



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA
UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: EJEMPLO EXAMEN 2024	CONVOCATORIA: EJEMPLO EXAMEN 2024
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II
BAREMO DEL EXAMEN: El alumnado contestará solo CUATRO problemas entre los OCHO propuestos. <u>Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.</u> La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 4 y aproximada a las centésimas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.	

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

Problema 1 (10 puntos) Sea el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} x - y + az = -2 \\ -x + 2y - az = 3, \text{ donde } a \text{ es un} \\ ax + y + z = 2 \end{cases}$$
 parámetro real. Obtener:

- [5 pts.] El estudio del sistema en función del parámetro a .
- [5 pts.] Las soluciones del sistema cuando éste sea compatible.

Problema 2 (10 puntos) Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Obtener (con los cálculos intermedios necesarios, así como con la mención explícita de los teoremas o propiedades utilizados):

- [7 pts.] Las matrices A^{-1} y $B = A^3 - 3A^2 + 5A$.
- [3 pts.] Los valores α y β tales que $\alpha A^2 + \beta A + U = A^{-1}$.

Problema 3 (10 puntos) Se dan las funciones polinómicas $f(x) = -x^2 + x + 2$ y $g(x) = x^2 - b$, siendo b un parámetro real. Obtener:

- [5 pts.] El valor de b para que uno de los puntos de intersección de las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - b$ sea el punto $P = (-1, 0)$. Dibujad un esquema de las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - 1$.
- [5 pts.] El área de la superficie finita encerrada entre las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - 1$.

Problema 4 (10 puntos) Una ventana Norman está formada por un rectángulo y un semicírculo. El semicírculo está apoyado sobre el lado horizontal superior del rectángulo, que coincide con el diámetro horizontal del semicírculo.

La base del rectángulo mide x y su altura mide y , por lo que el diámetro del semicírculo mide x .

Obtener:

- a) [4 pts.] La expresión $S(x)$ que da el área de una ventana Norman de perímetro 5 metros en función de su anchura x .
- b) [6 pts.] El valor de x para el que la función $S(x)$ tenga un máximo relativo y el valor de dicha área máxima.

Problema 5 (10 puntos) Dadas las rectas $r: \begin{cases} y - z = 0 \\ 2x + 2 = 0 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{3} = z + 2 \end{cases}$, obtener:

- a) [5 pts.] La ecuación del plano π paralelo a ambas y que pase por el origen.
- b) [5 pts.] La distancia de un punto de r y de un punto de s al plano π .

Problema 6 (10 puntos) Dadas la recta r y el plano π , de ecuaciones $r = \frac{x-5}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$ y $\pi = ax + y - z = b$, con a y b parámetros reales, obtener:

- a) [4 pts.] Los valores del parámetro a para los que r y π se cortan en un único punto y calcular las coordenadas de dicho punto en función del parámetro a .
- b) [6 pts.] Los valores de a y b tales que la recta r esté contenida en el plano π y los valores de los parámetros para que la recta r no corte al plano π .

Problema 7 (10 puntos) Una máquina funciona en modo automático el 70% de los días y de modo manual el resto de los días. La probabilidad de que tenga un fallo cuando funciona en modo automático es 0.15. La probabilidad de que tenga un fallo cuando funciona en modo manual es 0.05.

Obtener:

- a) [5 pts.] La probabilidad de que no tenga ningún fallo.
- b) [5 pts.] Si un día tiene un fallo, ¿cuál es la probabilidad de que haya funcionado en modo manual?

Problema 8. Un usuario de internet sabe que en el 60% de las compras que realiza no tiene ningún problema. Si en un día realiza 8 compras, calcular

- a) [4 pts.] La probabilidad de que, como máximo en 6, no tenga ningún problema.
- b) [3 pts.] La probabilidad de que no tenga problemas al menos en 4 compras.
- c) [3 pts.] La probabilidad de que no tenga problemas en más de 3 y como máximo en 7 compras.

Soluciones

Problema 1 (10 puntos) Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - y + az = -2 \\ -x + 2y - az = 3, \text{ donde } a \text{ es} \\ ax + y + z = 2 \end{cases}$$

un parámetro real. Obtener:

- a) [5 pts.] El estudio del sistema en función del parámetro a .
b) [5 pts.] Las soluciones del sistema cuando éste sea compatible.

a) La matriz de coeficientes A y la matriz ampliada del sistema A/B son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & 2 & -a \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & -2 \\ -1 & 2 & -a & 3 \\ a & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & 2 & -a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + a^2 - a - 2a^2 - 1 + a = -a^2 + 1$$

Averiguamos cuando se anula el determinante.

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \sqrt{1} = \pm 1$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq -1$ y $a \neq 1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. El rango de la matriz A/B también es 3, al igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $a = -1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que

resulta de quitar la primera fila y la primera columna su determinante es no nulo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

El rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Como la primera columna y la

tercera son proporcionales consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la primera columna y vemos si su determinante es nulo o no.

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 3 - 4 + 2 + 4 + 3 = 0$$

Al ser nulo el rango de A/B no es 3 y tiene rango 2 igual que la matriz A.

El rango de A y el de A/B son iguales (2), pero es menor que el número de incógnitas (3).

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $a=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que

resulta de quitar la primera fila y la primera columna su determinante es no nulo.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0$$

El rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Como la primera columna y la

tercera son iguales consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la primera columna y vemos si su determinante es nulo o no.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 3 - 4 - 2 - 4 + 3 = -2 \neq 0$$

Al no ser nulo el rango de A/B es 3.

El rango de A y el de A/B son distintos. El sistema es incompatible (sin solución).

Resumiendo: Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado, si $a = -1$ el sistema es compatible indeterminado y si $a = 1$ el sistema es incompatible.

b) Resolvemos el sistema para $a \neq -1$ y $a \neq 1$. Utilizamos el método de Cramer.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & 2 & -a \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & -2 \\ -1 & 2 & -a & 3 \\ a & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 & a \\ 3 & 2 & -a \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & 2 & -a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-4 + 2a + 3a - 4a + 3 - 2a}{1 - a^2} = \frac{-1 - a}{(1-a)(1+a)} = \frac{-\cancel{(1+a)}}{(1-a)\cancel{(1+a)}} = \frac{-1}{1-a}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ -1 & 3 & -a \\ a & 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3 + 2a^2 - 2a - 3a^2 - 2 + 2a}{1 - a^2} = \frac{-a^2 + 1}{1 - a^2} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ a & 1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{4 - 3a + 2 + 4a - 2 - 3}{1 - a^2} = \frac{\cancel{a+1}}{(1-a)\cancel{(1+a)}} = \frac{1}{1-a}$$

La solución del sistema para $a \neq -1$ y $a \neq 1$ es $x = \frac{-1}{1-a}$; $y = 1$; $z = \frac{1}{1-a}$

Resolvemos el sistema para $a = -1$.

El sistema queda $\begin{cases} x - y - z = -2 \\ -x + 2y + z = 3 \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$. Observamos que la primera y la tercera ecuación son la

misma. Resolvemos el sistema equivalente formado por las dos primeras ecuaciones.

$$\begin{cases} x - y - z = -2 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 + y + z \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow 2 - y - z + 2y + z = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 1} \Rightarrow \boxed{x = -2 + 1 + z = -1 + z}$$

Las soluciones del sistema para $a = -1$ son $x = -1 + \lambda$; $y = 1$; $z = \lambda$, siendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Problema 2 (10 puntos) Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Obtener (con los cálculos intermedios necesarios, así como con la mención explícita de los teoremas o propiedades utilizados):

a) [7 pts.] Las matrices A^{-1} y $B = A^3 - 3A^2 + 5A$.

b) [3 pts.] Los valores α y β tales que $\alpha A^2 + \beta A + U = A^{-1}$.

a) Comprobamos que existe la inversa de la matriz A y la calculamos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 + 0 - 0 + 2 + 0 = 5 \neq 0 \quad \text{Existe la inversa.}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^T)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{5} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz B. Para ello calculamos primero las potencias de A necesarias.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 2+2 & 2 \\ -1-1+1 & -2+1 & 1+1 \\ 1+1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-4+2 & -2+4 & 4+2 \\ -1+1+2 & -2-1 & -1+2 \\ 2-2+1 & 4+2 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = A^3 - 3A^2 + 5A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -3+3+5 & 2-12+10 & 6-6+0 \\ 2+3-5 & -3+3+5 & 1-6+5 \\ 1-6+5 & 6-6+0 & 3-3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 5U$$

b) Resolvemos la ecuación matricial $\alpha A^2 + \beta A + U = A^{-1}$.

$$\alpha A^2 + \beta A + U = A^{-1} \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\alpha + \beta + 1 & 4\alpha + 2\beta & 2\alpha \\ -\alpha - \beta & -\alpha + \beta + 1 & 2\alpha + \beta \\ 2\alpha + \beta & 2\alpha & \alpha + \beta + 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta + 1 = \frac{1}{5} \\ 4\alpha + 2\beta = \frac{-2}{5} \\ 2\alpha = \frac{2}{5} \\ -\alpha - \beta = \frac{2}{5} \\ 2\alpha + \beta = \frac{-1}{5} \\ \alpha + \beta + 1 = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta = \frac{1}{5} - 1 = \frac{-4}{5} \\ 4\alpha + 2\beta = \frac{-2}{5} \\ \boxed{\alpha = \frac{1}{5}} \\ \alpha + \beta = \frac{-2}{5} \\ 2\alpha + \beta = \frac{-1}{5} \\ \alpha + \beta = \frac{3}{5} - 1 = \frac{-2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{5} + \beta = \frac{-4}{5} \rightarrow \boxed{\beta = \frac{-4}{5} + \frac{1}{5} = \frac{-3}{5}} \\ 4\frac{1}{5} + 2\beta = \frac{-2}{5} \rightarrow 2\beta = \frac{-2}{5} - \frac{4}{5} = \frac{-6}{5} \\ \frac{1}{5} + \beta = \frac{-2}{5} \rightarrow \beta = \frac{-2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{-3}{5} \\ 2\frac{1}{5} + \beta = \frac{-1}{5} \rightarrow \beta = \frac{-1}{5} - \frac{2}{5} = \frac{-3}{5} \\ \frac{1}{5} + \beta = \frac{-2}{5} \rightarrow \beta = \frac{-2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{-3}{5} \end{cases}$$

Los valores buscados son $\alpha = \frac{1}{5}$ y $\beta = \frac{-3}{5}$.

OTRA FORMA DE RESOLVER EL APARTADO b)

Hemos visto en el apartado a) que $B = A^3 - 3A^2 + 5A = 5U$. Sacamos A factor común en el primer miembro de la igualdad.

$$A^3 - 3A^2 + 5A = 5U \Rightarrow A(A^2 - 3A + 5U) = 5U \Rightarrow A \cdot \frac{1}{5}(A^2 - 3A + 5U) = U \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{1}{5}A^2 - \frac{3}{5}A + \frac{5}{5}U\right) = U \Rightarrow A\left(\frac{1}{5}A^2 - \frac{3}{5}A + U\right) = U \Rightarrow \frac{1}{5}A^2 - \frac{3}{5}A + U = A^{-1}$$

Como buscamos valores α y β tales que $\alpha A^2 + \beta A + U = A^{-1}$ estos son $\alpha = \frac{1}{5}$ y $\beta = \frac{-3}{5}$.

Problema 3 (10 puntos) Se dan las funciones polinómicas $f(x) = -x^2 + x + 2$ y $g(x) = x^2 - b$, siendo b un parámetro real. Obtener:

- a) [5 pts.] El valor de b para que uno de los puntos de intersección de las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - b$ sea el punto $P = (-1, 0)$. Dibujad un esquema de las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - 1$.
- b) [5 pts.] El área de la superficie finita encerrada entre las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - 1$.

a) Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^2 + x + 2 \\ g(x) = x^2 - b \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow -x^2 + x + 2 = x^2 - b \Rightarrow -2x^2 + x + 2 + b = 0$$

Como la intersección debe ser el punto $P(-1, 0)$ el valor de $x = -1$ debe cumplir la ecuación.

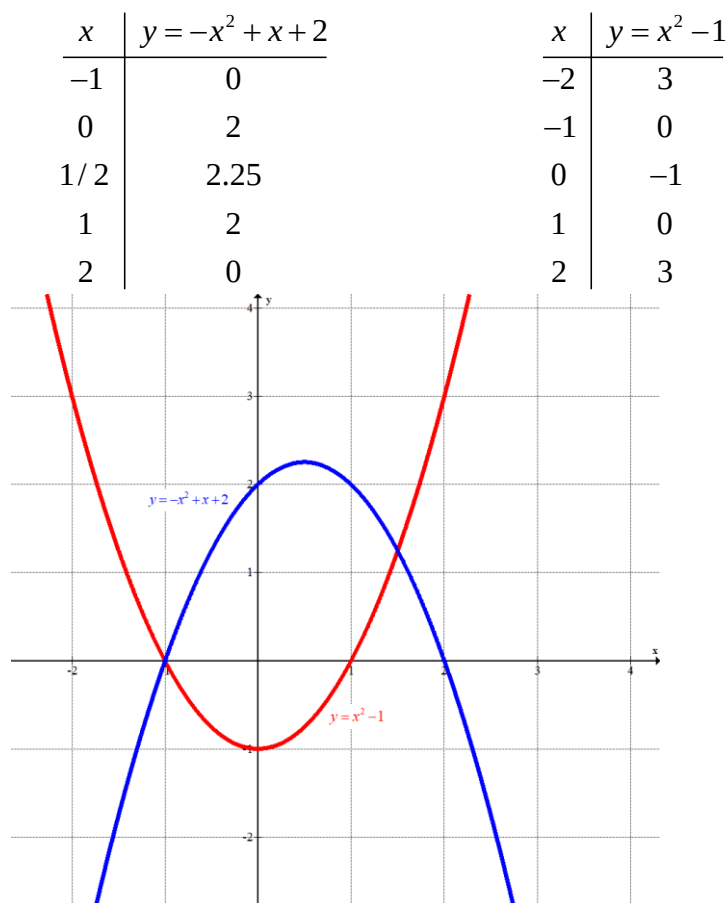
$$-2(-1)^2 + (-1) + 2 + b = 0 \Rightarrow -2 - 1 + 2 + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

El valor buscado es $b = 1$.

Las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son dos parábolas. Averiguamos el vértice y hacemos una tabla de valores de cada una para poder dibujar sus graficas.

$$y = -x^2 + x + 2 \Rightarrow y' = -2x + 1 = 0 \Rightarrow -2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$y = x^2 - 1 \Rightarrow y' = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$



b) Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$\begin{cases} y = -x^2 + x + 2 \\ y = x^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow -x^2 + x + 2 = x^2 - 1 \Rightarrow -2x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow$$

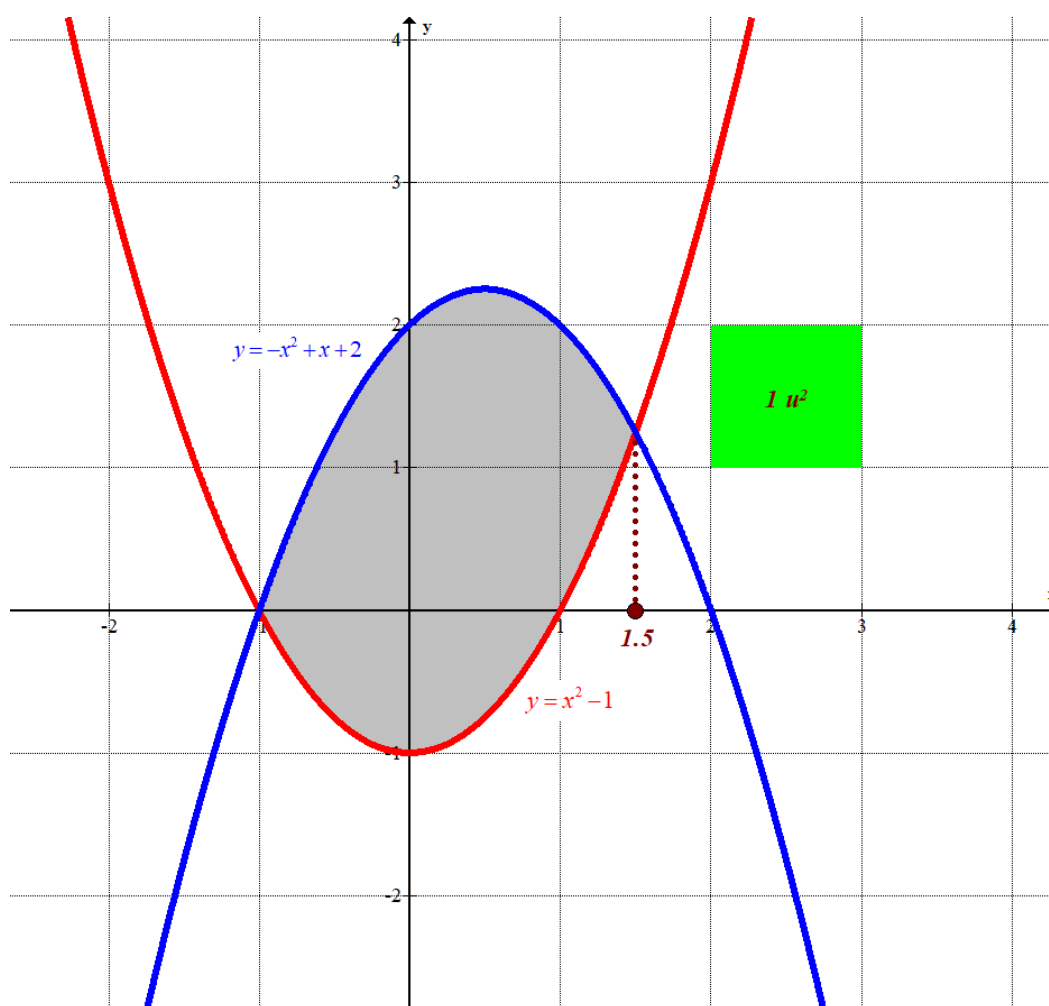
$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)(3)}}{2(-2)} = \frac{-1 \pm 5}{-4} = \begin{cases} \frac{-1-5}{-4} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2} = 1.5 \\ \frac{-1+5}{-4} = -1 \end{cases}$$

El área de la región limitada por las dos gráficas es el valor de la integral definida entre $x = -1$ y $x = 1.5$ de la diferencia entre las dos funciones.

$$\text{Área} = \int_{-1}^{1.5} (-x^2 + x + 2 - (x^2 - 1)) dx = \int_{-1}^{1.5} -x^2 + x + 2 - x^2 + 1 dx = \int_{-1}^{1.5} -2x^2 + x + 3 dx =$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + 3x \right]_{-1}^{1.5} = \left[-\frac{2}{3}(1.5)^3 + \frac{(1.5)^2}{2} + 3(1.5) \right] - \left[-\frac{2}{3}(-1)^3 + \frac{(-1)^2}{2} + 3(-1) \right] =$$

$$= -\frac{9}{4} + \frac{9}{8} + \frac{9}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 3 = \boxed{\frac{125}{24} \approx 5.2 \text{ u}^2}$$

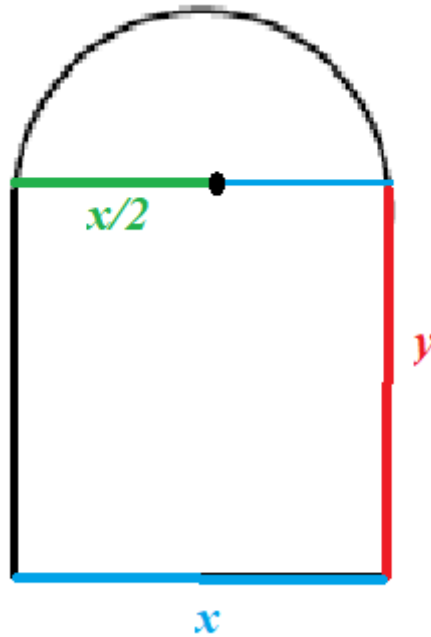


Problema 4 (10 puntos) Una ventana Norman está formada por un rectángulo y un semicírculo. El semicírculo está apoyado sobre el lado horizontal superior del rectángulo, que coincide con el diámetro horizontal del semicírculo.

La base del rectángulo mide x y su altura mide y , por lo que el diámetro del semicírculo mide x . Obtener:

- [4 pts.] La expresión $S(x)$ que da el área de una ventana Norman de perímetro 5 metros en función de su anchura x .
- [6 pts.] El valor de x para el que la función $S(x)$ tenga un máximo relativo y el valor de dicha área máxima.

a) Realizamos un dibujo de la ventana indicando las longitudes de cada lado.



El perímetro de la ventana es la suma de los tres lados rectos y la longitud de la semicircunferencia.

$$\left. \begin{aligned} \text{Perímetro} &= x + 2y + \frac{2\pi \frac{x}{2}}{2} = x + 2y + \frac{\pi x}{2} \\ \text{Perímetro} &= 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x + 2y + \frac{\pi x}{2} = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 4y + \pi x = 10 \Rightarrow 4y = 10 - 2x - \pi x \Rightarrow y = \frac{10 - 2x - \pi x}{4} = 2.5 - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}x$$

Buscamos la expresión de la superficie de la ventana. Es la suma del área del rectángulo más el área del semicírculo.

$$\left. \begin{aligned} S(x, y) &= xy + \frac{\pi \left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = xy + \frac{\pi x^2}{8} \\ y &= 2.5 - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}x \end{aligned} \right\} \Rightarrow S(x) = x \left(2.5 - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}x \right) + \frac{\pi x^2}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(x) = 2.5x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi x^2}{8} = 2.5x - \frac{x^2}{2} - \frac{2\pi}{8}x^2 + \frac{\pi x^2}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(x) = 2.5x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{8}x^2 = 2.5x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)x^2$$

b) Buscamos el máximo de la función área usando la derivada.

$$S(x) = 2.5x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)x^2 \Rightarrow S'(x) = 2.5 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)2x = 2.5 - \left(\frac{4+\pi}{8}\right)2x = 2.5 - \frac{4+\pi}{4}x$$

$$\left. \begin{array}{l} S'(x) = 10 - \frac{4+\pi}{4}x \\ S'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2.5 - \frac{4+\pi}{4}x = 0 \Rightarrow 2.5 = \frac{4+\pi}{4}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 = (4+\pi)x \Rightarrow x = \frac{10}{4+\pi} \simeq 1.4$$

Comprobamos si el punto crítico $x = \frac{10}{4+\pi}$ es un máximo usando la derivada segunda.

$$S'(x) = 2.5 - \frac{4+\pi}{4}x \Rightarrow S''(x) = -\frac{4+\pi}{4} \Rightarrow S''\left(\frac{10}{4+\pi}\right) = -\frac{4+\pi}{4} < 0$$

Como la segunda derivada es negativa la función área tiene un máximo en $x = \frac{10}{4+\pi}$.

Las dimensiones de la ventana con superficie máxima son $x = \frac{10}{4+\pi} \simeq 1.4$ metros en la base,

en la parte recta vertical vale $y = 2.5 - \frac{1}{2} \frac{10}{4+\pi} - \frac{\pi}{4} \frac{10}{4+\pi} = 2.5 - \frac{5}{4+\pi} - \frac{2.5\pi}{4+\pi} \simeq 0.7$ metros y

el semicírculo superior de radio $\frac{x}{2} = \frac{5}{4+\pi} \simeq 0.7$ metros.

Para $x = \frac{10}{4+\pi}$ determinamos el valor del área $S\left(\frac{10}{4+\pi}\right)$.

$$S\left(\frac{10}{4+\pi}\right) = 2.5 \frac{10}{4+\pi} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \left(\frac{10}{4+\pi}\right)^2 = \frac{25}{4+\pi} - \frac{4+\pi}{8} \frac{100}{(4+\pi)^2} =$$

$$= \frac{25}{4+\pi} - \frac{12.5}{4+\pi} = \frac{12.5}{4+\pi} \simeq 1.75$$

Para $x = \frac{10}{4+\pi}$ el área tiene un valor de $\frac{12.5}{4+\pi} \simeq 1.75$ metros cuadrados.

Problema 5 (10 puntos) Dadas las rectas $r: \begin{cases} y-z=0 \\ 2x+2=0 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{3} = z+2 \end{cases}$, obtener:

- a) [5 pts.] La ecuación del plano π paralelo a ambas y que pase por el origen.
 b) [5 pts.] La distancia de un punto de r y de un punto de s al plano π .

a) Estudiamos la posición relativa de las rectas.

$$r: \begin{cases} y-z=0 \\ 2x+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=z \\ 2x=-2 \rightarrow x=-1 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=-1 \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} P_r(-1,0,0) \\ \vec{v}_r=(0,1,1) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1} \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} Q_s(2,0,-2) \\ \vec{u}_s=(-1,3,1) \end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales, por lo que no son paralelas ni coincidentes.

Las rectas se cortan o cruzan. Hallamos el valor del producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$.

$$\overrightarrow{P_r Q_s} = (2,0,-2) - (-1,0,0) = (3,0,-2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (0,1,1) \\ \vec{u}_s = (-1,3,1) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (3,0,-2) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 + 3 + 0 - 9 - 2 - 0 = -8 \neq 0$$

Al ser el producto mixto no nulo las rectas se cruzan.

El plano π paralelo a ambas y que pase por el origen tiene como vectores directores los vectores directores de ambas rectas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_r = (0,1,1) \\ \vec{v} = \vec{u}_s = (-1,3,1) \\ (0,0,0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - y + z - 3x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: -2x - y + z = 0}$$

b) Hallamos la distancia de un punto de r al plano π .

$$\left. \begin{array}{l} P_r(-1,0,0) \in r \\ \pi: -2x - y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(P_r, \pi) = \frac{|-2(-1) - 0 + 0|}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \text{ unidades}$$

Hallamos la distancia de un punto de s al plano π .

$$\left. \begin{array}{l} Q_s(2,0,-2) \in s \\ \pi: -2x - y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(Q_s, \pi) = \frac{|-2(2) - 0 + (-2)|}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \text{ unidades}$$

Problema 6 (10 puntos) Dadas la recta r y el plano π , de ecuaciones $r = \frac{x-5}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$ y $\pi = ax + y - z = b$, con a y b parámetros reales, obtener:

- a) [4 pts.] Los valores del parámetro a para los que r y π se cortan en un único punto y calcular las coordenadas de dicho punto en función del parámetro a .
 b) [6 pts.] Los valores de a y b tales que la recta r esté contenida en el plano π y los valores de los parámetros para que la recta r no corte al plano π .

a) Pasamos la ecuación de la recta a paramétricas.

$$r = \frac{x-5}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-0}{4} \Rightarrow r: \begin{cases} P_r(5,1,0) \\ \vec{v}_r = (1,3,4) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$$

Intentamos resolver el sistema formado por las ecuaciones paramétricas de la recta y la ecuación implícita del plano.

$$\left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 4\lambda \end{cases} \\ \pi = ax + y - z = b \end{array} \right\} \Rightarrow a(5 + \lambda) + 1 + 3\lambda - 4\lambda = b \Rightarrow 5a + a\lambda + 1 - \lambda = b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a-1)\lambda = b-1-5a \Rightarrow \{a-1 \neq 0 \rightarrow a \neq 1\} \Rightarrow \lambda = \frac{b-1-5a}{a-1}$$

Para que el sistema tenga solución y sea única debe ser $a \neq 1$. Para este valor recta y plano se cortan en un único punto.

Terminamos de resolver el sistema y hallamos las coordenadas del punto P de corte de recta y plano.

$$\lambda = \frac{b-1-5a}{a-1} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 + \frac{b-1-5a}{a-1} = \frac{5a-5+b-1-5a}{a-1} = \frac{b-6}{a-1} \\ y = 1 + 3\frac{b-1-5a}{a-1} = 1 + \frac{3b-3-15a}{a-1} = \frac{a-1+3b-3-15a}{a-1} = \frac{-4+3b-14a}{a-1} \\ z = 4\frac{b-1-5a}{a-1} = \frac{4b-4-20a}{a-1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{b-6}{a-1}, \frac{-4+3b-14a}{a-1}, \frac{4b-4-20a}{a-1}\right)$$

Para $a \neq 1$ la recta r y el plano π se cortan en un único punto.

Este punto tiene coordenadas $P\left(\frac{b-6}{a-1}, \frac{-4+3b-14a}{a-1}, \frac{4b-4-20a}{a-1}\right)$.

- b) Para que la recta r esté contenida en el plano deben cumplirse dos cosas: 1ª el vector normal del plano y el director de la recta deben ser perpendiculares (su producto escalar debe ser nulo), 2ª el punto P_r de la recta debe pertenecer al plano (debe cumplir su ecuación).

1ª condición. El plano $\pi = ax + y - z = b$ tiene como vector normal $\vec{n} = (a, 1, -1)$. El vector director de la recta r es $\vec{v}_r = (1, 3, 4)$. El producto $\vec{v}_r \cdot \vec{n}$ debe ser nulo.

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (1, 3, 4)(a, 1, -1) = 0 \Rightarrow a + 3 - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

2ª condición. $P_r(5, 1, 0)$ pertenece al plano $\pi = ax + y - z = b$.

$$\left. \begin{array}{l} a = 1 \rightarrow \pi = x + y - z = b \\ P_r(5, 1, 0) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 5 + 1 - 0 = b \Rightarrow \boxed{b = 6}$$

Los valores tales que la recta r está contenida en el plano son $a = 1$ y $b = 6$.

Para que la recta r no corte al plano π deben ser paralelos y para ello deben cumplirse dos cosas: 1ª el vector normal del plano y el director de la recta deben ser perpendiculares (su producto escalar debe ser nulo), 2ª el punto P_r de la recta **no** debe pertenecer al plano (**no** debe cumplir su ecuación).

1ª condición. Ya la hemos estudiado y hemos obtenido que $a = 1$.

2ª condición. Hemos visto que si $b = 6$ el punto P_r pertenece al plano, por lo que si $b \neq 6$ el punto no pertenece al plano.

Los valores tales que la recta r es paralela al plano son $a = 1$ y $b \neq 6$.

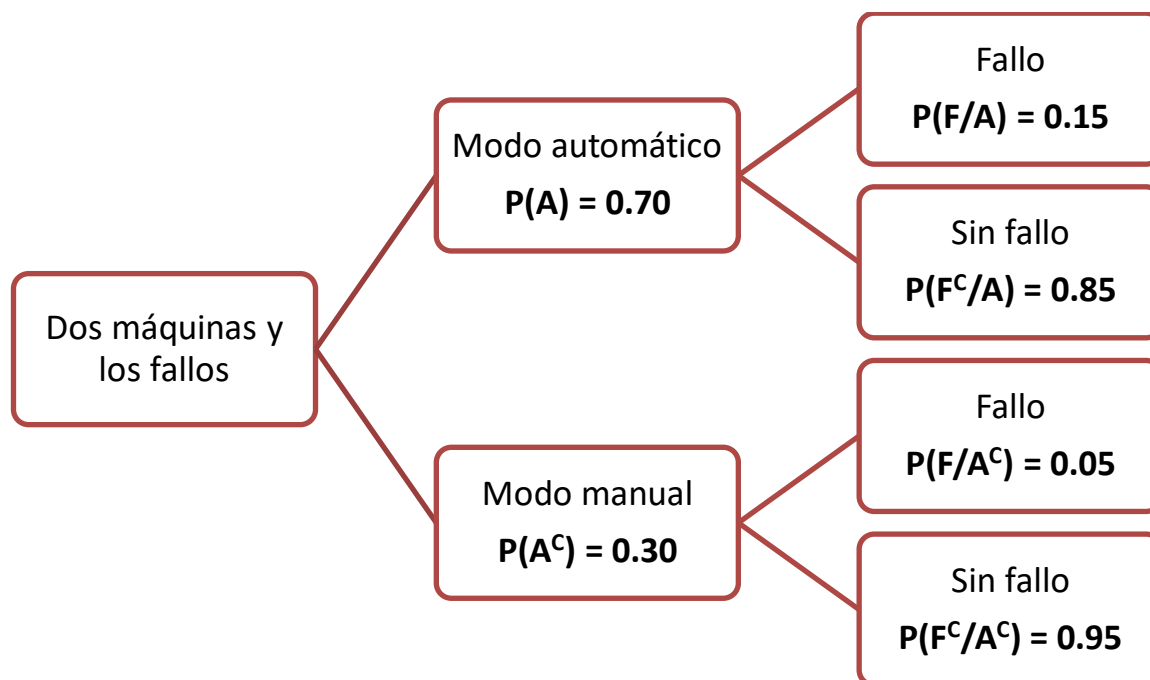
Problema 7 (10 puntos) Una máquina funciona en modo automático el 70% de los días y de modo manual el resto de los días. La probabilidad de que tenga un fallo cuando funciona en modo automático es 0.15. La probabilidad de que tenga un fallo cuando funciona en modo manual es 0.05.

Obtener:

a) [5 pts.] La probabilidad de que no tenga ningún fallo.

b) [5 pts.] Si un día tiene un fallo, ¿cuál es la probabilidad de que haya funcionado en modo manual?

Realizamos un diagrama de árbol para aclarar las probabilidades de los posibles sucesos de este experimento aleatorio.



a) Nos piden calcular $P(F^c)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(F^c) = P(A)P(F^c/A) + P(A^c)P(F^c/A^c) = 0.7 \cdot 0.85 + 0.3 \cdot 0.95 = \boxed{0.88}$$

b) Nos piden calcular $P(A^c/F)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A^c/F) = \frac{P(A^c \cap F)}{P(F)} = \frac{P(A^c)P(F/A^c)}{1 - P(F^c)} = \frac{0.30 \cdot 0.05}{1 - 0.88} = \boxed{0.125}$$

Problema 8. Un usuario de internet sabe que en el 60% de las compras que realiza no tiene ningún problema. Si en un día realiza 8 compras, calcular

a) [4 pts.] La probabilidad de que, como máximo en 6, no tenga ningún problema.

b) [3 pts.] La probabilidad de que no tenga problemas al menos en 4 compras.

c) [3 pts.] La probabilidad de que no tenga problemas en más de 3 y como máximo en 7 compras.

Es un problema de distribución binomial.

X = Número de compras sin problemas de 8 compras.

El número de repeticiones es $n = 8$. La probabilidad de éxito es la probabilidad de realizar una compra sin problemas $p = 0.60$.

$X = B(8, 0.6)$

a) Nos piden calcular $P(X \leq 6)$. Utilizamos el suceso contrario.

$$\begin{aligned} P(X \leq 6) &= 1 - P(X > 6) = 1 - [P(X = 7) + P(X = 8)] = \\ &= 1 - \left[\binom{8}{7} 0.6^7 \cdot 0.4^1 + \binom{8}{8} 0.6^8 \cdot 0.4^0 \right] = 1 - [8 \cdot 0.6^7 \cdot 0.4^1 + 1 \cdot 0.6^8 \cdot 1] = \boxed{0.8936} \end{aligned}$$

b) Nos piden calcular $P(X \geq 4)$. Utilizamos el suceso contrario.

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= 1 - P(X < 4) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)] = \\ &= 1 - \left[\binom{8}{0} 0.6^0 \cdot 0.4^8 + \binom{8}{1} 0.6^1 \cdot 0.4^7 + \binom{8}{2} 0.6^2 \cdot 0.4^6 + \binom{8}{3} 0.6^3 \cdot 0.4^5 \right] = \\ &= 1 - [1 \cdot 1 \cdot 0.4^8 + 8 \cdot 0.6 \cdot 0.4^7 + 28 \cdot 0.6^2 \cdot 0.4^6 + 56 \cdot 0.6^3 \cdot 0.4^5] = \boxed{0.8263} \end{aligned}$$

c) Nos piden calcular $P(3 < X \leq 7)$.

$$\begin{aligned} P(3 < X \leq 7) &= P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) = \\ &= \binom{8}{4} 0.6^4 \cdot 0.4^4 + \binom{8}{5} 0.6^5 \cdot 0.4^3 + \binom{8}{6} 0.6^6 \cdot 0.4^2 + \binom{8}{7} 0.6^7 \cdot 0.4^1 = \\ &= 70 \cdot 0.6^4 \cdot 0.4^4 + 56 \cdot 0.6^5 \cdot 0.4^3 + 28 \cdot 0.6^6 \cdot 0.4^2 + 8 \cdot 0.6^7 \cdot 0.4 = \boxed{0.8095} \end{aligned}$$

Este ejercicio también se puede resolver utilizando la tabla de la binomial en lugar de las

fórmulas de la probabilidad $X = B(n, p) \Rightarrow P(X = m) = \binom{n}{m} p^m \cdot q^{n-m}$.