



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL

CURSO 2017–2018

MATERIA: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

(3)

Convocatoria:

- Se debe elegir sólo una de las opciones (A o B)
- Cada una de las preguntas tendrá una puntuación máxima de 2,5 puntos

OPCIÓN A

1. De ocho a once de la mañana, se estima que un número de teléfono de cada diez está apagado. Una empresa de servicios telefónicos realiza 400 llamadas a distintos teléfonos en ese tramo horario. Justificando la respuesta:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que, a lo sumo, estén apagados 40 teléfonos?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que estén apagados 40 teléfonos?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que estén apagados entre 40 y 50 teléfonos?

2. Se ha seleccionado una muestra aleatoria de 96 taxis de una ciudad y se ha registrado para cada uno de ellos el número total de kilómetros recorridos durante un día laboral, resultando una media de 240 km, con una desviación típica de 60 km.

- a) A partir de los datos de la muestra anterior determinar un intervalo de confianza al 95% para la distancia media en km recorrida por un taxi en un día.
- b) ¿De qué tamaño debería ser la muestra si se desea estimar la distancia media recorrida en un día con un error menor que 10 km y con confianza del 99%

3. Se quiere cubrir con un espejo el espacio generado al construir un arco moderno de Gaudí, que coincide con el área encerrada entre las funciones $y = -x^2 + 14x - 41$ e $y = 4$ (con las unidades expresadas en metros).

- a) Hacer una gráfica de la superficie que hay que cubrir. Calcular dicha superficie.
- b) El coste del espejo es de 16,25 € el metro cuadrado. A esta cantidad hay que añadir la mano de obra, que es un 24% de lo que cuesta el espejo, más el gasto del transporte, que es de 85 €, ¿a cuánto asciende el coste total?

4. Un asesor fiscal hace declaraciones de la renta a personas físicas y a pymes (pequeñas y medianas empresas). Por cada declaración de persona física cobra 120 €, y emplea 3 horas para recopilar la información necesaria y 1 hora para pasarla a la aplicación informática. Por cada pyme cobra 300 €, y emplea 6 horas en recopilar la información y 4 horas en pasarla a la aplicación. Hay 10 personas físicas y 20 pymes a las que el asesor fiscal está obligado por contrato a hacer sus declaraciones. Durante el tiempo que dura la campaña de la renta el asesor dispone de un total de 360 horas para recopilar información, y 210 horas para usar la aplicación informática. Si quiere maximizar sus ingresos:

- a) Formular el correspondiente problema y representar la región factible.
- b) ¿Cuál es la solución óptima? ¿Y el valor máximo de los ingresos?

OPCIÓN B

1. En los murales frigoríficos de un supermercado, se encuentran a la venta 250 yogures de la marca A, 150 de la marca B y 100 de la marca C. La probabilidad de que un yogur esté caducado es del 2% para la marca A, 3% para la marca B y 15% para la marca C. Se elige un yogur al azar:

- Dibujar un diagrama en árbol que represente los posibles resultados de la elección.
- Calcular la probabilidad de que el yogur elegido esté caducado.
- Si se ha cogido un yogur y está caducado, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca A?

2. Un hospital realiza un estudio sobre la edad de las personas que son atendidas en el servicio de urgencias. Con este fin se selecciona una muestra de 225 personas elegidas al azar entre la ingresadas en urgencias durante el último año, observándose que 81 de estas personas tienen más de 70 años:

- Construir un intervalo para estimar con un nivel de confianza del 90% la proporción de personas mayores de 70 años atendidas en urgencias.
- Si se mantiene la misma proporción muestral, con un nivel de confianza del 95%, ¿cuál debería ser el tamaño de la muestra para estimar la proporción de mayores de 70 años con un error menor que 0,03?

3. En un periodo de 10 años, la audiencia de una determinada serie de una televisión autonómica, expresada en decenas de miles de personas, siguió la función:

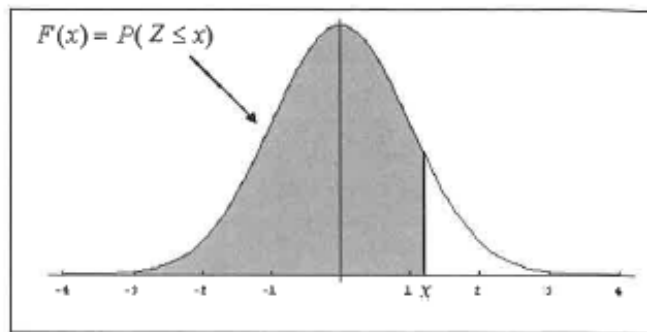
$$A(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & 0 \leq x < 2 \\ \frac{-3x + 30}{4}, & 2 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

donde x representa el número de años transcurridos desde la primera emisión. Justificando las respuestas:

- ¿Es continua la función $A(x)$? ¿Cuándo crece y cuándo decrece esta función?
- ¿Cuándo obtuvo la serie su máxima audiencia y cuántos espectadores tuvo en ese momento?
- ¿Cuál fue la audiencia al principio de la emisión de la serie? Si se decide dejar de emitir cuando la audiencia sea de 15000 personas, ¿en qué momento se dejaría de emitir?

4. Un kiosko vende periódicos, libros y revistas. Los periódicos se venden a 1€, las revistas a 5€ y los libros a 12€. El importe total de las ventas realizadas la semana pasada ascendió a 1500 €. Por cada 3 revistas se vendieron 10 periódicos, y el importe de la venta de libros fue igual a la cuarta parte del importe total de las ventas de periódicos y revistas.

- Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.
- Resolver el sistema anterior: ¿cuántos libros, periódicos y revistas vendió el kiosko la semana pasada?



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. De ocho a once de la mañana, se estima que un número de teléfono de cada diez está apagado. Una empresa de servicios telefónicos realiza 400 llamadas a distintos teléfonos en ese tramo horario. Justificando la respuesta:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que, a lo sumo, estén apagados 40 teléfonos?
 b) ¿Cuál es la probabilidad de que estén apagados 40 teléfonos?
 c) ¿Cuál es la probabilidad de que estén apagados entre 40 y 50 teléfonos?

Es un problema de distribución binomial.

X = Número de teléfonos apagados de un grupo de 400.

La probabilidad de que un teléfono esté apagado es $p = 1/10$. El número de repeticiones es $n = 400$.

$X = B(400, 0.1)$

Como el número de repeticiones es muy alto aproximamos esta distribución a una normal de media

$$\mu = np = 400 \cdot \frac{1}{10} = 40 \text{ y desviación típica } \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{400 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10}} = 6.$$

La distribución binomial X se aproxima con una normal $Y = N(40, 6)$.

Esta aproximación es buena pues $np = 40 > 5$ y $nq = 400 \cdot \frac{9}{10} = 360 > 5$.

- a) Nos piden calcular $P(X \leq 40)$.

$$P(X \leq 40) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \leq 40.5) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} = P\left(Z \leq \frac{40.5 - 40}{6}\right) = P(Z \leq 0.08) = \boxed{0.5319}$$

- b) Nos piden calcular $P(X = 40)$.

$$P(X = 40) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(39.5 \leq Y \leq 40.5) =$$

$$= \{\text{Tipificamos}\} = P\left(\frac{39.5 - 40}{6} \leq Z \leq \frac{40.5 - 40}{6}\right) = P(-0.08 \leq Z \leq 0.08) =$$

$$= P(Z \leq 0.08) - P(Z \leq -0.08) = P(Z \leq 0.08) - P(Z \geq 0.08) =$$

$$= P(Z \leq 0.08) - [1 - P(Z \leq 0.08)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en} \\ \text{la tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.5319 - 1 + 0.5319 = \boxed{0.0638}$$

También podemos calcular la probabilidad sin hacer uso de la aproximación a la normal, pero dado que los números son muy grandes necesitamos usar la herramienta web Wolfram Alpha.

$$P(X = 40) = \binom{400}{40} 0.1^{40} \cdot 0.9^{360} = \{\text{Usando la web Wolfram Alpha}\} = \boxed{0.0664}$$

El valor aproximado obtenido con la normal es muy parecido al valor real.

c) Nos piden calcular $P(40 \leq X \leq 50)$.

$$P(40 \leq X \leq 50) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(39.5 \leq Y \leq 50.5) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Tipificamos} \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} = P\left(\frac{39.5 - 40}{6} \leq Z \leq \frac{50.5 - 40}{6}\right) = P(-0.08 \leq Z \leq 1.75) =$$

$$= P(Z \leq 1.75) - P(Z \leq -0.08) = P(Z \leq 1.75) - P(Z \geq 0.08) =$$

$$= P(Z \leq 1.75) - [1 - P(Z \leq 0.08)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en} \\ \text{la tabla } N(0, 1) \end{array} \right\} = 0.9599 - [1 - 0.5319] = \boxed{0.4918}$$

2. Se ha seleccionado una muestra aleatoria de 96 taxis de una ciudad y se ha registrado para cada uno de ellos el número total de kilómetros recorridos durante un día laboral, resultando una media de 240 km, con una desviación típica de 60 km.

- a) A partir de los datos de la muestra anterior determinar un intervalo de confianza al 95% para la distancia media en km recorrida por un taxi en un día.
 b) ¿De qué tamaño debería ser la muestra si se desea estimar la distancia media recorrida en un día con un error menor que 10 km y con confianza del 99%

- a) X = Número total de kilómetros recorridos por un taxi durante un día laboral.

$$X \approx N(\mu, 60)$$

$$n = 96 \rightarrow \bar{x} = 240$$

Hallamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza del 95%.

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la} \\ \text{tabla de } N(0,1) \end{array} \right\} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

Calculo el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{60}{\sqrt{96}} = 12.002$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (240 - 12.002, 240 + 12.002) = (227.998, 252.002)$$

- b) Hallamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza del 99%.

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 0,01 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,005 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la} \\ \text{tabla de } N(0,1) \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$$

Utilizamos la fórmula del error con un valor de 10.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 10 = 2.575 \cdot \frac{60}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.575 \cdot 60}{10} \Rightarrow n = \left(\frac{2.575 \cdot 60}{10} \right)^2 = 238.7025$$

Para que el error sea menor de 10 kilómetros el tamaño de la muestra debe ser 239 taxis o más.

3. Se quiere cubrir con un espejo el espacio generado al construir un arco moderno de Gaudí, que coincide con el área encerrada entre las funciones $y = -x^2 + 14x - 41$ e $y = 4$ (con las unidades expresadas en metros).

a) Hacer una gráfica de la superficie que hay que cubrir. Calcular dicha superficie.

b) El coste del espejo es de 16,25 € el metro cuadrado. A esta cantidad hay que añadir la mano de obra, que es un 24% de lo que cuesta el espejo, más el gasto del transporte, que es de 85 €, ¿a cuánto asciende el coste total?

a) Determinamos el vértice de la parábola

$$y = -x^2 + 14x - 41 \Rightarrow x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-14}{-2} = 7 \Rightarrow y_v = -7^2 + 14(7) - 41 = 8$$

El vértice de la parábola es el punto V(7, 8).

Determinamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$\left. \begin{array}{l} y = -x^2 + 14x - 41 \\ y = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 = -x^2 + 14x - 41 \Rightarrow x^2 - 14x + 45 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{14 \pm \sqrt{(-14)^2 - 4(1)(45)}}{2} = \frac{14 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{14+4}{2} = 9 = x \\ \frac{14-4}{2} = 5 = x \end{cases}$$

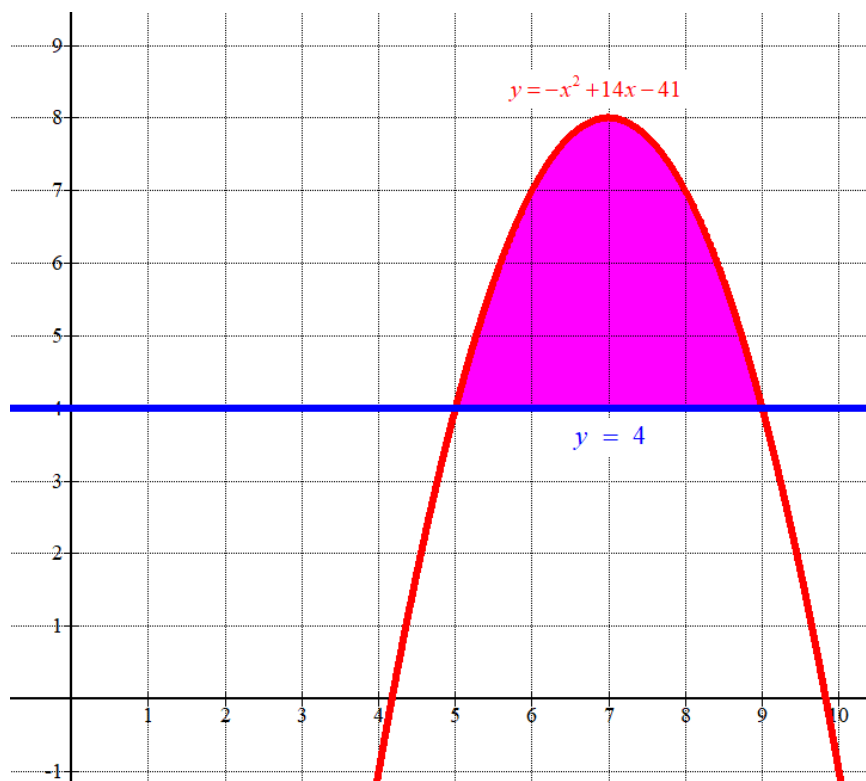
Dibujamos la gráfica de la parábola y la recta.

$$y = -x^2 + 14x - 41$$

x	$y = -x^2 + 14x - 41$
5	4
7	8
9	4

$$y = 4$$

x	$y = 4$
5	4
9	4



Esta superficie tiene un área que calculamos como la integral definida entre 5 y 9 de la diferencia entre las dos funciones.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_5^9 -x^2 + 14x - 41 - 4dx = \int_5^9 -x^2 + 14x - 45dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 7x^2 - 45x \right]_5^9 = \\ &= \left[-\frac{9^3}{3} + 7 \cdot 9^2 - 45 \cdot 9 \right] - \left[-\frac{5^3}{3} + 7 \cdot 5^2 - 45 \cdot 5 \right] = \boxed{\frac{32}{3} \approx 10.66 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

b) El coste del material necesario para fabricar el espejo es $\frac{32}{3} \cdot 16.25 = \frac{520}{3} \approx 173.33 \text{ €}$. La mano de

obra cuesta un 24% de lo que cuesta el material: $\frac{24 \cdot \frac{520}{3}}{100} = 41.6 \text{ €}$ y el transporte tiene un coste fijo de 85 €. Sumamos todo y tenemos el coste total del espejo:

$$173.33 + 41.6 + 85 = \boxed{299.93 \text{ €}}$$

4. Un asesor fiscal hace declaraciones de la renta a personas físicas y a pymes (pequeñas y medianas empresas). Por cada declaración de persona física cobra 120 €, y emplea 3 horas para recopilar la información necesaria y 1 hora para pasarla a la aplicación informática. Por cada pyme cobra 300 €, y emplea 6 horas en recopilar la información y 4 horas en pasarla a la aplicación. Hay 10 personas físicas y 20 pymes a las que el asesor fiscal está obligado por contrato a hacer sus declaraciones. Durante el tiempo que dura la campaña de la renta el asesor dispone de un total de 360 horas para recopilar información, y 210 horas para usar la aplicación informática. Si quiere maximizar sus ingresos:

- a) Formular el correspondiente problema y representar la región factible.
b) ¿Cuál es la solución óptima? ¿Y el valor máximo de los ingresos?

- a) Llamemos x = número de declaraciones de la renta a personas físicas e y = número de declaraciones de la renta a pymes.

Realizamos una tabla para ordenar toda la información proporcionada en el ejercicio.

	Horas recopilar información	Horas para informatizarla	Ingresos
Nº declaraciones personas (x)	$3x$	x	$120x$
Nº declaraciones pymes	$6y$	$4y$	$300y$
TOTALES	$3x + 6y$	$x + 4y$	$120x + 300y$

Las restricciones del problema planteado son:

Hay 10 personas físicas y 20 pymes a las que el asesor fiscal está obligado por contrato a hacer sus declaraciones $\rightarrow x \geq 10; y \geq 20$

Durante el tiempo que dura la campaña de la renta el asesor dispone de un total de 360 horas para recopilar información, y 210 horas para usar la aplicación informática $\rightarrow$

$$3x + 6y \leq 360; x + 4y \leq 210$$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 10 \\ y \geq 20 \\ 3x + 6y \leq 360 \\ x + 4y \leq 210 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 10 \\ y \geq 20 \\ x + 2y \leq 120 \\ x + 4y \leq 210 \end{array} \right\}$$

La función que deseamos maximizar son los ingresos: $I(x, y) = 120x + 300y$

Representamos las rectas asociadas a las restricciones, hallando una tabla de valores para cada una y averiguando los puntos de corte.

$$\left. \begin{array}{l} x + 4y = 210 \\ x + 2y = 120 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 4y = 210 \\ x = 120 - 2y \end{array} \right\} \Rightarrow 120 - 2y + 4y = 210 \Rightarrow 2y = 90 \Rightarrow y = 45 \Rightarrow$$

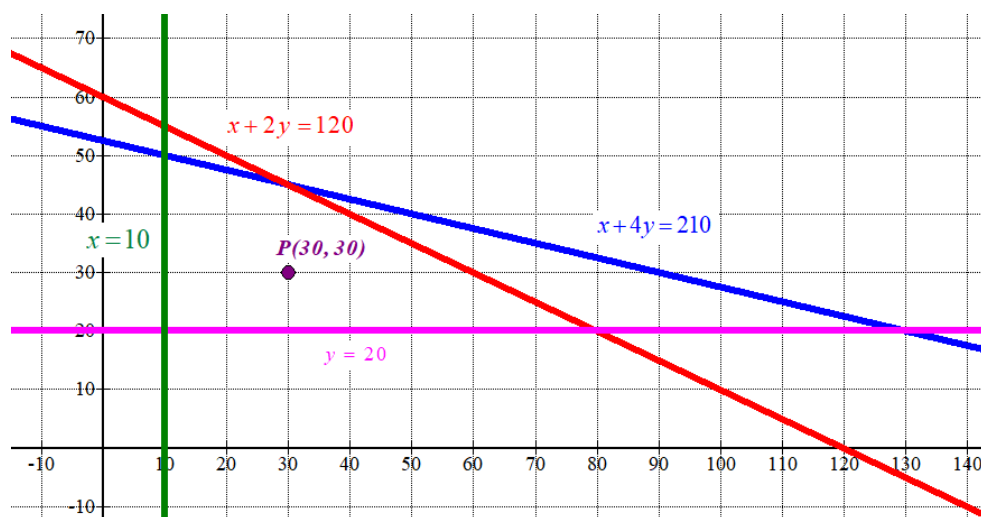
$$\Rightarrow x = 120 - 2 \cdot 45 = 30 \Rightarrow A(30, 45)$$

$$x + 2y = 120$$

x	$y = \frac{120 - x}{2}$
10	55
30	45
80	20

$$x + 4y = 210$$

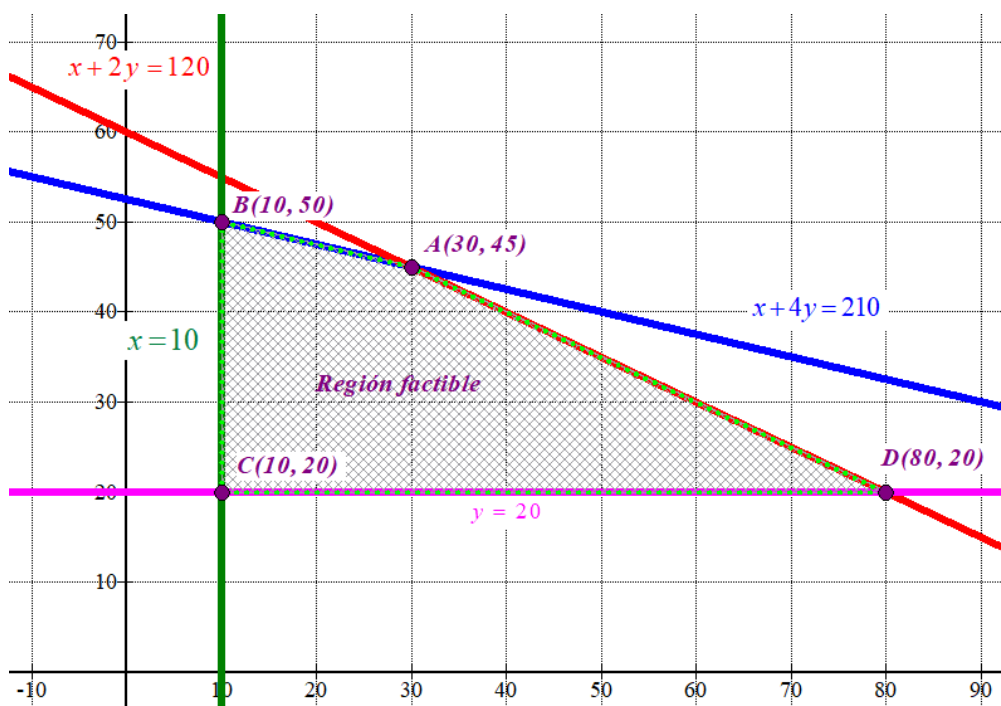
x	$y = \frac{210 - x}{4}$
10	50
30	45
130	20



Comprobamos que el punto $P(30, 30)$ cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 30 \geq 10 \\ 30 \geq 20 \\ 30 + 2 \cdot 30 \leq 120 \\ 30 + 4 \cdot 30 \leq 210 \end{array} \right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

La región factible es la zona rayada del dibujo. Indicamos las coordenadas de sus vértices.



b) Valoremos los ingresos en cada vértice de la región factible.

$$A(30, 45) \rightarrow I(30, 45) = 120 \cdot 30 + 300 \cdot 45 = 17100 \text{ ¡máximo!}$$

$$B(10, 50) \rightarrow I(10, 50) = 120 \cdot 10 + 300 \cdot 50 = 16200$$

$$C(10, 20) \rightarrow I(30, 45) = 120 \cdot 10 + 300 \cdot 20 = 7200$$

$$D(80, 20) \rightarrow I(80, 20) = 120 \cdot 80 + 300 \cdot 20 = 15600$$

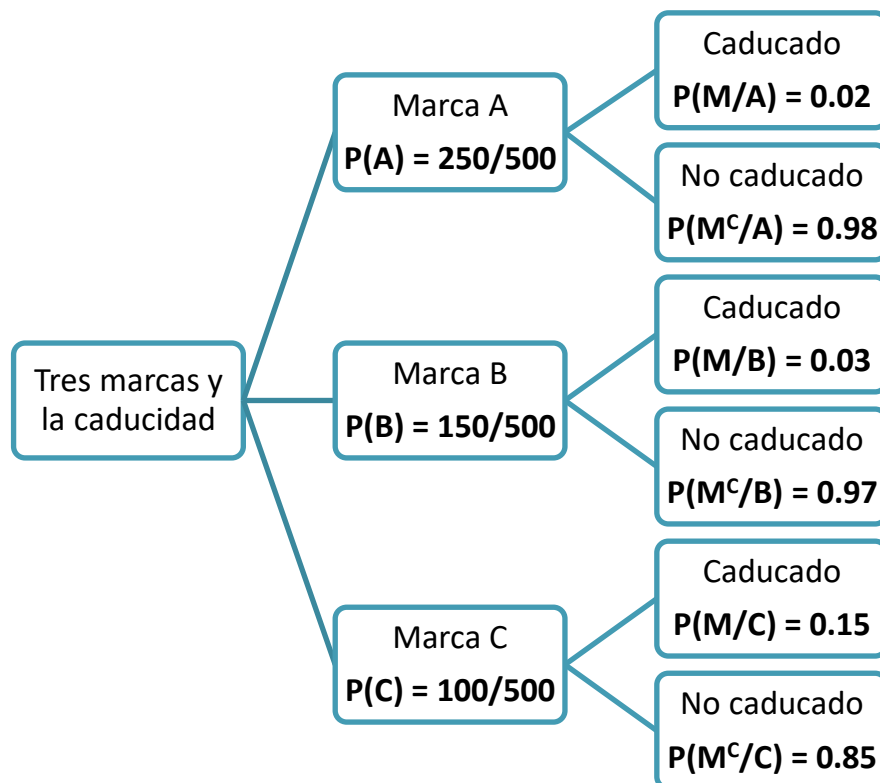
Los máximos ingresos se obtiene en $A(30, 45)$, que significa hacer 30 declaraciones a personas físicas y 45 declaraciones a pymes. Con un ingreso máximo de 17 100 euros.

OPCIÓN B

1. En los murales frigoríficos de un supermercado, se encuentran a la venta 250 yogures de la marca A, 150 de la marca B y 100 de la marca C. La probabilidad de que un yogur esté caducado es del 2% para la marca A, 3% para la marca B y 15% para la marca C. Se elige un yogur al azar:

- Dibujar un diagrama en árbol que represente los posibles resultados de la elección.
- Calcular la probabilidad de que el yogur elegido esté caducado.
- Si se ha cogido un yogur y está caducado, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca A?

- Llamamos A, B y C a los sucesos “elegir un yogur de la marca A, B y C” respectivamente. Llamamos M al suceso “el yogur está caducado”. Realizamos un diagrama de árbol.



- Nos piden calcular $P(M)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(M) = P(A)P(M/A) + P(B)P(M/B) + P(C)P(M/C) =$$

$$= \frac{250}{500} \cdot 0.02 + \frac{150}{500} \cdot 0.03 + \frac{100}{500} \cdot 0.15 = \boxed{0.049}$$

- Nos piden calcular $P(A/M)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{P(A)P(M/A)}{P(M)} = \frac{\frac{250}{500} \cdot 0.02}{0.049} = \boxed{\frac{10}{49} \approx 0.2041}$$

2. Un hospital realiza un estudio sobre la edad de las personas que son atendidas en el servicio de urgencias. Con este fin se selecciona una muestra de 225 personas elegidas al azar entre la ingresadas en urgencias durante el último año, observándose que 81 de estas personas tienen más de 70 años:

a) Construir un intervalo para estimar con un nivel de confianza del 90% la proporción de personas mayores de 70 años atendidas en urgencias.

b) Si se mantiene la misma proporción muestral, con un nivel de confianza del 95%, ¿cuál debería ser el tamaño de la muestra para estimar la proporción de mayores de 70 años con un error menor que 0,03?

a) La proporción de personas con más de 70 años en la muestra es $p = \frac{81}{225} = 0.36$

Hallamos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 90 %.

$$1 - \alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 0.10 \rightarrow \alpha/2 = 0.05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.64 + 1.65}{2} = \mathbf{1.645}$$

Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.36 \cdot 0.64}{225}} = 0.05264$$

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.36 - 0.05264, 0.36 + 0.05264) = (0.30736, 0.41264).$$

b) Hallamos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 95 %.

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$$

Igualamos el error a 0.03.

$$0.03 = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.36 \cdot 0.64}{n}} \Rightarrow \frac{0.03}{1.96} = \sqrt{\frac{0.2304}{n}} \Rightarrow \left(\frac{0.03}{1.96}\right)^2 = \frac{0.2304}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{0.2304}{\left(\frac{0.03}{1.96}\right)^2} = 983.4496$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 984 personas.

3. En un periodo de 10 años, la audiencia de una determinada serie de una televisión autonómica, expresada en decenas de miles de personas, siguió la función:

$$A(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & 0 \leq x < 2 \\ \frac{-3x + 30}{4}, & 2 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

donde x representa el número de años transcurridos desde la primera emisión. Justificando las respuestas:

- ¿Es continua la función $A(x)$? ¿Cuándo crece y cuándo decrece esta función?
- ¿Cuándo obtuvo la serie su máxima audiencia y cuántos espectadores tuvo en ese momento?
- ¿Cuál fue la audiencia al principio de la emisión de la serie? Si se decide dejar de emitir cuando la audiencia sea de 15000 personas, ¿en qué momento se dejaría de emitir?

a) La función en el intervalo $[0, 2)$ es $A(x) = x^2 + 2$ que es una función polinómica y continua.

La función en el intervalo $(2, 10]$ es $A(x) = \frac{-3x + 30}{4} = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{2}$ que es una función polinómica y continua.

Estudiamos la continuidad en $x = 2$.

- Existe $A(2) = \frac{-3 \cdot 2 + 30}{4} = 6$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 2^-} A(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 + 2 = 2^2 + 2 = 6$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 2^+} A(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-3x + 30}{4} = \frac{-3 \cdot 2 + 30}{4} = 6$
- Los tres valores son iguales: $\lim_{x \rightarrow 2^-} A(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} A(x) = A(2) = 6$

Al cumplirse las cuatro condiciones la función es continua en $x = 2$.

La función es continua en $[0, 10]$.

Para estudiar el crecimiento o decrecimiento de la función utilizamos la derivada.

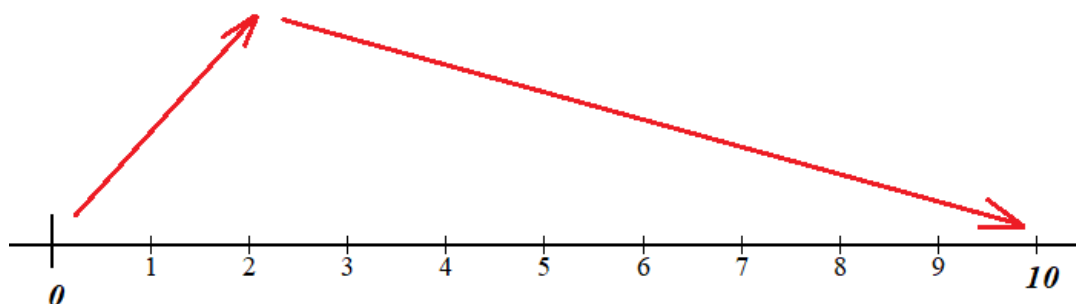
$$A'(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 2 \\ -\frac{3}{4}, & 2 \leq x \leq 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ -\frac{3}{4} = 0 \rightarrow \text{¡Imposible!} \end{cases}$$

$$A'(x) = 0$$

En el intervalo $[0, 2)$ la derivada es $A'(x) = 2x$ que siempre es positiva ($A'(1) = 2 > 0$). El vértice de la parábola está en $x = 0$ que está en el extremo del intervalo de definición. La función crece en $[0, 2)$.

En el intervalo $(2, 10]$ la derivada es $A'(x) = -\frac{3}{4} < 0$ que siempre es negativa. La función decrece en $(2, 10]$.

La función es continua y sigue el esquema siguiente.



- b) Observando el esquema anterior y dado que la función es continua la función tiene un valor máximo absoluto en $x = 2$. Como $A(2) = 6$ podemos afirmar que la máxima audiencia fue en el segundo año con 60 000 personas de audiencia.
- c) Como $A(0) = 0^2 + 2 = 2$. La audiencia inicial fue de 20 000 personas.

Buscamos cuando $A(x) = 1.5$.

$$A(x) = 1.5 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2 = 1.5 \rightarrow x^2 = -0.5 \rightarrow x = \sqrt{-0.5} \rightarrow \text{¡Imposible!} \\ \frac{-3x + 30}{4} = 1.5 \rightarrow -3x + 30 = 6 \rightarrow -3x = -24 \rightarrow x = \frac{-24}{-3} = 8 \in [2, 10] \end{cases}$$

La audiencia alcanza un valor de 15 000 personas en el octavo año, como la audiencia en el intervalo $(2, 10]$ decrece podemos decir que a partir del octavo año la audiencia baja de 15 000 personas. Se deja de emitir la serie a partir del año 8.

4. Un kiosko vende periódicos, libros y revistas. Los periódicos se venden a 1€, las revistas a 5€ y los libros a 12€. El importe total de las ventas realizadas la semana pasada ascendió a 1500 €. Por cada 3 revistas se vendieron 10 periódicos, y el importe de la venta de libros fue igual a la cuarta parte del importe total de las ventas de periódicos y revistas.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) Resolver el sistema anterior: ¿cuántos libros, periódicos y revistas vendió el kiosko la semana pasada?

a) Llamamos “x” al número de periódicos vendidos, “y” al número de libros y “z” al número de revistas.

Establecemos las ecuaciones asociadas a la información proporcionada.

“Los periódicos se venden a 1€, las revistas a 5€ y los libros a 12€. El importe total de las ventas realizadas la semana pasada ascendió a 1500 €” $\rightarrow x + 12y + 5z = 1500$.

“Por cada 3 revistas se vendieron 10 periódicos” $\rightarrow$

Re vistas	Periódicos
z	x
3	10

$\Rightarrow 10z = 3x$.

“El importe de la venta de libros fue igual a la cuarta parte del importe total de las ventas de periódicos y revistas” $\rightarrow 12y = \frac{x + 5z}{4}$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + 12y + 5z = 1500 \\ 10z = 3x \\ 12y = \frac{x + 5z}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 12y + 5z = 1500 \\ 10z = 3x \\ 48y = x + 5z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 12y + 5z = 1500 \\ 3x - 10z = 0 \\ x - 48y + 5z = 0 \end{array} \right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left. \begin{array}{l} x + 12y + 5z = 1500 \\ 3x - 10z = 0 \\ x - 48y + 5z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 12y + 5z = 1500 \\ 3x - 10z = 0 \\ x = 48y - 5z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 48y - 5z + 12y + 5z = 1500 \\ 3(48y - 5z) - 10z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 60y = 1500 \\ 144y - 15z - 10z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = \frac{1500}{60} = 25 \\ 144y - 25z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 144 \cdot 25 - 25z = 0 \Rightarrow 144 - z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = 144} \Rightarrow \boxed{x = 48 \cdot 25 - 5 \cdot 144 = 480}$$

La solución del sistema es $x = 480$, $y = 25$, $z = 144$.

Se han vendido 480 periódicos, 25 libros y 144 revistas.