



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JULIOL 2017	CONVOCATORIA: JULIO 2017
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II
BAREMO DEL EXAMEN: Se elegirá solamente UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción. Cada problema se puntuará hasta 10 puntos. La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.	

OPCIÓN A

PROBLEMA A.1. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 tales que $A^2 = -A - I$

y $2B^3 = B$, siendo $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad. Obtener razonadamente,

escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- La justificación de que la matriz A es invertible (2 puntos)
y el cálculo de la matriz A^3 en función de A y de I . (2 puntos)
- Los valores posibles del determinante de B . (3 puntos)
- El valor del determinante de la matriz B^2 , sabiendo que la matriz B tiene inversa. (3 puntos).

PROBLEMA A.2. Se dan la recta $r: \begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 3y - z = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi: 2x + y + mz = n$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- Los valores de m y n para los que la recta r y el plano π se cortan en un punto. (3 puntos)
- Los valores de m y n para los que la recta r y el plano π no se cortan. (3'5 puntos)
- Los valores de m y n para los que la recta r está contenida en el plano π . (3'5 puntos)

PROBLEMA A.3. Se consideran las curvas $y = x^3$, $y = ax$ y la función $f(x) = x^3 - ax$, siendo a un parámetro real y $a > 0$. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- Los puntos de corte de la curva $y = f(x)$ con los ejes coordenados y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f . (1 + 2 puntos)
- La gráfica de la función f cuando $a = 9$. (3 puntos)
- Calcular en función del parámetro a , el área de la región acotada del primer cuadrante encerrada entre las curvas $y = x^3$ e $y = ax$, cuando $a > 1$. (2 puntos)
- El valor del parámetro a para el que el área obtenida en el apartado c) coincide con el área de la región acotada comprendida entre la curva $y = x^3$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. (2 puntos)

OPCIÓN B

PROBLEMA B.1. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- a) La justificación de que A tiene matriz inversa y el cálculo de dicha inversa A^{-1} .
(2 + 2 puntos)
- b) La justificación de que $A^4 = I$.
(2 puntos)
- c) El cálculo de las matrices A^7 , A^{30} y A^{100} .
(4 puntos)

PROBLEMA B.2. Sea la recta $r: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{a} = \frac{z-1}{-1}$ y el plano $\pi: 2x - y + bz = 0$,

siendo a y b dos parámetros reales. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- a) El punto de intersección de la recta r y el plano π cuando $a = -b = 1$. (2'5 puntos)
- b) La distancia entre la recta r y el plano π cuando $a = b = 4$. (2'5 puntos)
- c) La posición relativa de la recta r y del plano π en función de los valores de los parámetros a y b . (5 puntos)

PROBLEMA B.3. Se considera el triángulo T de vértices $O = (0, 0)$, $A = (x, y)$ y $B = (0, y)$, siendo $x > 0$, $y > 0$, y tal que la suma de las longitudes de los lados OA y AB es 30 metros.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- a) El área del triángulo T en función de x . (3 puntos)
- b) El valor de x para el que dicha área es máxima. (5 puntos)
- c) El valor de dicha área máxima. (2 puntos)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

PROBLEMA A.1. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 tales que $A^2 = -A - I$ y

$2B^3 = B$, siendo $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad. Obtener razonadamente, escribiendo

todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La justificación de que la matriz A es invertible (2 puntos)
y el cálculo de la matriz A^3 en función de A y de I . (2 puntos)
- b) Los valores posibles del determinante de B . (3 puntos)
- c) El valor del determinante de la matriz B^2 , sabiendo que la matriz B tiene inversa. (3 puntos)

- a) Como $A^2 = -A - I$ tenemos que $A^2 + A = -I \Rightarrow -A^2 - A = I \Rightarrow A(-A - I) = I$, por lo que la matriz A tiene inversa, siendo su inversa $A^{-1} = -A - I$.

Calculamos A^3 .

$$A^3 = A^2 \cdot A = (-A - I) \cdot A = -A^2 - A = -(-A - I) - A = A + I - A = I$$

- b) Sabemos que B es una matriz cuadrada de orden 3, por lo que B^3 también es una matriz cuadrada de orden 3 y se cumple $|2B^3| = 2^3 |B^3|$.

$$2B^3 = B \Rightarrow |2B^3| = |B| \Rightarrow 2^3 |B^3| = |B| \Rightarrow 8|B|^3 = |B| \Rightarrow 8|B|^3 - |B| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |B|(8|B|^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |B| = 0 \\ \text{o} \\ 8|B|^2 - 1 = 0 \rightarrow |B|^2 = \frac{1}{8} \rightarrow |B| = \sqrt{\frac{1}{8}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

- c) Multiplicamos por la inversa de B en la ecuación matricial $2B^3 = B$.

$$2B^3 = B \Rightarrow 2B^2 \cdot B = B \Rightarrow 2B^2 \cdot B \cdot B^{-1} = B \cdot B^{-1} \Rightarrow 2B^2 = I$$

Aplicamos las propiedades de los determinantes.

$$2B^2 = I \Rightarrow |2B^2| = |I| \Rightarrow 2^3 |B^2| = 1 \Rightarrow |B^2| = \frac{1}{8}$$

PROBLEMA A.2. Se dan la recta $r: \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+3y-z=1 \end{cases}$ y el plano $\pi: 2x+y+mz=n$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- a) Los valores de m y n para los que la recta r y el plano π se cortan en un punto. (3 puntos)
 b) Los valores de m y n para los que la recta r y el plano π no se cortan. (3'5 puntos)
 c) Los valores de m y n para los que la recta r está contenida en el plano π . (3'5 puntos)

- a) Para que el plano y la recta se corten en un punto el sistema formado por sus ecuaciones debe tener solución única. Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente más fácil de analizar.

$$r: \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+3y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+3y-z=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\pi: 2x+y+mz=n \quad 2x+y+mz=n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a - \text{Ecuación } 1^a \\ x + 3y - z = 1 \\ -x + 2y + 2z = -1 \\ \hline 5y + z = 0 \rightarrow \text{Nueva Ecuación } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ 2x + y + mz = n \\ -2x + 4y + 4z = -2 \\ \hline 5y + (m+4)z = n-2 \rightarrow \text{Nueva Ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ 5y+z=0 \\ 5y+(m+4)z=n-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 2^a \\ 5y + (m+4)z = n-2 \\ -5y - z = 0 \\ \hline (m+3)z = n-2 \rightarrow \text{Nueva Ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ 5y+z=0 \\ (m+3)z=n-2 \end{cases}$$

Para que el sistema equivalente obtenido tenga solución única debe ser $m+3 \neq 0 \Rightarrow m \neq -3$ y el valor de n no influye en que la solución sea única.

- b) Para que la recta r y el plano π no se corten el sistema no debe tener solución. Utilizamos lo conseguido en el apartado a).

$$r: \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+3y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+3y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ 5y+z=0 \\ (m+3)z=n-2 \end{cases}$$

La tercera ecuación debe ser una igualdad imposible y para ello debe ser $m+3=0 \Rightarrow m=-3$ y además $n-2 \neq 0 \Rightarrow n \neq 2$.

- c) Para que la recta r esté contenida en el plano π el sistema debe tener infinitas soluciones. La tercera ecuación debe ser una identidad y para ello debe ser $m+3=0 \Rightarrow m=-3$ y además $n-2=0 \Rightarrow n=2$.

PROBLEMA A.3. Se consideran las curvas $y = x^3$, $y = a x$ y la función $f(x) = x^3 - a x$, siendo a un parámetro real y $a > 0$. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- a) Los puntos de corte de la curva $y = f(x)$ con los ejes coordenados y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f . (1 + 2 puntos)
- b) La gráfica de la función f cuando $a = 9$. (3 puntos)
- c) Calcular en función del parámetro a , el área de la región acotada del primer cuadrante encerrada entre las curvas $y = x^3$ e $y = a x$, cuando $a > 1$. (2 puntos)
- d) El valor del parámetro a para el que el área obtenida en el apartado c) coincide con el área de la región acotada comprendida entre la curva $y = x^3$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. (2 puntos)

- a) Hallamos los puntos de corte de la curva $y = f(x) = x^3 - a x$ con los ejes coordenados.

Con el eje OY:

$$\left. \begin{array}{l} y = x^3 - a x \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 0^3 - a \cdot 0 = 0 \Rightarrow A(0, 0)$$

Con el eje OX ($y = 0$):

$$\left. \begin{array}{l} y = x^3 - a x \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 - a x = 0 \Rightarrow x(x^2 - a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow A(0, 0) \\ x^2 - a = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{a} \rightarrow \begin{cases} B(\sqrt{a}, 0) \\ C(-\sqrt{a}, 0) \end{cases} \end{cases}$$

Estudiamos el crecimiento o decrecimiento de la función usando la derivada.

Determinamos los puntos críticos de la función.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - a \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x^2 - a = 0 \Rightarrow 3x^2 = a \Rightarrow x^2 = \frac{a}{3} \Rightarrow \{a > 0\} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{a}{3}}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$ tomamos $x = -2\sqrt{\frac{a}{3}}$ y la derivada vale

$$f'\left(-2\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = 3\left(-2\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^2 - a = 4a - a = 3a > 0. \text{ La función crece en } \left(-\infty, -\sqrt{\frac{a}{3}}\right).$$

- En el intervalo $\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}, +\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale

$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - a = -a < 0. \text{ La función decrece en } \left(-\sqrt{\frac{a}{3}}, +\sqrt{\frac{a}{3}}\right).$$

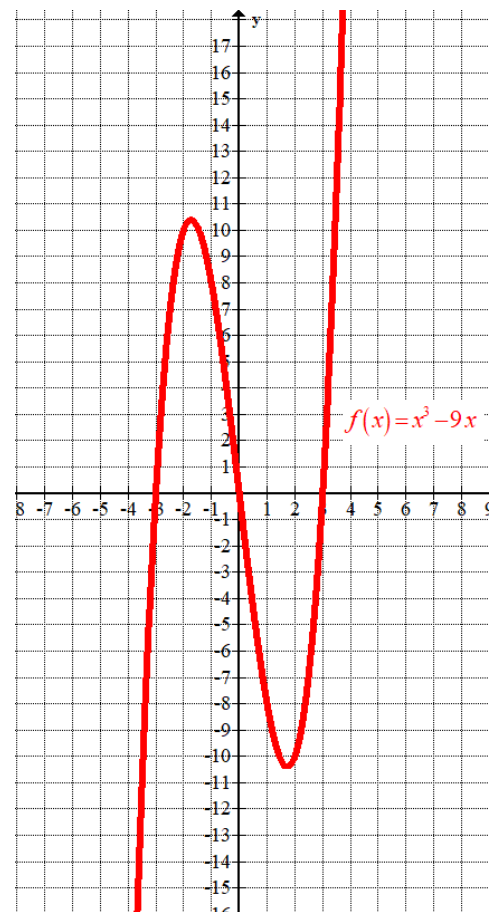
- En el intervalo $\left(+\sqrt{\frac{a}{3}}, +\infty\right)$ tomamos $x = 2\sqrt{\frac{a}{3}}$ y la derivada vale

$$f'\left(2\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = 3\left(2\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^2 - a = 4a - a = 3a > 0. \text{ La función crece en } \left(+\sqrt{\frac{a}{3}}, +\infty\right).$$

Resumiendo: La función crece en $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{a}{3}}\right) \cup \left(+\sqrt{\frac{a}{3}}, +\infty\right)$ y decrece en $\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}, +\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$.

- b) Para $a = 9$ la función queda $f(x) = x^3 - 9x$. Por lo visto en el apartado a) sabemos que la función corta los ejes en $(0, 0)$, $(3, 0)$ y $(-3, 0)$. La función crece en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(+\sqrt{3}, +\infty\right)$ y decrece en $\left(-\sqrt{3}, +\sqrt{3}\right)$. Hacemos una tabla de valores y la representamos.

x	$y = x^3 - 9x$
-2	8
$-\sqrt{3}$	0
-1	8
0	0
1	-8
$\sqrt{3}$	0
2	-10



- c) Las curvas $y = x^3$ e $y = ax$ se cortan en los puntos que corte que hemos obtenido en el apartado a). Se cortan en

$$C(-\sqrt{a}, 0); A(0, 0) \text{ y } B(\sqrt{a}, 0).$$

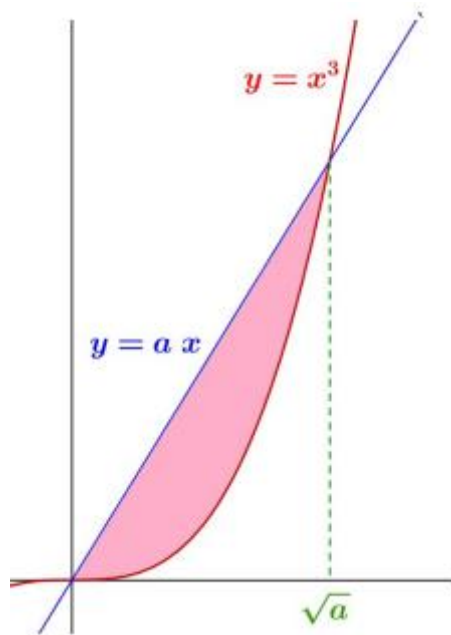
El área de la región acotada del primer cuadrante encerrada entre las curvas $y = x^3$ e $y = ax$, cuando $a > 1$ es el valor absoluto de la integral de la diferencia de las funciones entre $x = 0$ y $x = \sqrt{a}$.

Como $a > 1$ entonces $\sqrt{a} > 1$, comprobamos que gráfica es superior en $x = 1 \in (0, \sqrt{a})$.

$$\left. \begin{array}{l} y = 1^3 = 1 \\ y = a \cdot 1 = a \end{array} \right\} \text{ Como } a > 1 \text{ la recta está por encima de la curva.}$$

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^{\sqrt{a}} ax - x^3 dx = \left[a \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^{\sqrt{a}} = \left[a \frac{(\sqrt{a})^2}{2} - \frac{(\sqrt{a})^4}{4} \right] - \left[a \frac{0^2}{2} - \frac{0^4}{4} \right] = \\ &= a \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \boxed{\frac{a^2}{4} u^2} \end{aligned}$$

El área del recinto del dibujo es $\frac{a^2}{4}$ unidades cuadradas.



- d) Calculamos el área de la región acotada comprendida entre la curva $y = x^3$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=2$. La función $y = x^3$ corta el eje OX en $x = 0$, por lo que el área es la integral definida de la función entre 0 y 2.

$$\text{Área} = \int_0^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \left[\frac{2^4}{4} \right] - \left[\frac{0^4}{4} \right] = 4u^2$$

Igualamos el valor del área obtenida en el apartado c) a 4 y despejamos el valor de a .

$$\frac{a^2}{4} = 4 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = \sqrt{16} = 4$$

Como $a > 0$ solo consideramos el valor positivo de la raíz: $a = 4$.

OPCIÓN B

PROBLEMA B.1. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La justificación de que A tiene matriz inversa y el cálculo de dicha inversa A^{-1} .
(2 + 2 puntos)
- b) La justificación de que $A^4 = I$.
(2 puntos)
- c) El cálculo de las matrices A^7 , A^{30} y A^{100} .
(4 puntos)

- a) La matriz tiene inversa si su determinante es no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - (-1) - 0 - 0 = 1 \neq 0$$

El determinante tiene un valor no nulo y la matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- b) Calculamos las potencias sucesivas de A hasta llegar a A^4 .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

- c) Utilizamos la igualdad $A^4 = I$.

$$A^7 = A^4 \cdot A^3 = I \cdot A^3 = A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{30} = A^{4 \cdot 7 + 2} = A^{4 \cdot 7} \cdot A^2 = (A^4)^7 \cdot A^2 = I^7 \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{100} = A^{4 \cdot 25} = (A^4)^{25} = I^{25} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA B.2. Sea la recta $r: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{a} = \frac{z-1}{-1}$ y el plano $\pi: 2x - y + bz = 0$, siendo a y b dos parámetros reales. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- a) El punto de intersección de la recta r y el plano π cuando $a = -b = 1$. (2'5 puntos)
 b) La distancia entre la recta r y el plano π cuando $a = b = 4$. (2'5 puntos)
 c) La posición relativa de la recta r y del plano π en función de los valores de los parámetros a y b . (5 puntos)

a) Cuando $a = -b = 1$ el plano tiene ecuación $\pi: 2x - y - z = 0$ y la recta queda

$$r: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}.$$

Pasamos la ecuación continua de la recta a ecuaciones paramétricas y resolvemos el sistema formado con las ecuaciones de plano y recta.

$$r: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1, 0, 1) \\ \vec{v}_r = (4, 1, -1) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 0 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x - y - z = 0 \\ r: \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 0 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2(1 + 4\lambda) - \lambda - (1 - \lambda) = 0 \Rightarrow 2 + 8\lambda - \lambda - 1 + \lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{8} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 4\left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{8} \\ z = 1 - \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{9}{8} \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, \frac{9}{8}\right)$$

El punto de intersección de recta y plano tiene coordenadas $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, \frac{9}{8}\right)$.

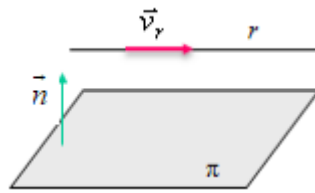
b) Cuando $a = b = 4$ la recta queda $r: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{-1}$ y el plano $\pi: 2x - y + 4z = 0$.

Estudiamos la posición relativa de recta y plano.

La recta tiene como vector director $\vec{v}_r = (4, 4, -1)$ y el plano tiene como vector normal el vector $\vec{n} = (2, -1, 4)$. Comprobamos si el producto escalar de ambos vectores es nulo.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (4, 4, -1) \\ \vec{n} = (2, -1, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n} = (4, 4, -1)(2, -1, 4) = 8 - 4 - 4 = 0$$

Al ser el producto escalar nulo la recta y el plano son paralelos o la recta está contenida en el plano. Calculamos la distancia de recta a plano.



La distancia de recta a plano es el valor de la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 2x - y + 4z = 0 \\ P_r(1, 0, 1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 - 0 + 4 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \frac{6}{\sqrt{21}} \text{ unidades}$$

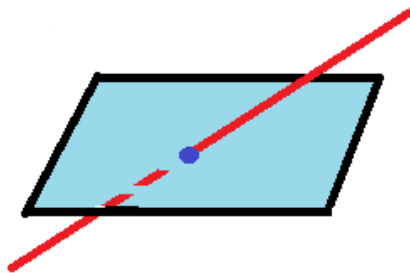
Al ser la distancia no nula la recta y el plano son paralelos situándose la recta a una distancia de $\frac{6}{\sqrt{21}}$ unidades del plano.

- c) Si el producto escalar del vector director de la recta y el normal del plano es no nulo la recta y el plano son secantes (coinciden en un punto). Si el producto es nulo recta y plano son paralelos o la recta está contenida en el plano.

$$\left. \begin{array}{l} r: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{a} = \frac{z-1}{-1} \rightarrow \vec{v}_r = (4, a, -1) \\ \pi: 2x - y + bz = 0 \rightarrow \vec{n} = (2, -1, b) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n} = (4, a, -1)(2, -1, b) = 8 - a - b$$

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow 8 - a - b = 0 \Rightarrow \boxed{8 - b = a}$$

Si $a \neq 8 - b$ recta y plano son secantes.



Si $a = 8 - b$ recta y plano son paralelos o la recta está contenida en el plano. Para que la recta esté contenida en el plano basta con que un punto de la recta pertenezca al plano.

$$\left. \begin{array}{l} r: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{8-b} = \frac{z-1}{-1} \rightarrow P_r = (1, 0, 1) \\ \pi: 2x - y + bz = 0 \\ P_r \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 1 - 0 + b \cdot 1 = 0 \Rightarrow \boxed{b = -2}$$

Aparecen dos situaciones distintas:

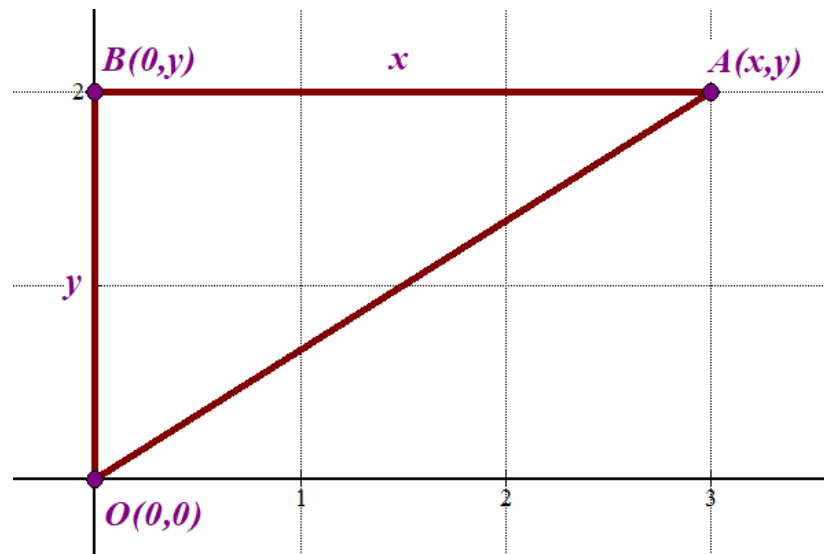
Si $a = 8 - b$ y $b = -2$ la recta está contenida en el plano. Si $a = 8 - b$ y $b \neq -2$ la recta es paralela al plano.

Resumiendo: Si $a \neq 8 - b$ recta y plano son secantes, si $a = 8 - b$ y $b = -2$ la recta está contenida en el plano y si $a = 8 - b$ y $b \neq -2$ la recta es paralela al plano.

PROBLEMA B.3. Se considera el triángulo T de vértices $O = (0, 0)$, $A = (x, y)$ y $B = (0, y)$, siendo $x > 0$, $y > 0$, y tal que la suma de las longitudes de los lados OA y AB es 30 metros. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El área del triángulo T en función de x . (3 puntos)
 b) El valor de x para el que dicha área es máxima. (5 puntos)
 c) El valor de dicha área máxima. (2 puntos)

a) Dibujamos un ejemplo de la situación planteada tomando $x = 3$ e $y = 2$.



Si aplicamos el teorema de Pitágoras tenemos:

$$OA^2 = OB^2 + AB^2 \Rightarrow OA^2 = y^2 + x^2 \Rightarrow OA = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Como la suma de las longitudes de los lados OA y AB es 30 metros tenemos:

$$OA + AB = 30 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + x = 30 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 30 - x \Rightarrow \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = (30 - x)^2 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 = 900 + x^2 - 60x \Rightarrow y^2 = 900 - 60x \Rightarrow y = \sqrt{900 - 60x}$$

El triángulo OAB es rectángulo en el vértice B . Su área es la mitad del producto de la base por la altura.

$$\text{Área } T = \frac{xy}{2} = \frac{x\sqrt{900-60x}}{2} = x\sqrt{225-15x} \Rightarrow A(x) = x\sqrt{225-15x}$$

a) Derivamos la función y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$A(x) = x\sqrt{225-15x} = \sqrt{225x^2 - 15x^3} \Rightarrow A'(x) = \frac{450x - 45x^2}{2\sqrt{225x^2 - 15x^3}}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{450x - 45x^2}{2\sqrt{225x^2 - 15x^3}} = 0 \Rightarrow 450x - 45x^2 = 0 \Rightarrow 10x - x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(10 - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 10 - x = 0 \rightarrow x = 10 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $(0,10)$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale

$$A'(5) = \frac{450 \cdot 5 - 45 \cdot 5^2}{2\sqrt{225 \cdot 5^2 - 15 \cdot 5^3}} = \frac{1125}{+} > 0. \text{ El área crece en el intervalo } (0,10).$$

- En el intervalo $(10,30)$ tomamos $x = 15$ y la derivada vale

$$A'(15) = \frac{450 \cdot 15 - 45 \cdot 15^2}{2\sqrt{225 \cdot 15^2 - 15 \cdot 15^3}} = \frac{-3375}{+} < 0. \text{ El área decrece en el intervalo } (10,30).$$

La función Área crece antes de $x = 10$ y decrece a partir de este valor por lo que el área es máxima para $x = 10$.

- b) Sustituimos el valor $x = 10$ en la función Área y obtenemos el valor máximo del área del triángulo T.

$$A(10) = 10\sqrt{225 - 150} = 50\sqrt{3} \approx 86.6 \text{ unidades cuadradas}$$