27} = \frac{2}{3} \approx 0.66$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = \frac{2}{3}$ (punto crítico) y $x = 2$ (excluido del dominio).

- En el intervalo $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{0+18}{(0-2)^3} = \frac{18}{-8} < 0$.

La función decrece en $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$.

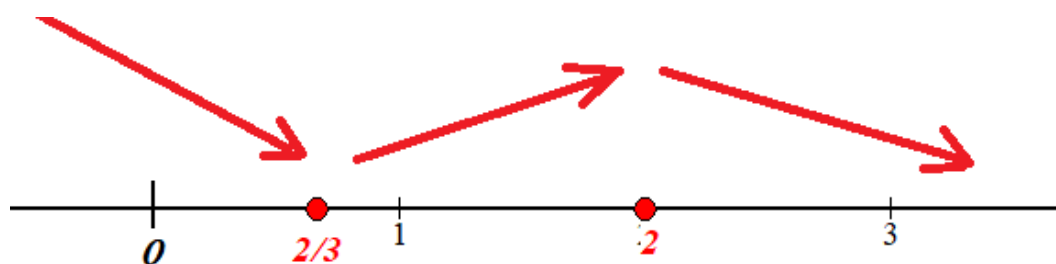
- En el intervalo $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{-27+18}{(1-2)^3} = 9 > 0$. La

función crece en $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$.

- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale

$$f'(3) = \frac{-27 \cdot 3 + 18}{(3-2)^3} = -63 < 0. \text{ La función decrece en } (2, +\infty).$$

d) Por lo estudiado en el apartado anterior la función sigue el esquema siguiente.



La función presenta un mínimo relativo en $x = \frac{2}{3}$.

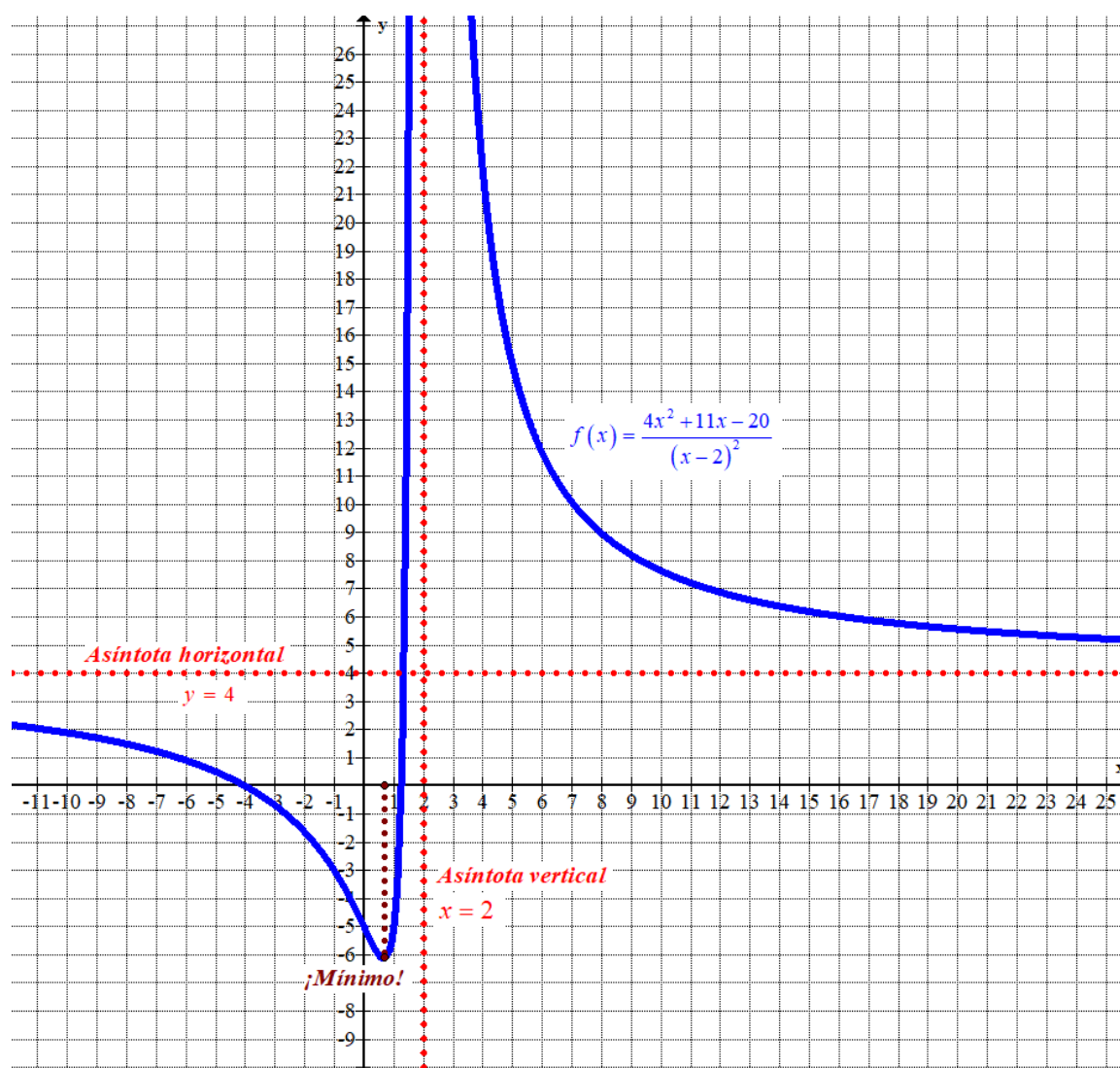
$$\text{Como } f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 11\left(\frac{2}{3}\right) - 20}{\left(\frac{2}{3} - 2\right)^2} = \frac{-49}{8} = -6.125 \text{ las coordenadas del mínimo relativo}$$

$$\text{son } \left(\frac{2}{3}, -6.125\right).$$

La función no tiene máximo relativo pues $x = 2$ no pertenece al dominio de la función.

- e) Añadimos a la información obtenida sobre la gráfica de la función una tabla de valores y representamos su gráfica.

x	$y = \frac{4x^2 + 11x - 20}{(x-2)^2}$
-4	0
1.25	0
0	-5
$2/3$	-6.125
1	-5
3	79
12	6.88



Problema 4. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3, & \text{si } 0 \leq x \leq 3, \\ -x^2 + 10x - 15, & \text{si } 3 < x \leq 6, \\ x + 4, & \text{si } 6 < x \leq 10. \end{cases}$$

Se pide:

- a) Estudiar la continuidad de la función $f(x)$ en el intervalo $[0,10]$. (3 puntos)
 b) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ en el intervalo $[0,10]$. (3 puntos)
 c) Calcular el área de la región delimitada por la función $f(x)$, la recta de ecuación $x = 4$, la recta de ecuación $x = 6$ y el eje OX . (4 puntos)

- a) La función en los intervalos $[0,3]$; $(3,6)$ y $(6,10]$ está definida con funciones polinómicas, por lo que es continua.

Estudiamos la continuidad en los cambios de definición: $x = 3$ y $x = 6$.

En $x = 3$ tenemos:

- Existe $f(3) = 3^2 - 6 + 3 = 6$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 - 2x + 3 = 6$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} -x^2 + 10x - 15 = -3^2 + 30 - 15 = 6$.
- Los tres valores son iguales: $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3) = 6$.

La función es continua en $x = 3$.

En $x = 6$ tenemos:

- Existe $f(6) = -6^2 + 60 - 15 = 9$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^-} -x^2 + 10x - 15 = 9$.
- Existe $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} x + 4 = 6 + 4 = 10$.
- Los tres valores **no** son iguales: $f(6) = \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = 9 \neq 10 = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$.

La función no es continua en $x = 6$.

La función es continua en $\mathbb{R} - \{6\}$

- b) Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2, & \text{si } 0 \leq x < 3, \\ -2x + 10, & \text{si } 3 < x < 6, \\ 1, & \text{si } 6 < x \leq 10. \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1 & \text{si } 0 \leq x < 3, \\ -2x + 10 = 0 \rightarrow 2x = 10 \rightarrow x = \frac{10}{2} = 5 & \text{si } 3 < x < 6, \\ 1 = 0 \rightarrow \text{¡Im posible!} & \text{si } 6 < x \leq 10. \end{cases}$$

En el intervalo $[0,3)$ la derivada se anula en $x = 1$. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

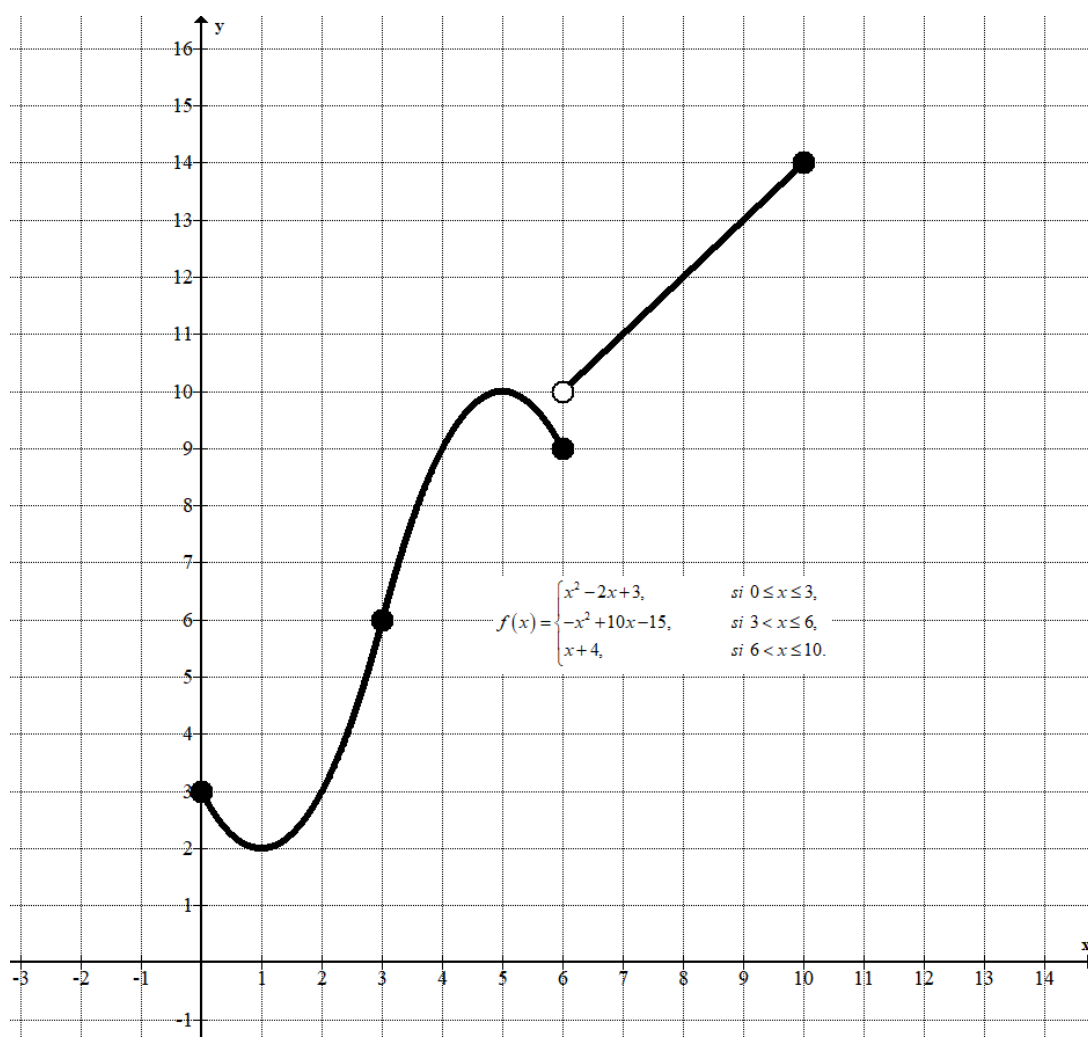
- En el intervalo $[0,1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5) = 2 \cdot 0.5 - 2 = -1 < 0$. La función decrece en $[0,1)$.
- En el intervalo $(1,3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 2 \cdot 2 - 2 = 2 > 0$. La función crece en $(1,3)$.

En el intervalo $(3,6)$ la derivada se anula en $x = 5$. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $(3,5)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $f'(4) = -2 \cdot 4 + 10 = 2 > 0$. La función crece en $(3,5)$.
- En el intervalo $(5,6)$ tomamos $x = 5.5$ y la derivada vale $f'(5.5) = -2 \cdot 5.5 + 10 = -1 < 0$. La función decrece en $(5,6)$.

En el intervalo $(6,10)$ la derivada es $f'(x) = 1$. La derivada es siempre positiva y la función crece en $(6,10)$.

Resumiendo: La función crece en $(1,5) \cup (6,10]$ y decrece en $[0,1) \cup (5,6)$.



- c) En el intervalo $(4, 6)$ la función tiene la expresión $f(x) = -x^2 + 10x - 15$.
Comprobamos si la función corta el eje OX en el intervalo $(4, 6)$.

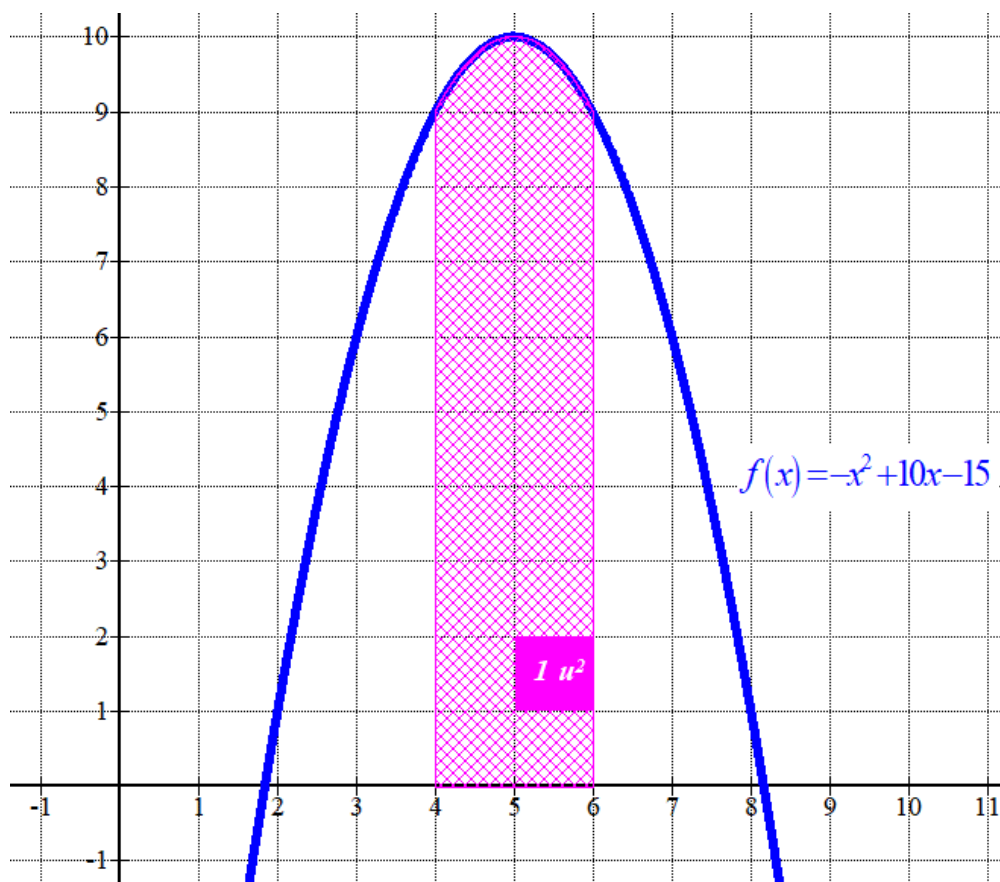
$$-x^2 + 10x - 15 = 0 \Rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4(-1)(-15)}}{2(-1)}$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{40}}{-2} = \begin{cases} \frac{-10 + \sqrt{40}}{-2} \approx 1.83 \notin (4, 6) \\ \frac{-10 - \sqrt{40}}{-2} \approx 8.16 \notin (4, 6) \end{cases}$$

La función no corta en eje OX en el intervalo (4, 6) por lo que el área de la región delimitada por la función $f(x)$, la recta de ecuación $x = 4$, la recta de ecuación $x = 6$ y el eje OX es el valor absoluto de la integral definida entre 4 y 6 de la función.

$$\begin{aligned} \int_4^6 f(x) dx &= \int_4^6 -x^2 + 10x - 15 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 5x^2 - 15x \right]_4^6 = \\ &= \left[-\frac{6^3}{3} + 5 \cdot 6^2 - 15 \cdot 6 \right] - \left[-\frac{4^3}{3} + 5 \cdot 4^2 - 15 \cdot 4 \right] = \\ &= -72 + 180 - 90 + \frac{64}{3} - 80 + 60 = \frac{58}{3} \approx 19.33 \end{aligned}$$

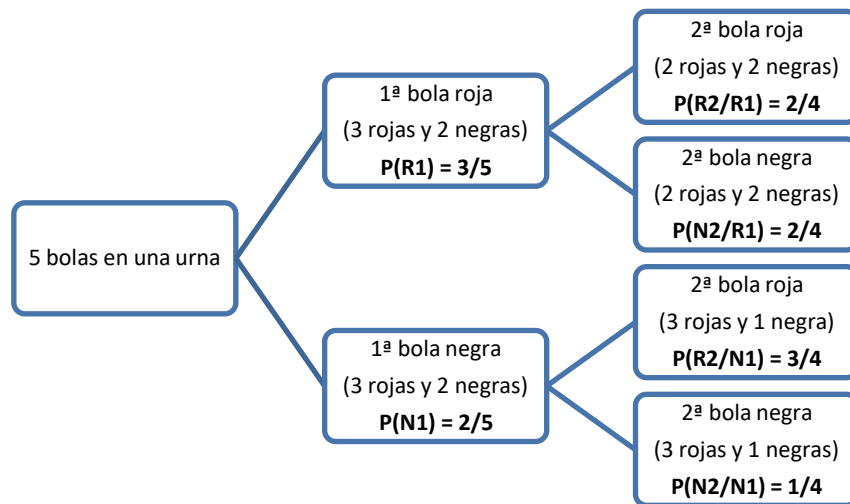
El área pedida tiene un valor de $\frac{58}{3} \approx 19.33 u^2$.



Problema 5. Una urna contiene tres bolas rojas y dos negras, que se van extrayendo de una en una, sin reposición. Calcula:

- a) La probabilidad de que las dos primeras bolas extraídas sean del mismo color. (3 puntos)
 b) La probabilidad de que las dos primeras bolas extraídas sean negras, sabiendo que la tercera es roja. (4 puntos)
 c) La probabilidad de que al extraer las cinco bolas cada una sea de color distinto a la extraída anteriormente. (3 puntos)

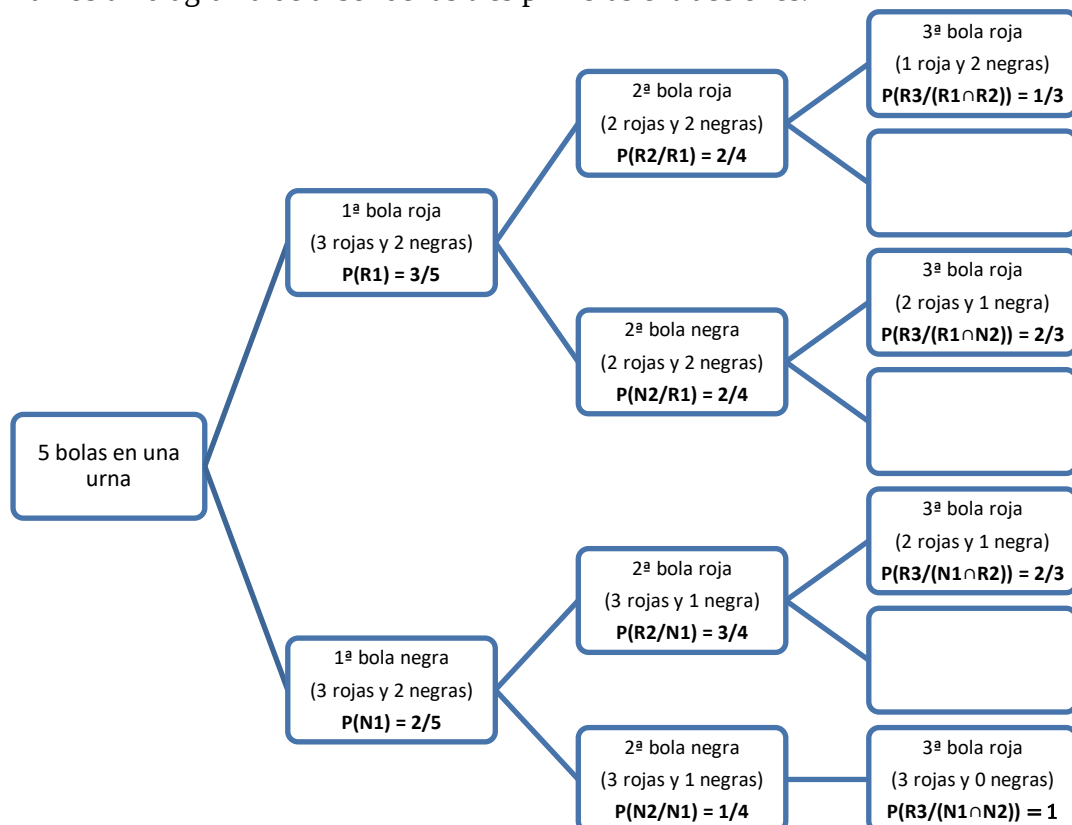
a) Realizamos un diagrama de árbol de las dos primeras extracciones.



Nos piden calcular $P((N_1 \cap N_2) \cup (R_1 \cap R_2))$.

$$P((N_1 \cap N_2) \cup (R_1 \cap R_2)) = P(N_1 \cap N_2) + P(R_1 \cap R_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0.4$$

b) Realizamos un diagrama de árbol de las tres primeras extracciones.



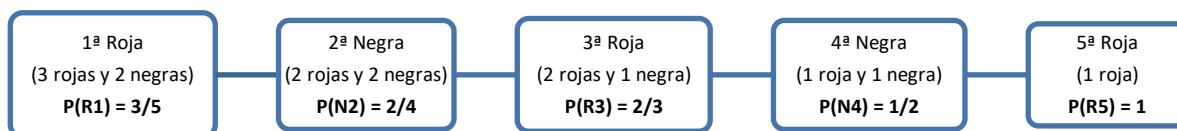
Nos piden calcular $P((N1 \cap N2) / R3)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P((N1 \cap N2) / R3) = \frac{P(N1 \cap N2 \cap R3)}{P(R3)} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1}{\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

c) Hay 3 bolas rojas y 2 negras en la urna. La única manera de que se vayan extrayendo bolas de colores alternos es la secuencia:

Roja 1 en 1ª extracción → Negra 1 en 2ª extracción → Roja 2 en 3ª extracción → Negra 2 en 4ª extracción → Roja 3 en 5ª extracción.

La probabilidad de que suceda esta secuencia es $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \boxed{\frac{1}{10} = 0.1}$

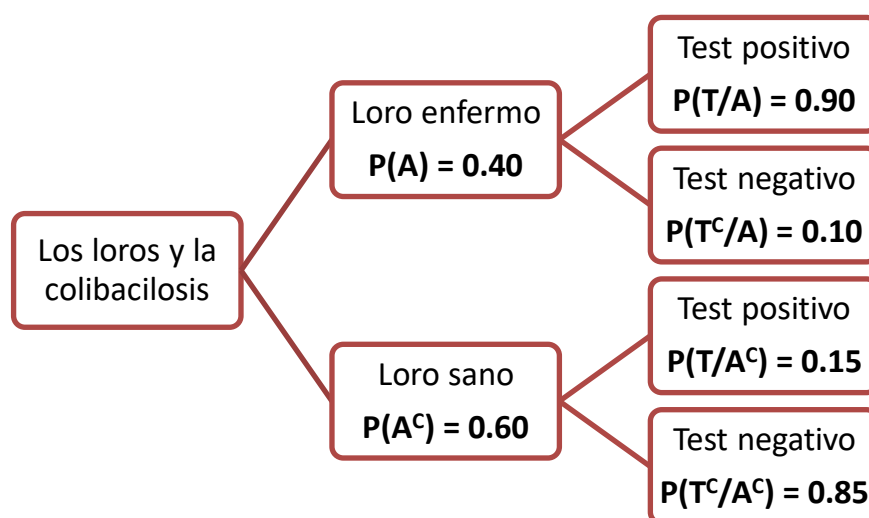


Problema 6. La colibacilosis es una enfermedad que afecta a los loros. En un centro veterinario, se estima en un 40% la proporción de loros portadores de la enfermedad. Se realiza un test diagnóstico de la enfermedad entre los loros del centro veterinario. Cuando un loro es portador de la enfermedad, el test da positivo en el 90% de los casos. Si el loro no es portador de la enfermedad, el test da negativo en el 85% de los casos. Se escoge un loro al azar del centro veterinario. Calcula:

- La probabilidad de que el loro sea portador de la enfermedad y su test dé positivo. (3 puntos)
- La probabilidad de que el test dé positivo. (3 puntos)
- La probabilidad de que el loro sea portador de la enfermedad, si sabemos que ha dado negativo en el test. (4 puntos)

Llamamos A al suceso “el loro es portador de la colibacilosis” y T al suceso “el test da positivo”. Sabemos que $P(A) = 0.40$, $P(T/A) = 0.90$ y $P(T^c/A^c) = 0.85$.

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Nos piden calcular $P(A \cap T)$.

$$P(A \cap T) = P(A)P(T/A) = 0.40 \cdot 0.90 = \boxed{0.36}$$

- b) Nos piden calcular $P(T)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(T) &= P(A \cap T) + P(A^c \cap T) = P(A)P(T/A) + P(A^c)P(T/A^c) = \\ &= 0.40 \cdot 0.90 + 0.60 \cdot 0.15 = \boxed{0.45} \end{aligned}$$

- c) Nos piden calcular $P(A/T^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/T^c) = \frac{P(A \cap T^c)}{P(T^c)} = \frac{P(A)P(T^c/A)}{1 - P(T)} = \frac{0.40 \cdot 0.10}{1 - 0.45} = \frac{4}{55} \approx 0.0727$$