

3. MODELO DE EXAMEN

MATEMÁTICAS II

- Responda en el pliego en blanco a **cuatro preguntas** cualesquiera de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2,5 puntos**.
- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Pregunta 1. Los equipos A, B y C juegan un torneo de hockey. Al finalizar el torneo se han marcado 30 goles y el equipo B ha marcado el triple de goles que el equipo A.

- (1.5 puntos)** Plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema.
- (0.5 puntos)** Discuta y resuelva el sistema cuando sea posible.
- (0.5 puntos)** Estudie si es posible que el equipo C haya marcado 5 goles. En caso de que este caso sea posible ¿cuántos goles habrían marcado el resto de los equipos?

Pregunta 2. Sea $a \in \mathbb{R}$, y $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

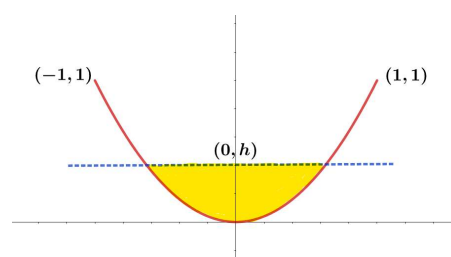
- (0.75 puntos)** Calcula el determinante y el rango de P para cada valor de a .
- (1 punto)** Para $a = 1$ ¿Existe P^{-1} ? En caso afirmativo, calcúlala.
- (0.75 puntos)** Tomando $a = 1$ y sabiendo que $PM = M^2$, sin calcular M calcula $\det(M)$.

Pregunta 3. Se considera la función $f(x) = 200 - \frac{200}{x+6} - 2x$.

- (1.5 puntos)** Calcula su dominio, asíntotas y puntos críticos.
- (0.5 puntos)** Realiza un esbozo de su gráfica.
- (0.5 puntos)** Supongamos que la función representa la altura en metros a la que se encuentra un dron en cada instante x , cuando $x \in [0, 200]$. Legalmente, un dron no puede volar a más de 120m del suelo, ¿es legal su vuelo?

Pregunta 4. Se tiene un abrevadero de longitud 6 m y altura 1 m. Su sección es la descrita en la figura formada por la función $f(x) = x^2$. h es la altura del líquido.

- (1 punto)** Comprueba que el área de la región S, en función de h , se puede representar como $s(h) = \frac{4h\sqrt{h}}{3}$
- (1.5 puntos)** Determina h para alcanzar la mitad del volumen del abrevadero. (Volumen = $S(h_{max}) \times \text{long}$).



Pregunta 5. Se quiere calcular el área de una parcela triangular. Las coordenadas de dos de sus vértices son A (0,1,0) y B (-1,1,1). El tercer vértice pertenece a la recta $r = \begin{cases} x = 4 \\ z = 1 \end{cases}$. Además, la recta que une A y C es perpendicular a la recta r.

- (1.25 puntos)** Determina las coordenadas del vértice C.
- (1.25 puntos)** Calcula el área de la parcela.

Pregunta 6. Dados los puntos A (2,1,0) y B (1,0,-1), la recta r que pasa por ambos y la recta $s = \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}$

- (1.25 puntos)** Determina el punto C de la recta s tal que los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ sean perpendiculares.
- (1.25 puntos)** Estudia la posición relativa de las rectas.

Pregunta 7. Consideremos dos dados, uno normal con las caras numeradas del 1 al 6, y otro trucado, con cuatro caras con el número 5 y dos caras con el número 6. Se elige al azar uno de los dados y se lanza.

- (1.25 puntos)** Calcula la probabilidad de sacar un 5.
- (1.25 puntos)** Si el resultado de la tirada es 5, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido el dado trucado?

Pregunta 8. Al 80 % de los estudiantes de un centro les gusta el fútbol; al 40 % el baloncesto y al 30 % ambos deportes.

- (0.5 puntos)** Si se elige un estudiante al azar ¿cuál es la probabilidad de que le guste alguno de los dos deportes?
- (1 punto)** Se eligen 100 personas al azar con reemplazamiento. Calcule aproximando la distribución por una normal, la probabilidad de que como mucho a 75 les guste el fútbol.
- (1 punto)** Si en el apartado anterior se hubiesen tomado 10 personas y no 100 ¿cuál hubiese sido la probabilidad de que a 5 les gustase el fútbol?

Algunos valores de la distribución $N(0,1)$

$$F(x) = P(Z \leq x) \quad F(1.5) = 0.9332, F(1.375) = 0.9154, F(1.25) = 0.8944, F(1.125) = 0.8697, F(1) = 0.8413$$



4. MODELO DE EXAMEN RESUELTO Y CRITERIOS ESPECIFICOS DE CORRECIÓN

Pregunta 1.

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta: Bloque A: Sentido numérico y Bloque D: Sentido Algebraico.

CALIFICACIÓN: 1.5 puntos el primer apartado y 0.5 los dos restantes.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba 25 %.

RESOLUCIÓN

a) Llamaremos x al número de goles que ha marcado el equipo A, y al número de goles del equipo B y z al del equipo C.

El sistema es el siguiente:

$$\begin{cases} x + y + z = 30 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 30 \\ -2x + y = 0 \end{cases}$$

La matriz ampliada del sistema es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 30 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Sumándole a la fila 2 dos veces la fila 1 se obtiene $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 3 & 2 & 60 \end{pmatrix}$, por lo que el sistema es compatible indeterminado y una solución paramétrica es:

$$\begin{cases} x = 10 - \frac{1}{3}\alpha \\ y = 20 - \frac{2}{3}\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

b) Si A mete 5 goles, entonces $10 - \frac{1}{3}\alpha = 5$ por lo que $\alpha = 15$. En este caso $y = 10$ y $z = 15$.

c) Si C mete 5 goles, entonces $\alpha = 5$, por lo que el número de goles que metería B sería $20 - \frac{2}{3}5 = \frac{50}{3} \notin \mathbb{N}$. Como este valor no es un número natural, con este dato, el problema no tendría solución.



Pregunta 2.

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta: Bloque A: Sentido numérico y Bloque D: Sentido Algebraico.

CALIFICACIÓN: 0.75 puntos los apartados primero y tercero y 1 punto el apartado 2.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba 25 %.

RESOLUCIÓN

a) $\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 2a - 4.$

Si $2a - 4 \neq 0$, es decir, si $a \neq 2$ la matriz tiene inversa y $rgP = 3$. En caso contrario, y dado que el menor $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$, el rango de P es 2 (se penaliza decir que el rango es 2 sin presentar un menor no nulo de orden 2).

b) Para $a = 1$ el determinante no se anula, por lo tanto, sí existe la matriz P^{-1} :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{-1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Es correcto el cálculo, tanto por menores, como haciendo operaciones elementales.

c) Si $PM = M^2$, entonces $\det(PM) = \det(M^2)$. Como el determinante del producto de matrices cuadradas es el producto de los determinantes, se tiene que:

$$\det(PM) = \det(P) \det(M), \quad \det(M^2) = \det(M)^2$$

por lo tanto:

$$\det(P) \det(M) = \det(M)^2 \Rightarrow \det(M)(\det(P) - \det(M)) = 0$$

Entonces, como $\det(P) = -2$ o bien $\det(M) = 0$ o bien $\det(M) = \det(P) = -2$.



Pregunta 3.

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta: Bloque b: Sentido de la medida y Bloque D: Sentido Algebraico.

CALIFICACIÓN: 1.5 puntos el primer apartado y 0.5 los dos restantes.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba 25 %.

RESOLUCIÓN

a) El dominio de la función es cualquier número real excepto para $x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6$, por lo tanto $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-6\}$. Para calcular las asíntotas horizontales calcularíamos $\lim_{x \rightarrow \infty} 200 - \frac{200}{x+6} - 2x = -\infty$, por lo que no tiene asíntotas horizontales. Para estudiar si tiene asíntotas verticales observamos que $\lim_{x \rightarrow -6} f(x) = \infty$, por lo que tendría una asíntota vertical en $x = -6$. Por último, veamos si tiene asíntota oblicua.

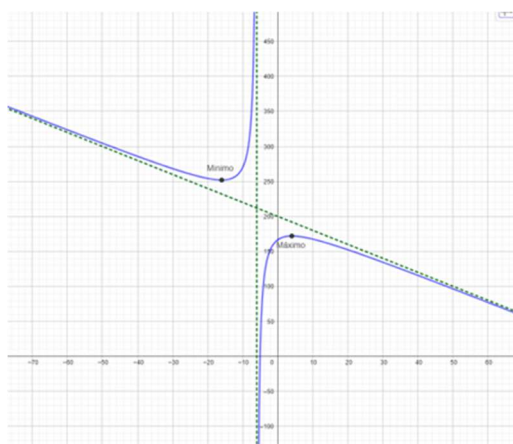
$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = -2, \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + 2x = 200,$$

Y la función tiene una asíntota oblicua $y = -2x + 200$.

Para calcular los puntos críticos calculamos la derivada de la función: $f'(x) = \frac{200}{(x+6)^2} - 2$.

2. Esta función se anula en $x = 4$, y en $x = -16$. Como $f''(x) = \frac{-400}{(x+6)^3}$, entonces la función tiene un mínimo en $x = -16 \Rightarrow f(-16) = 252$ y un máximo en $x = 4 \Rightarrow f(4) = 172$.

b)



c) Dado que el máximo es $x = 4$, que corresponde a una altura de 172, que es mayor de la permitida, el vuelo sería ilegal.



Pregunta 4.

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta: Bloque B: Sentido de la medida y Bloque D: Sentido Algebraico.

CALIFICACIÓN: 1 punto el primer apartado y 1.5 el segundo.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba 25 %.

RESOLUCIÓN

a) Los puntos de corte de la recta $y = h$ y la parábola $y = x^2$ son:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = h \end{cases} \Rightarrow x^2 = h \Rightarrow x = \pm\sqrt{h} \Rightarrow A(-\sqrt{h}, h), B(\sqrt{h}, h)$$

Así, el área vendrá dada por la integral:

$$S(h) = \int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} (h - x^2) dx = hx - \frac{x^3}{3} \Big|_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} = \frac{4h\sqrt{h}}{3}$$

b) El volumen del abrevadero en función de h será:

$$V(h) = 6 \times S(h) = 8h\sqrt{h}$$

El volumen total será $V(1) = 8$. Luego se busca un h tal que $V(h) = 4$, es decir:

$$8h\sqrt{h} = 4 \Rightarrow \sqrt{h^3} = \frac{1}{2} \Rightarrow h = 0.63$$



Pregunta 5.

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta: Bloque A: Sentido numérico, Bloque B: Sentido de la medida y Bloque C: Sentido espacial.

CALIFICACIÓN: 1.25 puntos cada apartado.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba 25 %.

RESOLUCIÓN

a) Calculemos un punto cualquiera de r y un vector director. Un punto sería, por ejemplo, $D(4,0,1)$, y un vector sería el $\vec{v}_r = (0,1,0)$, por lo que el punto C es de la forma $C(4,\lambda,1)$.

Como $\vec{AC} \cdot \vec{v}_r = 0$, y $\vec{AC} = (4,\lambda-1,1)$ entonces:

$$(4,\lambda-1,1) \cdot (0,1,0) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ y } C = (4,1,1)$$

b) El área pedida es:

$$Area = \frac{|\vec{AC} \times \vec{AB}|}{2}$$

Como: $\vec{AC} = (4,0,1)$ y $\vec{AB} = (-1,0,1)$ se tiene que:

$$\vec{AC} \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5\vec{j}$$

Entonces:

$$Area = \frac{|-5\vec{j}|}{2} = \frac{5}{2}$$



Pregunta 6.

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta: Bloque A: Sentido numérico, Bloque B: Sentido de la medida y Bloque C: Sentido espacial.

CALIFICACIÓN: 1.25 puntos cada apartado.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba 25 %.

RESOLUCIÓN

a) La recta r pasa por A y un vector director es $\overrightarrow{AB} = (-1, -1, -1)$. Por lo tanto, su ecuación paramétrica puede ser:
$$\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$
 sustituyendo en las dos primeras ecuaciones λ por $-z$ por lo que podemos escribir sus ecuaciones cartesianas como sigue:

$$\begin{cases} x = 2 + z \\ y = 1 + z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

b) Para estudiar la posición relativa de las dos rectas, es suficiente con discutir el sistema lineal formado por las cuatro ecuaciones:
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 0 \\ x - z = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$$
 cuya matriz ampliada es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[F_4 - F_2]{F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

Obteniendo que el sistema tiene solución única, el punto $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ por lo que las rectas se cortan.



Pregunta 7.

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta: Bloque B: Sentido de la medida y Bloque E: Sentido estocástico.

CALIFICACIÓN: 1.25 puntos cada apartado.

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba 25 %.

RESOLUCIÓN

a) Denotemos por N al dado normal y por T al trucado, con probabilidades iguales $P(N) = P(T) = \frac{1}{2}$. Los datos que se dan son $P(T / 5) = \frac{1}{6}$ y $P(5 / T) = \frac{4}{6}$.

La probabilidad de sacar un 5 está determinada por el dado elegido. Aplicando el teorema de la probabilidad total se tiene que:

$$\begin{aligned} P(5) &= P(5 \cap N) + P(5 \cap T) = P(5 / N)P(N) + P(5 / T)P(T) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12} \\ &= 0.4167 \end{aligned}$$

b) Se pide la probabilidad $P(T / 5)$. Utilizando el teorema de Bayes se tiene que:

$$P(T / 5) = \frac{P(T \cap 5)}{P(5)} = \frac{P(5 / T)P(T)}{P(5)} = \frac{\frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{5}{12}} = \frac{4}{5} = 0.8$$



Pregunta 8.

SABERES BÁSICOS a los que corresponde la pregunta: Bloque B: Sentido de la medida y Bloque E: Sentido estocástico.

CALIFICACIÓN: 0.5 el primer apartado y 1 punto cada uno de los dos restantes

PORCENTAJE asignado a la pregunta con respecto al total de la prueba 25 %.

RESOLUCIÓN

a) Denotamos por F a los seguidores del equipo de futbol y por B a los seguidores del equipo de baloncesto. Se tiene que $P(F) = 0.8$ y $P(B) = 0.4$.

Se pide $P(F \cup B)$. Como $P(F \cap B) = 0.3$:

$$P(F \cup B) = P(F) + P(B) - P(F \cap B) = 0.8 + 0.4 - 0.3 = 0.9$$

b) Sea X la variable aleatoria “ser seguidor del equipo de futbol”, que según el planteamiento del apartado sigue una distribución binomial $B(100, 0.8)$. Los datos que tenemos son acordes para aproximar la binomial por la distribución normal:

$$n = 100 \geq 30, n \cdot p = 100 \times 0.8 = 80 \geq 5, n \cdot q = 100 \times 0.2 = 20 \geq 5$$

Por tanto, podemos utilizar la variable aleatoria X' que sigue una distribución normal:

$$\mu = np = 80, \quad \sigma = \sqrt{npq} = 4, \quad N(80, 4)$$

$$P(x \leq 75) = P(X' \leq 75 + 0.5)$$

Si tipificamos la variable nos queda en términos de la $N(0, 1)$:

$$\begin{aligned} P(x' \leq 75.5) &= P\left(Z \leq \frac{75.5 - 80}{4}\right) = P(Z \leq -1.125) = 1 - P(Z \leq 1.125) \\ &= 1 - 0.8697 = 0.1303 \end{aligned}$$

c) En este caso:

$$n = 10 < 30, \quad np = 10 \times 0.8 = 8 \geq 5, \quad nq = 10 \times 0.2 = 2 \leq 5$$

No se cumplen las condiciones para aproximar la binomial por una normal, por lo que aplicamos directamente la distribución binomial $B(10, 0.3)$:

$$p(X = 5) = \binom{10}{5} 0.8^5 0.2^5 = \frac{10!}{5! 5!} 0.8^5 0.2^5 = 0.0264$$