



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JUNY 2017	CONVOCATORIA: JUNIO 2017
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II
BAREMO DEL EXAMEN: Se elegirá solamente UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción. Cada problema se puntuará hasta 10 puntos. La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.	

OPCIÓN A

PROBLEMA A.1. Se da el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} -x + ay + 2z = a \\ 2x + ay - z = 2 \\ ax - y + 2z = a \end{cases}$$
 dependiente del

parámetro real a . Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- La solución del sistema cuando $a = 2$. (3 puntos)
- Los valores del parámetro a para los que el sistema es compatible y determinado. (3 puntos)
- El valor del parámetro a para el que el sistema es compatible e indeterminado (2 puntos)
y obtener todas las soluciones del sistema para ese valor de a . (2 puntos)

PROBLEMA A.2. Se dan el punto $P = (1, 1, 1)$, la recta $r: \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$ y el plano

$\pi: x + y + z = 1$. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado,** las ecuaciones de:

- El plano que contiene al punto P y a la recta r . (2 puntos)
- La recta s que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π , la distancia del punto P al plano π y el punto de intersección de la recta s con el plano π . (2+2+2 puntos)
- El plano σ que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π . (2 puntos)

PROBLEMA A.3. Se desea unir un punto M situado en un lado de una calle, de 6 m. de anchura, con el punto N situado en el otro lado de la calle, 18 m. más abajo, mediante dos cables rectos, uno desde M hasta un punto P , situado al otro lado de la calle, y otro desde el punto P hasta el punto N . Se representó la calle en un sistema cartesiano y resultó que $M = (0, 6)$, $P = (x, 0)$ y $N = (18, 0)$. El cable MP tiene que ser más grueso debido a que cruza la calle sin apoyos intermedios, siendo su precio de 10 €/m. El precio del cable PN es de 5 €/m.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- El costo total C de los dos cables en función de la abscisa x del punto P , cuando $0 \leq x \leq 18$. (3 puntos)
- El valor de x , con $0 \leq x \leq 18$, para el que el costo total C es mínimo. (4 puntos)
- El valor de dicho costo total mínimo. (3 puntos)

OPCIÓN B

PROBLEMA B.1. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La comprobación de que $C^2 = 2C - I$, siendo $C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3×3 . (2,5 puntos)
y el valor de la matriz C^4 . (2,5 puntos)

- b) El valor del determinante de la matriz $(3A^4)(4A^2)^{-1}$, sabiendo que A es una matriz cuadrada de cuatro columnas cuyo determinante vale -1 . (3 puntos)
c) La matriz B que admite inversa y que verifica la igualdad $B B = B$. (2 puntos)

PROBLEMA B.2. Sea T un tetraedro de vértices $O = (0,0,0)$, $A = (1,1,1)$, $B = (3,0,0)$ y $C = (0,3,0)$. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La ecuación del plano π que contiene a los puntos A , B y C . (1 punto)
y las ecuaciones de la recta h_0 perpendicular a π que pasa por O . (2 puntos)
b) El punto de intersección de la altura h_0 y el plano π . (3 puntos)
c) El área de la cara cuyos vértices son los puntos A , B y C , (2 puntos)
y el volumen del tetraedro T . (2 puntos)

PROBLEMA B.3. Dada la función f definida por $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$, para cualquier valor real $x \neq 0$, se pide obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f , (2 puntos)
y los extremos relativos de la función f . (1 punto)
b) Las asíntotas de la curva $y = f(x)$. (3 puntos)
c) El área de la región plana limitada por la curva $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$, $1 \leq x \leq e$, el segmento que une los puntos $(1,0)$ y $(e,0)$, y las rectas $x = 1$ y $x = e$. (4 puntos)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

PROBLEMA A.1. Se da el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} -x + ay + 2z = a \\ 2x + ay - z = 2 \\ ax - y + 2z = a \end{cases}$$
 dependiente del parámetro real a . Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) La solución del sistema cuando $a = 2$. (3 puntos)

b) Los valores del parámetro a para los que el sistema es compatible y determinado. (3 puntos)

c) El valor del parámetro a para el que el sistema es compatible e indeterminado (2 puntos) y obtener todas las soluciones del sistema para ese valor de a . (2 puntos)

a) Cuando $a = 2$ el sistema queda
$$\begin{cases} -x + 2y + 2z = 2 \\ 2x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + 2z = 2 \end{cases}$$
. Lo resolvemos utilizando el método de Gauss.

$$\begin{cases} -x + 2y + 2z = 2 \\ 2x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 2ª} \\ 2x \quad -y \quad +2z = 2 \\ -2x \quad -2y \quad +z = -2 \\ \hline -3y \quad +3z = 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} + 2 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ 2x \quad +2y \quad -z = 2 \\ -2x \quad +4y \quad +4z = 4 \\ \hline 6y \quad +3z = 6 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y + 2z = 2 \\ 6y + 3z = 6 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x + 2y + 2z = 2 \\ 2y + z = 2 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{Ecuación 3ª} + \text{Ecuación 2ª} \\ -2y \quad +2z = 0 \\ 2y \quad +z = 2 \\ \hline 3z = 2 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x + 2y + 2z = 2 \\ 2y + z = 2 \\ 3z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y + 2z = 2 \\ 2y + z = 2 \\ \boxed{z = \frac{2}{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y + 2 \cdot \frac{2}{3} = 2 \\ 2y + \frac{2}{3} = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 2 - \frac{4}{3} \\ 2y = 2 - \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 2 - \frac{4}{3} \\ 2y = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 2 - \frac{4}{3} \\ y = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow -x + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = \frac{-2}{3} \Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{3}}$$

La solución es $x = y = z = \frac{2}{3}$.

- b) Para que el sistema sea compatible y determinado la matriz de coeficientes y la matriz ampliada deben tener rango 3, mismo valor que el número de incógnitas.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & 2 \\ 2 & a & -1 \\ a & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad A/B = \begin{pmatrix} -1 & a & 2 & a \\ 2 & a & -1 & 2 \\ a & -1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

Comprobamos cuando el determinante de la matriz A se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & a & 2 \\ 2 & a & -1 \\ a & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2a - a^2 - 4 - 2a^2 - 4a + 1 = -3a^2 - 6a - 3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -3a^2 - 6a - 3 = 0 \Rightarrow a^2 + 2a + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Para $a = -1$ el determinante de A se anula y su rango es menor de 3.

Para $a \neq -1$ el determinante de A no se anula y el rango de la matriz A es 3. El rango de la matriz ampliada A/B también es 3 e igual que el número de incógnitas.

Para $a \neq -1$ el sistema es compatible y determinado.

- c) En el apartado anterior hemos visto que para $a = -1$ el determinante de A se anula. Estudiamos el rango de A y el de la matriz ampliada A/B para este valor. Para ello utilizamos el método de Gauss para triangular la matriz A/B.

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - \text{Fila 1}^a \\ -1 \quad -1 \quad 2 \quad -1 \\ 1 \quad 1 \quad -2 \quad 1 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad -1 \quad -1 \quad 2 \\ -2 \quad -2 \quad 4 \quad -2 \\ \hline 0 \quad -3 \quad 3 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} & \overbrace{\begin{array}{ccc} -1 & -1 & 2 \end{array}}^{A/B} & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A & & & \end{array} \right)$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3).

Para $a = -1$ el sistema es compatible indeterminado.

Obtenemos las soluciones partiendo del sistema triangular obtenido.

$$\left(\begin{array}{cccc} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -x - y + 2z = -1 \\ -3y + 3z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -x - y + 2z = -1 \\ y - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -x - y + 2z = -1 \\ \boxed{y = z} \end{array} \right\} \Rightarrow -x - z + 2z = -1 \Rightarrow -x + z = -1 \Rightarrow \boxed{x = 1 + z}$$

Las soluciones del sistema para $a = -1$ son $x = 1 + \lambda$; $y = \lambda$; $z = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$

PROBLEMA A.2. Se dan el punto $P=(1, 1, 1)$, la recta $r: \begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x+2y-z-1=0 \end{cases}$ y el plano $\pi: x+y+z=1$. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**, las ecuaciones de:

- a) El plano que contiene al punto P y a la recta a r . (2 puntos)
 b) La recta s que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π , la distancia del punto P al plano π y el punto de intersección de la recta s con el plano π . (2+2+2 puntos)
 c) El plano σ que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π . (2 puntos)

a) Obtenemos un punto y un vector director de la recta r .

$$r: \begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x+2y-z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y+z-1 \\ x+2y-z-1=0 \end{cases} \Rightarrow -y+z-1+2y-z-1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-2=0 \Rightarrow \boxed{y=2} \Rightarrow x=-2+z-1=-3+z \Rightarrow r: \begin{cases} x=-3+\lambda \\ y=2 \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(-3, 2, 0) \\ \vec{v}_r=(1, 0, 1) \end{cases}$$

El plano π' que contiene al punto P y a la recta r tiene como vectores directores el vector director de la recta: $\vec{v}_r=(1, 0, 1)$ y el vector que une el punto P y el punto P_r de la recta.

$$\pi': \begin{cases} P=(1, 1, 1) \in \pi' \\ \vec{u}=\overrightarrow{PP_r}=(-3, 2, 0)-(1, 1, 1)=(-4, 1, -1) \\ \vec{v}=\vec{v}_r=(1, 0, 1) \end{cases} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-1-y+1+0-z+1+4y-4+0=0 \Rightarrow \boxed{\pi': x+3y-z-3=0}$$

- b) Si la recta s es perpendicular al plano π tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi: x+y+z=1 \Rightarrow \vec{n}=(1, 1, 1)$$

$$s: \begin{cases} \vec{u}_s=\vec{n}=(1, 1, 1) \\ P(1, 1, 1) \in s \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z=1+\lambda \end{cases}$$

Hallamos la distancia del punto P al plano π .

$$\left. \begin{array}{l} \pi: x+y+z-1=0 \\ P(1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, \pi) = \frac{|1+1+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ unidades}$$

Hallamos el punto Q intersección de la recta s con el plano π .

$$\pi: x+y+z=1 \left. \begin{array}{l} s: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 1+\lambda+1+\lambda+1+\lambda=1 \Rightarrow 3\lambda=-2 \Rightarrow \lambda=-\frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \\ y=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \\ z=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

- c) El plano σ que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π contiene al punto $P_r(-3, 2, 0)$ de la recta r y tiene como vectores directores el vector director de la recta $\vec{v}_r = (1, 0, 1)$ y el vector normal del plano π : $\vec{n} = (1, 1, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(-3, 2, 0) \in \sigma \\ \vec{u} = \vec{v}_r = (1, 0, 1) \\ \vec{v} = \vec{n} = (1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma: \begin{vmatrix} x+3 & y-2 & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 0+y-2+z-0-y+2-x-3=0 \Rightarrow$$

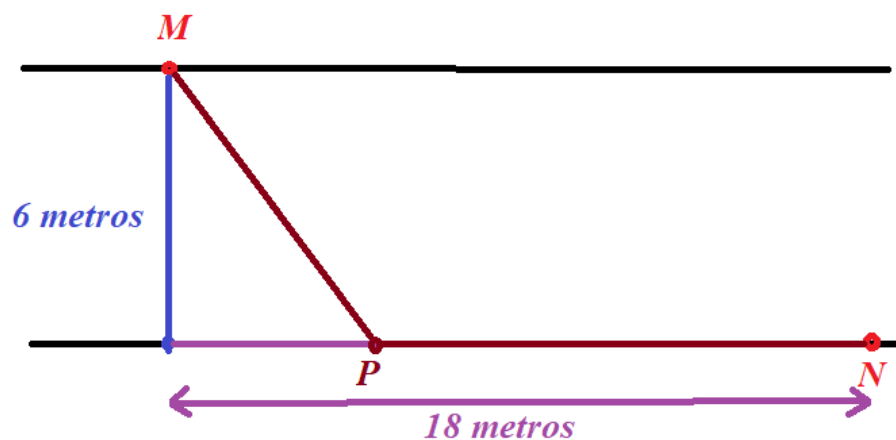
$$\Rightarrow -x+z-3=0 \Rightarrow \boxed{\sigma: x-z+3=0}$$

PROBLEMA A.3. Se desea unir un punto M situado en un lado de una calle, de 6 m. de anchura, con el punto N situado en el otro lado de la calle, 18 m. más abajo, mediante dos cables rectos, uno desde M hasta un punto P , situado al otro lado de la calle, y otro desde el punto P hasta el punto N . Se representó la calle en un sistema cartesiano y resultó que $M = (0, 6)$, $P = (x, 0)$ y $N = (18, 0)$. El cable MP tiene que ser más grueso debido a que cruza la calle sin apoyos intermedios, siendo su precio de 10 €/m. El precio del cable PN es de 5 €/m.

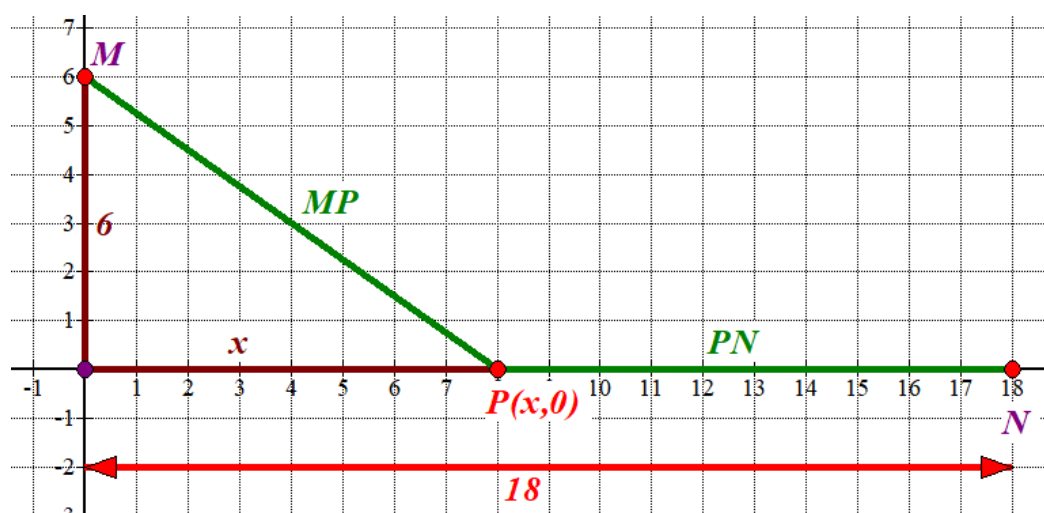
Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- El costo total C de los dos cables en función de la abscisa x del punto P , cuando $0 \leq x \leq 18$. (3 puntos)
- El valor de x , con $0 \leq x \leq 18$, para el que el costo total C es mínimo. (4 puntos)
- El valor de dicho costo total mínimo. (3 puntos)

Realizamos un dibujo descriptivo de la situación planteada.



Representamos esta situación en un sistema cartesiano.



La longitud del cable PN es $18 - x$, como cuesta a 5 €/m el coste de este cable es $5(18 - x) = 90 - 5x$.

La longitud del cable MP lo obtenemos usando el teorema de Pitágoras:

$$MP^2 = 6^2 + x^2 \Rightarrow MP = \sqrt{36 + x^2}$$

Como este cable cuesta a 10 €/m el coste del cable MP es $10\sqrt{36 + x^2}$.

El coste total del cable de M a N es la suma de ambos costes:

$$C(x) = 90 - 5x + 10\sqrt{36 + x^2}; \quad 0 \leq x \leq 18$$

b) Derivamos la función coste e igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$C(x) = 90 - 5x + 10\sqrt{36 + x^2} \Rightarrow C'(x) = -5 + 10 \frac{2x}{2\sqrt{36 + x^2}} = -5 + \frac{10x}{\sqrt{36 + x^2}}$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow -5 + \frac{10x}{\sqrt{36 + x^2}} = 0 \Rightarrow \frac{10x}{\sqrt{36 + x^2}} = 5 \Rightarrow 10x = 5\sqrt{36 + x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = \sqrt{36 + x^2} \Rightarrow (2x)^2 = (\sqrt{36 + x^2})^2 \Rightarrow 4x^2 = 36 + x^2 \Rightarrow 3x^2 = 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{36}{3} = 12 \Rightarrow x = \sqrt{12} \approx 3.46 \text{ metros}$$

Comprobamos que en $x = \sqrt{12}$ hay un mínimo viendo si decrece antes y crece después de este valor.

- Antes de $x = \sqrt{12} \approx 3.46$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale

$$C'(2) = -5 + \frac{10 \cdot 2}{\sqrt{36 + 2^2}} \approx -1.84 < 0. \text{ La función decrece antes de } x = \sqrt{12}.$$

- Después de $x = \sqrt{12} \approx 3.46$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale

$$C'(4) = -5 + \frac{10 \cdot 4}{\sqrt{36 + 4^2}} \approx 0.34 > 0. \text{ La función crece después de } x = \sqrt{12}.$$

Como la función decrece en el intervalo $(0, \sqrt{12})$ y crece en el intervalo $(\sqrt{12}, 18)$ podemos afirmar que la función tiene un valor mínimo en $x = \sqrt{12}$.

El cable tiene un coste mínimo si elegimos el punto $P(\sqrt{12}, 0)$

c) El coste total mínimo es $C(\sqrt{12}) = 90 - 5\sqrt{12} + 10\sqrt{36 + (\sqrt{12})^2} = 90 + 30\sqrt{3} \approx 141.96 \text{ €}.$

OPCIÓN B

PROBLEMA B.1. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La comprobación de que $C^2 = 2C - I$, siendo $C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad

de orden 3×3 .

(2,5 puntos)

y el valor de la matriz C^4 .

(2,5 puntos)

b) El valor del determinante de la matriz $(3A^4)(4A^2)^{-1}$, sabiendo que A es una matriz cuadrada de cuatro columnas cuyo determinante vale -1 .

(3 puntos)

c) La matriz B que admite inversa y que verifica la igualdad $B B = B$.

(2 puntos)

a) Calculamos cada miembro de la igualdad y comprobamos que son iguales.

$$C^2 = C \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25-8-8 & -20+4+8 & 10-4-2 \\ 10-2-4 & -8+1+4 & 4-1-1 \\ -20+8+4 & 16-4-4 & -8+4+1 \end{pmatrix}$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2C - I = 2 \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-1 & -8 & 4 \\ 4 & -2-1 & 2 \\ -8 & 8 & -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

La igualdad es cierta.

Calculamos la expresión de C^4 .

$$C^4 = C^2 \cdot C^2 = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81-32-32 & -72+24+32 & 36-16-12 \\ 36-12-16 & -32+9+16 & 16-6-6 \\ -72+32+24 & 64-24-24 & -32+16+9 \end{pmatrix}$$

$$C^4 = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

b) Si A una matriz cuadrada de orden 4 también lo es la matriz A^2 y A^4 . Si A es una matriz cuadrada de orden 4 entonces $|3A| = 3^4 |A|$. Otra propiedad es $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

$$\left| (3A^4)(4A^2)^{-1} \right| = |3A^4| \left| (4A^2)^{-1} \right| = 3^4 |A^4| \frac{1}{|4A^2|} = 3^4 |A|^4 \frac{1}{4^4 |A|^2} = \frac{3^4 |A|^4}{4^4 |A|^2} = \frac{3^4 (-1)^4}{4^4 (-1)^2} = \frac{81}{256}$$

c) Multiplicamos en la igualdad por la inversa de B .

$$B B = B \Rightarrow B B \cdot B^{-1} = B \cdot B^{-1} \Rightarrow B \cdot I = I \Rightarrow B = I$$

PROBLEMA B.2. Sea T un tetraedro de vértices $O = (0,0,0)$, $A = (1,1,1)$, $B = (3,0,0)$ y $C = (0,3,0)$. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La ecuación del plano π que contiene a los puntos A , B y C . (1 punto)
 y las ecuaciones de la recta h_0 perpendicular a π que pasa por O . (2 puntos)
 b) El punto de intersección de la altura h_0 y el plano π . (3 puntos)
 c) El área de la cara cuyos vértices son los puntos A , B y C , (2 puntos)
 y el volumen del tetraedro T . (2 puntos)

a) El plano π que contiene a los puntos A , B y C tiene como vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\pi : \begin{cases} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3,0,0) - (1,1,1) = (2,-1,-1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0,3,0) - (1,1,1) = (-1,2,-1) \\ B(3,0,0) \in \pi \end{cases} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 3 + y + 4z - z + 2y + 2x - 6 = 0 \Rightarrow 3x + 3y + 3z - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi : x + y + z - 3 = 0$$

La recta h_0 perpendicular a π tiene como vector director el vector normal al plano.

$$\pi : x + y + z - 3 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1,1,1)$$

$$h_0 : \begin{cases} O(0,0,0) \in h_0 \\ \vec{v} = \vec{n} = (1,1,1) \end{cases} \Rightarrow h_0 : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

b) Resolvemos el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y + z - 3 = 0 \\ h_0 : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda + \lambda + \lambda - 3 = 0 \Rightarrow 3\lambda = 3 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1,1,1)$$

El punto de corte de recta y plano es el punto $A(1, 1, 1)$.

c) Hallamos el área del triángulo ABC como la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, -1, -1) \\ \overrightarrow{AC} = (-1, 2, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = i + j + 4k - k + 2j + 2i = 3i + 3j + 3k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (3, 3, 3) \Rightarrow \text{Área } ABC = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2}}{2} = \frac{\sqrt{27}}{2} u^2$$

El volumen del tetraedro T con vértices en O, A, B y C es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO}]$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, -1, -1) \\ \overrightarrow{AC} = (-1, 2, -1) \\ \overrightarrow{AO} = (0, 0, 0) - (1, 1, 1) = (-1, -1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO}] = -4 - 1 - 1 - 2 + 1 - 2 = -9$$

$$\text{Volumen } T = \frac{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO}]}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \text{ unidades cúbicas}$$

PROBLEMA B.3. Dada la función f definida por $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, para cualquier valor real $x \neq 0$, se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f , (2 puntos)
 y los extremos relativos de la función f . (1 punto)
 b) Las asíntotas de la curva $y = f(x)$. (3 puntos)
 c) El área de la región plana limitada por la curva $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, $1 \leq x \leq e$, el segmento que une los puntos $(1,0)$ y $(e,0)$, y las rectas $x = 1$ y $x = e$. (4 puntos)

a) Obtenemos la derivada y la igualamos a cero, en busca de sus puntos críticos.

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot x - 1 \cdot (x^2+1)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

La función presenta dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores. Como el dominio de la función es $\mathbb{R} - \{0\}$, incluimos $x = 0$.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = \frac{(-2)^2 - 1}{(-2)^2} = \frac{3}{4} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty, -1).$$

- En el intervalo $(-1, 0)$ tomamos $x = -0.5$ y la derivada vale

$$f'(-0.5) = \frac{(-0.5)^2 - 1}{(-0.5)^2} = -3 < 0. \text{ La función decrece en } (-1, 0).$$

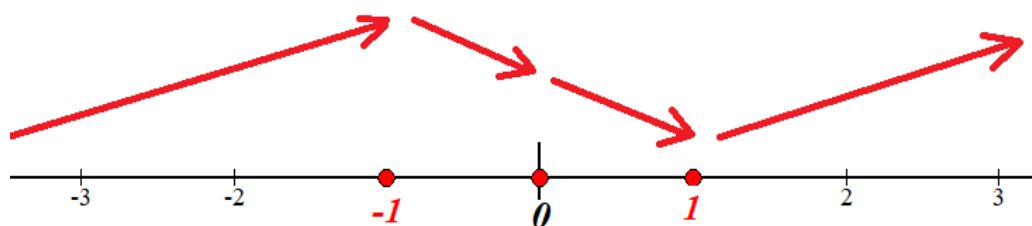
- En el intervalo $(0, 1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale

$$f'(0.5) = \frac{0.5^2 - 1}{0.5^2} = -3 < 0. \text{ La función decrece en } (0, 1).$$

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{2^2 - 1}{2^2} = \frac{3}{4} > 0$.

La función crece en $(1, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

La función presenta un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 1$.

b) El dominio de la función $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ es $\mathbb{R} - \{0\}$.

Asíntota vertical. $x = a$

¿ $x = 0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x} = \frac{0^2+1}{0} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x = 0$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

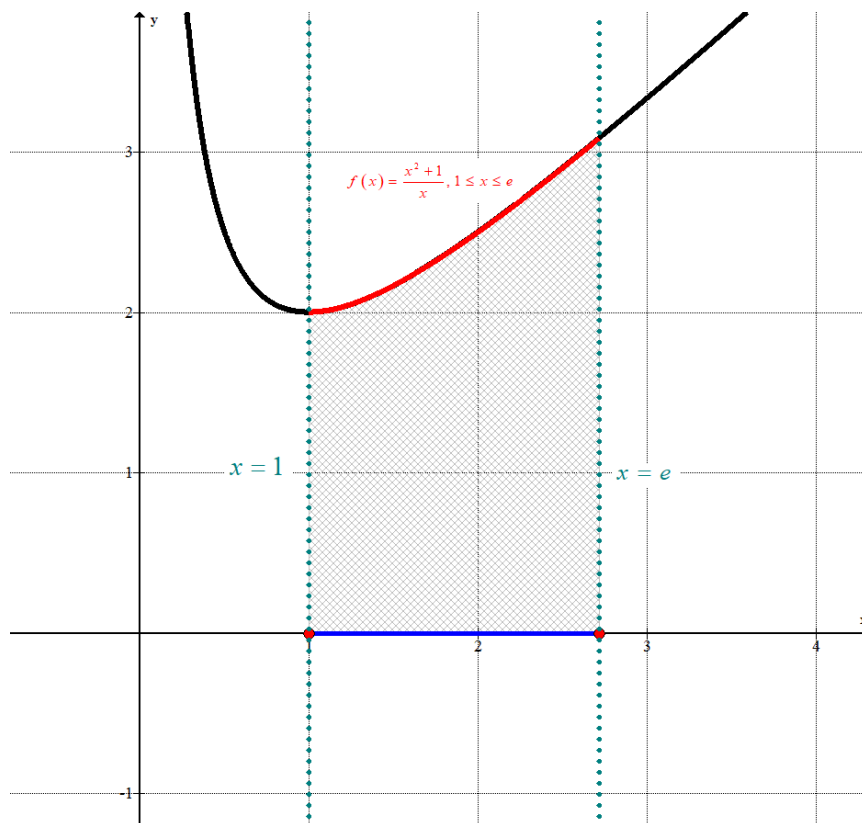
Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2+1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La asíntota oblicua tiene ecuación $y = x$.

c) Dibujamos la región plana limitada por la curva $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, $1 \leq x \leq e$, el segmento que une los puntos $(1,0)$ y $(e,0)$, y las rectas $x=1$ y $x=e$.



Mirando el dibujo y contando cuadraditos de 1 unidad cuadrada se observa que el área pedida valdrá entre 4 y 5 unidades cuadradas.

Calculamos el valor del área de forma más precisa como la integral definida de la función entre 1 y e.

$$\text{Área} = \int_1^e \frac{x^2+1}{x} dx = \int_1^e \frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} dx = \int_1^e x + \frac{1}{x} dx = \left[\frac{x^2}{2} + \ln x \right]_1^e =$$

$$= \left[\frac{e^2}{2} + \ln e \right] - \left[\frac{1^2}{2} + \ln 1 \right] = \frac{e^2}{2} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{e^2+1}{2} \approx 4.1945 \text{ unidades cuadradas}$$