

**MATEMÁTICAS II**

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde a más preguntas de las permitidas, **solo se corregirán las 5 primeras respondidas**.

**PREGUNTA 1. Números y Álgebra (2 puntos)**

Sea  $A = (a_{ij})$  la matriz de dimensión  $3 \times 3$  definida por  $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 2, \\ (-1)^j (i-1) & \text{si } i \neq 2. \end{cases}$  Explique

si  $A$  y  $A + I$  son o no invertibles y calcule las inversas cuando existan. (Nota:  $a_{ij}$  es el elemento de  $A$  que está en la fila  $i$  y en la columna  $j$ , e  $I$  es la matriz identidad)

**PREGUNTA 2. Números y Álgebra (2 puntos)**

Discuta, según los valores del parámetro  $m$ , el sistema: 
$$\begin{cases} x + 2y = m \\ my + 3z = 1 \\ x + (m+2)y + (m+1)z = m+1 \end{cases}$$

**PREGUNTA 3. Análisis (2 puntos)**

De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos lados sobre los ejes de coordenadas y un vértice sobre la recta  $x + 2y = 4$ , determine los vértices del que tiene mayor área.

**PREGUNTA 4. Análisis (2 puntos)**

Dada la función  $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 - x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$  calcule el área de la región encerrada por la gráfica de  $f$  y las rectas  $y = 4x - 7$  e  $y = 1$ .

**PREGUNTA 5. Geometría (2 puntos)**

- Obtenga la ecuación implícita del plano  $\pi$  que pasa por los puntos  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 2, 0)$  y  $C(0, 0, 3)$ .
- Calcule el punto simétrico de  $P(10, -5, 5)$  con respecto al plano  $\pi: 6x + 3y + 2z - 6 = 0$ .

**PREGUNTA 6. Geometría (2 puntos)**

- Halle el valor de  $a$  si el plano  $\pi: ax + y + z = 0$  es paralelo a la recta  $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 1 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$ .
- Estudie la posición relativa de los planos  $\pi_1: 2x + y + mz + m = 0$  y  $\pi_2: (m-1)x + y + 3z = 0$  en función del parámetro  $m$ .

**PREGUNTA 7. Estadística y Probabilidad (2 puntos)**

- a) Sean  $A$  y  $B$  dos sucesos de un mismo espacio muestral. Calcule  $P(A)$  sabiendo que  $P(B) = 2P(A)$ ,  $P(A \cap B) = 0.1$  y  $P(A \cup B) = 0.8$ .
- b) Diga si los sucesos  $A$  y  $B$  son o no independientes, si se sabe que
- $$P(A) = 0.6, \quad P(B) = 0.3 \quad \text{y} \quad P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.82$$

**PREGUNTA 8. Estadística y Probabilidad (2 puntos)**

El portador de una cierta enfermedad tiene un 10% de probabilidades de contagiarla a quien no estuvo expuesto a ella. Si entra en contacto con 8 personas que no estuvieron expuestas, calcule:

- a) La probabilidad de que contagie a un máximo de 2 personas.
- b) La probabilidad de que contagie a 2 personas por lo menos.

## SOLUCIONES

## 1. Números y Álgebra:

Sea  $A = (a_{ij})$  la matriz de dimensión  $3 \times 3$  definida por  $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 2, \\ (-1)^j (i-1) & \text{si } i \neq 2. \end{cases}$  Explique si  $A$  y

$A + I$  son o no invertibles y calcule las inversas cuando existan. (Nota:  $a_{ij}$  es el elemento de  $A$  que está en la fila  $i$  y en la columna  $j$ , e  $I$  es la matriz identidad)

El valor de  $i$  corresponde a la fila.

En la fila segunda ( $i = 2$ ) los elementos son todos 1.

En la fila primera ( $i = 1$ ) los elementos son todos  $(-1)^j (1-1) = 0$ .

En la fila tercera ( $i = 3$ ) los elementos son  $(-1)^j (3-1) = 2(-1)^j$ , el elemento  $a_{31} = 2(-1)^1 = -2$ , el elemento  $a_{32} = 2(-1)^2 = 2$  y el elemento  $a_{33} = 2(-1)^3 = -2$ ,

La matriz  $A$  es  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Para que sea invertible su determinante debe ser distinto de 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \text{ La matriz } A \text{ no es invertible.}$$

$$A + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Para que  $A + I$  sea invertible su determinante debe ser distinto de 0.

$$|A + I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 \neq 0$$

La matriz  $A + I$  es invertible. Calculamos su inversa.

$$(A + I)^{-1} = \frac{\text{Adj}((A + I)^T)}{|A + I|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{-4} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(A + I)^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -3/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

**2. Números y Álgebra:**

Discuta, según los valores del parámetro  $m$ , el sistema: 
$$\begin{cases} x + 2y = m \\ my + 3z = 1 \\ x + (m+2)y + (m+1)z = m+1 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes es  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 3 \\ 1 & m+2 & m+1 \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es  $A/B = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & m \\ 0 & m & 3 & 1 \\ 1 & m+2 & m+1 & m+1 \end{array} \right)$

Calculamos el determinante de  $A$  y vemos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 3 \\ 1 & m+2 & m+1 \end{vmatrix} = m^2 + m + 6 - 3m - 6 = m^2 - 2m$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^2 - 2m = 0 \Rightarrow m(m-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

Estudiamos tres casos distintos.

**CASO 1.**  $m \neq 0$  y  $m \neq 2$ 

En este caso el determinante de  $A$  es no nulo y por tanto su rango es 3. Al igual que el rango de  $A/B$  y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (solución única)

**CASO 2.**  $m = 0$ 

La matriz  $A$  queda  $A/B = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$ . Usamos el método de Gauss para triangular la

matriz y decidir el rango de  $A$  y el rango de  $A/B$ .

$$\begin{aligned} A/B &= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ \hline 1 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \\ -1 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\ \hline \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ \hline 0 \quad 0 \quad 3 \quad 3 \\ 0 \quad 0 \quad -3 \quad -1 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \\ \hline \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

El rango de  $A$  es 2 y el de  $A/B$  es 3. El sistema es incompatible (sin solución)

**CASO 3.**  $m = 2$

La matriz A queda  $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ . Usamos el método de Gauss para triangular la matriz y decidir el rango de A y el rango de A/B.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 1 & 4 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \\ \hline 0 & 2 & 3 & 1 \end{array} \\ \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\ \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

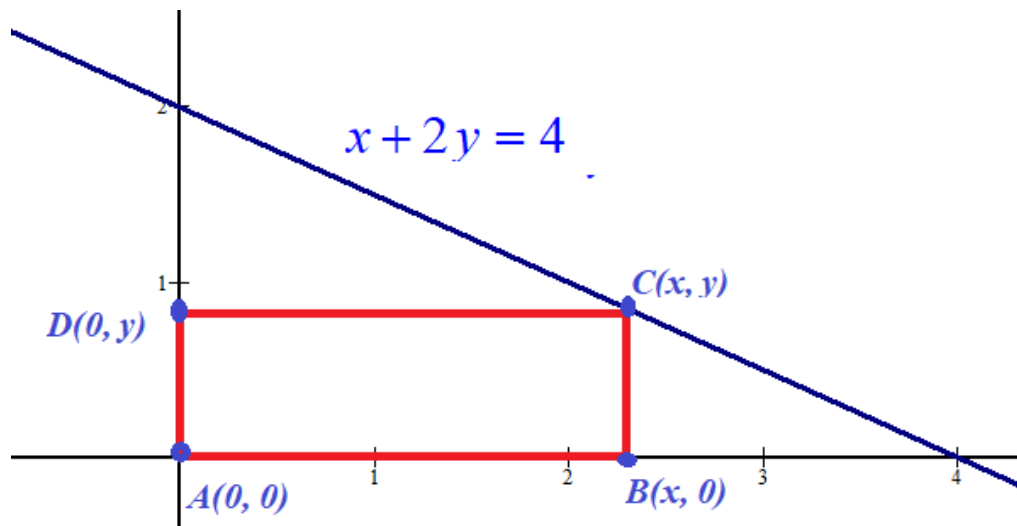
La matriz A tiene rango 2 y la matriz A/B también tiene rango 2, pero el número de incógnitas es 3. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

**Resumiendo:** Para  $m \neq 0$  y  $m \neq 2$  el sistema es compatible determinado (solución única), para  $m = 0$  el sistema es incompatible (sin solución) y para  $m = 2$  el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

**3. Análisis**

De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos lados sobre los ejes de coordenadas y un vértice sobre la recta  $x + 2y = 4$ , determine los vértices del que tiene mayor área.

La situación planteada es la del dibujo:



Como el vértice C pertenece a la recta  $x + 2y = 4 \Rightarrow x = 4 - 2y$  entonces sus coordenadas son  $C(4 - 2y, y)$ .

El área del rectángulo rojo es:

$$\text{Área} = \text{base} \cdot \text{altura} = x \cdot y = (4 - 2y)y = 4y - 2y^2$$

$$A(y) = 4y - 2y^2$$

Derivamos e igualamos a cero para encontrar el posible máximo.

$$A(y) = 4y - 2y^2 \Rightarrow A'(y) = 4 - 4y$$

$$A'(y) = 0 \Rightarrow 4 - 4y = 0 \Rightarrow -4y = -4 \Rightarrow y = \frac{-4}{-4} = 1$$

Hallamos la segunda derivada y vemos si es máximo o mínimo.

$$A'(y) = 4 - 4y \Rightarrow A''(y) = -4$$

$$A''(1) = -4 < 0$$

La función área presenta un máximo en  $y = 1$ .

El área es máxima cuando  $y = 1$ . Sustituyendo tenemos que  $x = 4 - 2 = 2$ .

El vértice C que hace máxima el área del rectángulo es  $C(2, 1)$ .

El resto de vértices son  $A(0, 0)$ ,  $B(2, 0)$  y  $D(0, 1)$

#### 4. Análisis:

Dada la función  $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 - x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$  calcule el área de la región encerrada por la gráfica de  $f$  y las rectas  $y = 4x - 7$  e  $y = 1$ .

Dibujamos la región de la que nos piden calcular su área.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 - x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

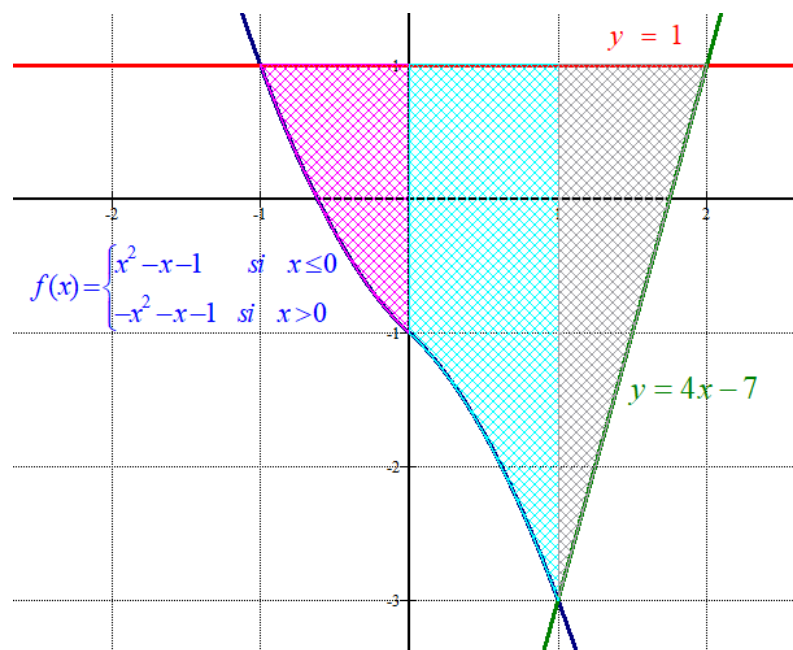
| $x$ | $y = x^2 - x - 1$ | $x$ | $y = -x^2 - x - 1$ |
|-----|-------------------|-----|--------------------|
| -2  | 5                 | 0   | -1 No se incluye   |
| -1  | 1                 | 1   | -3                 |
| 0   | -1                | 2   | -7                 |

$y = 4x - 7$ 

| $x$ | $y = 4x - 7$ |
|-----|--------------|
| 1   | -3           |
| 2   | 1            |

$y = 1$ 

| $x$ | $y = 1$ |
|-----|---------|
| -1  | 1       |
| 2   | 1       |



La función  $f(x)$  y la recta  $y = 1$  se cortan en  $x = -1$ .

La función  $f(x)$  cambia de definición en  $x = 0$ .

La función  $f(x)$  y la recta  $y = 4x - 7$  se cortan en  $x = 1$ .

La recta  $y = 4x - 7$  y la recta horizontal  $y = 1$  se cortan en  $x = 2$ .

La región la dividimos en 3 partes (rosa, azul claro y gris en el dibujo) cuya área calculamos por separado y luego sumamos sus valores.

$$\begin{aligned}
 \text{Área rosa} &= \int_{-1}^0 1 - (x^2 - x - 1) dx = \int_{-1}^0 1 - x^2 + x + 1 dx = \int_{-1}^0 -x^2 + x + 2 dx = \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^0 = \\
 &= \left[ -\frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} + 2 \cdot 0 \right] - \left[ -\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 2(-1) \right] = 0 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 = \boxed{\frac{7}{6}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Área azul} &= \int_0^1 1 - (-x^2 - x - 1) dx = \int_0^1 1 + x^2 + x + 1 dx = \int_0^1 x^2 + x + 2 dx = \\ &= \left[ \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^1 = \left[ \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 2 \right] - \left[ \frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} + 2 \cdot 0 \right] = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 = \boxed{\frac{17}{6} u^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Área gris} &= \int_1^2 1 - (4x - 7) dx = \int_1^2 1 - 4x + 7 dx = \int_1^2 -4x + 8 dx = \left[ -2x^2 + 8x \right]_1^2 = \\ &= \left[ -2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 \right] - \left[ -2 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 \right] = -8 + 16 + 2 - 8 = \boxed{2 u^2}\end{aligned}$$

El área total es  $\frac{7}{6} + \frac{17}{6} + 2 = \boxed{6 u^2}$



**5. Geometría:**

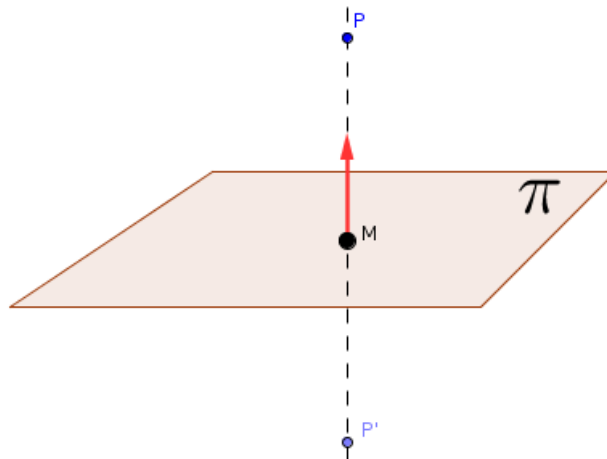
- a) Obtenga la ecuación implícita del plano  $\pi$  que pasa por los puntos  $A(1,0,0)$ ,  $B(0,2,0)$  y  $C(0,0,3)$ .
- b) Calcule el punto simétrico de  $P(10, -5, 5)$  con respecto al plano  $\pi : 6x + 3y + 2z - 6 = 0$ .

- a) El plano pedido tiene como vectores directores  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AC}$  y contiene el punto A.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (0, 2, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 2, 0) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0, 0, 3) - (1, 0, 0) = (-1, 0, 3) \\ A(1, 0, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$6x - 6 + 2z + 3y = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv 6x + 3y + 2z - 6 = 0}$$

b)



Obtenemos la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por el punto  $P$ . El vector director de la recta  $r$  será el vector normal del plano.

$$\pi : 6x + 3y + 2z - 6 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (6, 3, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (6, 3, 2) \\ P(10, -5, 5) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 10 + 6t \\ y = -5 + 3t, t \in \mathbb{R} \\ z = 5 + 2t \end{cases}$$

Determinamos las coordenadas del punto M intersección de la recta  $r$  y el plano  $\pi$ .

$$\left. \begin{array}{l} \pi : 6x + 3y + 2z - 6 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 10 + 6t \\ y = -5 + 3t \\ z = 5 + 2t \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 6(10 + 6t) + 3(-5 + 3t) + 2(5 + 2t) - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 60 + 36t - 15 + 9t + 10 + 4t - 6 = 0 \Rightarrow 49t + 49 = 0 \Rightarrow t = \frac{-49}{49} = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 10 - 6 = 4 \\ y = -5 - 3 = -8 \\ z = 5 - 2 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M(4, -8, 3)$$

Determinamos las coordenadas del punto  $P'(a, b, c)$  simétrico de  $P$  respecto del plano  $\pi$  haciendo que los vectores  $\overrightarrow{PM}$  y  $\overrightarrow{MP'}$  sean iguales.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PM} = (4, -8, 3) - (10, -5, 5) = (-6, -3, -2) \\ \overrightarrow{MP'} = (a, b, c) - (4, -8, 3) = (a - 4, b + 8, c - 3) \end{array} \right\} \Rightarrow (a - 4, b + 8, c - 3) = (-6, -3, -2) \Rightarrow$$

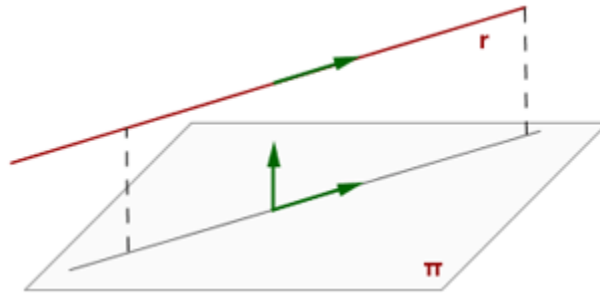
$$\Rightarrow \begin{cases} a - 4 = -6 \Rightarrow a = -6 + 4 = -2 \\ b + 8 = -3 \Rightarrow b = -3 - 8 = -11 \\ c - 3 = -2 \Rightarrow c = 3 - 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P'(-2, -11, 1)}$$

El punto  $P'$  simétrico de  $P$  tiene coordenadas  $P'(-2, -11, 1)$

**6. Geometría:**

- a) Halle el valor de  $a$  si el plano  $\pi: ax + y + z = 0$  es paralelo a la recta  $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 1 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$
- b) Estudie la posición relativa de los planos  $\pi_1: 2x + y + mz + m = 0$  y  $\pi_2: (m-1)x + y + 3z = 0$  en función del parámetro  $m$ .

a)



El vector normal al plano y el vector director de la recta deben ser perpendiculares, es decir, su producto escalar debe ser 0.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: ax + y + z = 0 \Rightarrow \vec{n} = (a, 1, 1) \\ r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 1 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{v}_r = (1, 1, 1) \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (1, 1, 1) \cdot (a, 1, 1) = 0 \Rightarrow a + 1 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

El valor buscado es  $a = -2$ .

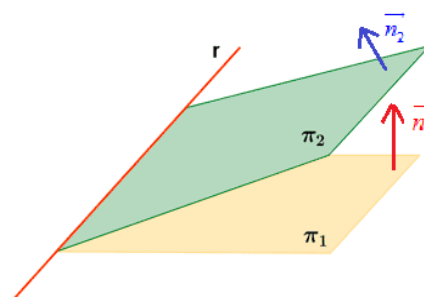
b) Los dos planos pueden ser coincidentes, paralelos o secantes (en una recta).

Comparamos sus vectores normales.

Si las coordenadas de ambos vectores normales son proporcionales los planos son paralelos o coincidentes, en caso contrario son secantes.

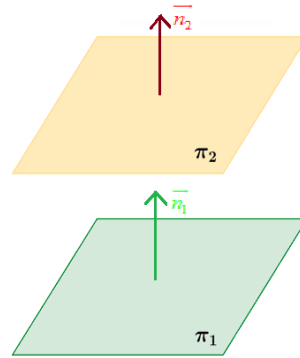
$$\left. \begin{array}{l} \pi_1: 2x + y + mz + m = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = (2, 1, m) \\ \pi_2: (m-1)x + y + 3z = 0 \Rightarrow \vec{n}_2 = (m-1, 1, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{m-1} = \frac{1}{1} = \frac{m}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{m-1} = \frac{1}{1} \Rightarrow 2 = m-1 \Rightarrow m = 3 \\ \frac{1}{1} = \frac{m}{3} \Rightarrow 3 = m \end{cases}$$

Para  $m \neq 3$  las coordenadas de los vectores normales no son proporcionales y los planos son secantes.



Para  $m = 3$  las coordenadas de los vectores normales son proporcionales y pueden ser paralelos o coincidentes. Comparamos sus ecuaciones para  $m = 3$ .

$$\left. \begin{array}{l} m=3 \Rightarrow \pi_1 : 2x+y+3z+3=0 \\ m=3 \Rightarrow \pi_2 : 2x+y+3z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{2} = \frac{1}{1} = \frac{3}{3} \neq \frac{3}{0} \Rightarrow \pi_1 \text{ y } \pi_2 \text{ son paralelos}$$



**Resumiendo:** Para  $m = 3$  los planos son paralelos y para  $m \neq 3$  los planos son secantes.

**7. Estadística y Probabilidad:**

a) Sean  $A$  y  $B$  dos sucesos de un mismo espacio muestral. Calcule  $P(A)$  sabiendo que  $P(B) = 2P(A)$ ,  $P(A \cap B) = 0.1$  y  $P(A \cup B) = 0.8$ .

b) Diga si los sucesos  $A$  y  $B$  son o no independientes, si se sabe que

$$P(A) = 0.6, \quad P(B) = 0.3 \quad \text{y} \quad P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.82$$

a)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0.8 = P(A) + 2P(A) - 0.1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.9 = 3P(A) \Rightarrow \boxed{P(A) = \frac{0.9}{3} = 0.3}$$

b) Para que sean independientes deben cumplir la igualdad  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ .

$$\left. \begin{aligned} P(\bar{A} \cup \bar{B}) &= P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) \\ P(\bar{A} \cup \bar{B}) &= 0.82 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 - P(A \cap B) = 0.82 \Rightarrow P(A \cap B) = 1 - 0.82 = 0.18$$

$$\left. \begin{aligned} P(A \cap B) &= 0.18 \\ P(A) \cdot P(B) &= 0.6 \cdot 0.3 = 0.18 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A \text{ y } B \text{ son independientes}$$

**8. Estadística y Probabilidad:**

El portador de una cierta enfermedad tiene un 10% de probabilidades de contagiarla a quien no estuvo expuesto a ella. Si entra en contacto con 8 personas que no estuvieron expuestas, calcule:

- a) La probabilidad de que contagie a un máximo de 2 personas.  
b) La probabilidad de que contagie a 2 personas por lo menos.

Es una distribución binomial.

$X$  = Número de contagiados de un grupo de 8.

$p = P(\text{contagiar a una persona no expuesta}) = 0.10$

Número de repeticiones =  $n = 8$

$X = B(8, 0.1)$

En nuestra distribución binomial se cumple que:

$$P(X = r) = \binom{8}{r} 0.1^r \cdot 0.9^{n-r} \text{ siendo } r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \text{ u } 8$$

a)

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \\ &= \binom{8}{0} 0.1^0 \cdot 0.9^8 + \binom{8}{1} 0.1^1 \cdot 0.9^7 + \binom{8}{2} 0.1^2 \cdot 0.9^6 = \\ &= 0.9^8 + 8 \cdot 0.1 \cdot 0.9^7 + \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot 0.1^2 \cdot 0.9^6 = \boxed{0.9619} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = \\ &= 1 - \left( \binom{8}{0} 0.1^0 \cdot 0.9^8 + \binom{8}{1} 0.1^1 \cdot 0.9^7 \right) = \\ &= 1 - (0.9^8 + 8 \cdot 0.1 \cdot 0.9^7) = \boxed{0.1869} \end{aligned}$$