



Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad Curso 2023-2024

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN

El examen consta de **10 problemas**, cuyo valor es de **2 puntos cada uno**. El estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregirá el que ocupe el sexto lugar.

Este documento es un modelo de examen que tiene carácter orientativo y puede servir como referencia para el estudiante que realice las pruebas. No obstante, además de los problemas contenidos en este modelo de examen, podrán plantearse otros tipos de ejercicios que se encuadren en lo establecido en los saberes básicos que aparecen en el currículo de la materia publicados en el Real Decreto 243/2022, de 5 de abril por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato, así como en los acuerdos recogidos en el acta de la reunión de la Comisión celebrada el 7 de noviembre de 2023.

PROBLEMA 1

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Halla la matriz X que sea solución de la ecuación matricial $A \cdot X + X = B$. Justifica la respuesta.

PROBLEMA 2

Una tienda de telefonía vende baterías externas, auriculares y tarjetas de memoria a 20, 10 y 15 euros, respectivamente. Los precios de coste de estos productos son de 15 euros cada batería externa, 8 euros cada auricular y 12 euros cada tarjeta de memoria. Cierta semana, en la que el total de los productos le costó 1210 euros, obtuvo unos beneficios de 340 euros. Calcular, justificando la respuesta, el número de unidades que vendió de cada producto si sabemos que en total vendió 100 (las mismas que compró).

PROBLEMA 3

Sean A y B las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & x & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & x & -1 \\ 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Determinar, justificando la respuesta para qué valores de x no existe la inversa de $A \cdot B$.

(1.5 puntos)

b) Calcular la inversa de $A \cdot B$ para $x = 0$.

(0.5 puntos)

PROBLEMA 4

Un taller de confección textil produce dos categorías de trajes: de señora y de caballero. Dispone de material para fabricar diariamente 850 trajes de señora y 650 de trajes de caballero. Si tiene que fabricar diariamente como máximo 1000 unidades totales y el beneficio obtenido por cada traje de señora es de 150 euros y de 200 euros por traje el caballero, ¿Cuántos trajes de cada tipo han de fabricarse diariamente para hacer máximos los beneficios? ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? Justifica las respuestas.

PROBLEMA 5

El precio de cada acción de una determinada empresa, x , oscila entre 1 y 5 euros. La facturación de dicha empresa en bolsa (en miles de euros) depende del precio de la acción y viene dada por la función:

$$F(x) = \begin{cases} A + Bx & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 2 - Bx + Ax^2 & \text{si } 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

Se sabe que, para un precio de la acción de 1 euro, la facturación es 4 (miles de euros) y que la función es continua. Determina, justificando la respuesta, las constantes A y B.

PROBLEMA 6

Durante la crecida de un río, la Confederación Hidrográfica del Tajo ha estimado que el caudal (en m^3/s) ha variado durante las primeras 6 horas de acuerdo con la función:

$$C(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 20 \quad (0 \leq t \leq 6)$$

Se pide, justificando las respuestas:

- Estudiar el crecimiento y decrecimiento del caudal a lo largo de esas 6 horas.
- Determinar las horas de máximo y mínimo caudal, Calcular los caudales máximo y mínimo.

PROBLEMA 7

Se considera la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

Se pide, justificando las respuestas:

- Determinar sus asíntotas (horizontales, verticales y oblicuas). **(1.5 puntos)**
- Calcular $f'(x)$ y hallar el valor de $f'(2)$. **(0.5 puntos)**

PROBLEMA 8

En un bosque hay 50 abetos, 30 cipreses y 120 pinos. Una enfermedad provocada por una oruga afecta a 25 abetos, 9 cipreses y 48 pinos. Se pide, justificando las respuestas:

- Calcular la probabilidad de que un árbol elegido al azar esté infectado por la oruga, si se sabe que es un pino. **(1 punto)**
- Calcular la probabilidad de que un árbol elegido al azar esté infectado por la oruga. **(1 punto)**

PROBLEMA 9

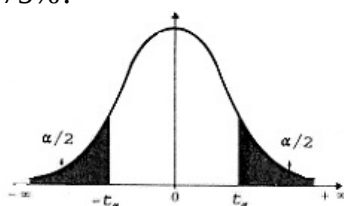
Dos fabricantes de pan, A y B, hacen un estudio de su cuota de mercado en una ciudad. El proveedor A suministra al 23% de los establecimientos alimentarios. Además, se sabe que el 35% de los establecimientos son abastecidos por A o por B y que el 5% son suministrados por A y B simultáneamente. Se pide, justificando la respuesta:

- ¿Qué porcentaje de establecimientos reciben el pan fabricado por B? **(1 punto)**
- Si sabemos que un establecimiento es abastecido por A, ¿qué probabilidad hay de también reciba el pan fabricado por B? **(1 punto)**

PROBLEMA 10

Con el fin de estimar la proporción de empresas de una determinada ciudad que reciclan el papel usado, se selecciona una muestra de 400 de ellas, resultando que 336 reciclan el papel que utilizan. Se pide, justificando las respuestas:

- Calcular un intervalo de confianza al 95% para la proporción de empresas que recicla. **(1.5 puntos)**
- A la vista del intervalo, ¿podemos asegurar que el porcentaje de empresas que reciclan supera el 75%? **(0.5 puntos)**



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0		2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

SOLUCIONES

PROBLEMA 1

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Halla la matriz X que sea solución de la ecuación matricial $A \cdot X + X = B$. Justifica la respuesta.

Despejamos X de la ecuación matricial y determinamos la expresión de X .

$$A \cdot X + X = B \Rightarrow (A + I) X = B \Rightarrow X = (A + I)^{-1} B$$

$$\begin{aligned} A + I &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \\ |A + I| &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 2 = -2 \neq 0. \text{ Existe la inversa.} \\ (A + I)^{-1} &= \frac{\text{Adj}((A + I)^T)}{|A + I|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}{-2} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$X = (A + I)^{-1} B \Rightarrow X = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8-1 & 8 \\ 4-1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & -4 \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 2

Una tienda de telefonía vende baterías externas, auriculares y tarjetas de memoria a 20, 10 y 15 euros, respectivamente. Los precios de coste de estos productos son de 15 euros cada batería externa, 8 euros cada auricular y 12 euros cada tarjeta de memoria. Cierta semana, en la que el total de los productos le costó 1210 euros, obtuvo unos beneficios de 340 euros. Calcular, justificando la respuesta, el número de unidades que vendió de cada producto si sabemos que en total vendió 100 (las mismas que compró).

Llamamos “x” al número de baterías externas que vendió, “y” al número de auriculares y “z” al número de tarjetas que vendió.

“Los precios de coste de estos productos son de 15 euros cada batería externa, 8 euros cada auricular y 12 euros cada tarjeta de memoria. Cierta semana, en la que el total de los productos le costó 1210 euros” $\rightarrow 15x + 8y + 12z = 1210$.

“Los precios de coste de estos productos son de 15 euros cada batería externa (la vende a 20 €), 8 euros cada auricular (lo vende a 10 €) y 12 euros cada tarjeta de memoria (la vende a 15 €).

Cierta semana, en la que el total de los productos le costó 1210 euros, obtuvo unos beneficios de 340 euros” $\rightarrow (20 - 15)x + (10 - 8)y + (15 - 12)z = 340$.

“En total vendió 100 unidades” $\rightarrow x + y + z = 100$.

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 15x + 8y + 12z = 1210 \\ (20 - 15)x + (10 - 8)y + (15 - 12)z = 340 \\ x + y + z = 100 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 15x + 8y + 12z = 1210 \\ 5x + 2y + 3z = 340 \\ x + y + z = 100 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} 15x + 8y + 12z = 1210 \\ \Rightarrow 5x + 2y + 3z = 340 \\ z = 100 - x - y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 15x + 8y + 12(100 - x - y) = 1210 \\ 5x + 2y + 3(100 - x - y) = 340 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 15x + 8y + 1200 - 12x - 12y = 1210 \\ 5x + 2y + 300 - 3x - 3y = 340 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x - 4y = 10 \\ 2x - y = 40 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x - 4y = 10 \\ 2x - 40 = y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x - 4(2x - 40) = 10 \Rightarrow 3x - 8x + 160 = 10 \Rightarrow -5x = -150 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{-150}{-5} = 30} \Rightarrow \boxed{y = 2 \cdot 30 - 40 = 20} \Rightarrow \boxed{z = 100 - 30 - 20 = 50}$$

Se vendieron 30 baterías externas, 20 auriculares y 50 tarjetas de memoria.

PROBLEMA 3

Sean A y B las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & x & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & x & -1 \\ 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) Determinar, justificando la respuesta para qué valores de x no existe la inversa de $A \cdot B$. **(1.5 puntos)**
 b) Calcular la inversa de $A \cdot B$ para $x = 0$. **(0.5 puntos)**

a) Hallamos la expresión de $A \cdot B$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & x & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x & -1 \\ 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & x-2 & -1-x \\ x & -2x+2x+1 & 2+x^2-1 \\ 0 & -x+1 & 1-1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & x-2 & -1-x \\ x & 1 & x^2+1 \\ 0 & 1-x & 0 \end{pmatrix}$$

Para que no exista la inversa de $A \cdot B$ su determinante debe ser nulo.

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} -1 & x-2 & -1-x \\ x & 1 & x^2+1 \\ 0 & 1-x & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + x(-1-x)(1-x) - 0 - 0 + 1 \cdot (x^2+1)(1-x) =$$

$$= x(-1-x)(1-x) + (x^2+1)(1-x) = (1-x)[x(-1-x) + x^2+1] = (1-x)(-x-x^2+x^2+1)$$

$$|A \cdot B| = (1-x)(1-x) = (1-x)^2$$

$$|A \cdot B| = 0 \Rightarrow (1-x)^2 = 0 \Rightarrow 1-x = 0 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

Para $x = 1$ no existe la inversa de $A \cdot B$.

b) Para $x = 0$ la matriz queda $A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 + 1 = 1 \neq 0. \text{ Existe la inversa.}$$

$$(A \cdot B)^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B)^{-1} = \frac{Adj((A \cdot B)^T)}{|A \cdot B|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 4

Un taller de confección textil produce dos categorías de trajes: de señora y de caballero. Dispone de material para fabricar diariamente 850 trajes de señora y 650 de trajes de caballero. Si tiene que fabricar diariamente como máximo 1000 unidades totales y el beneficio obtenido por cada traje de señora es de 150 euros y de 200 euros por traje el caballero, ¿Cuántos trajes de cada tipo han de fabricarse diariamente para hacer máximos los beneficios? ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? Justifica las respuestas.

Llamemos “ x ” al número de trajes de señora fabricados en 1 día e “ y ” al número de trajes de caballero fabricados en 1 día.

Deseamos maximizar los beneficios, que se expresan con la función: $B(x, y) = 150x + 200y$.

Las restricciones son:

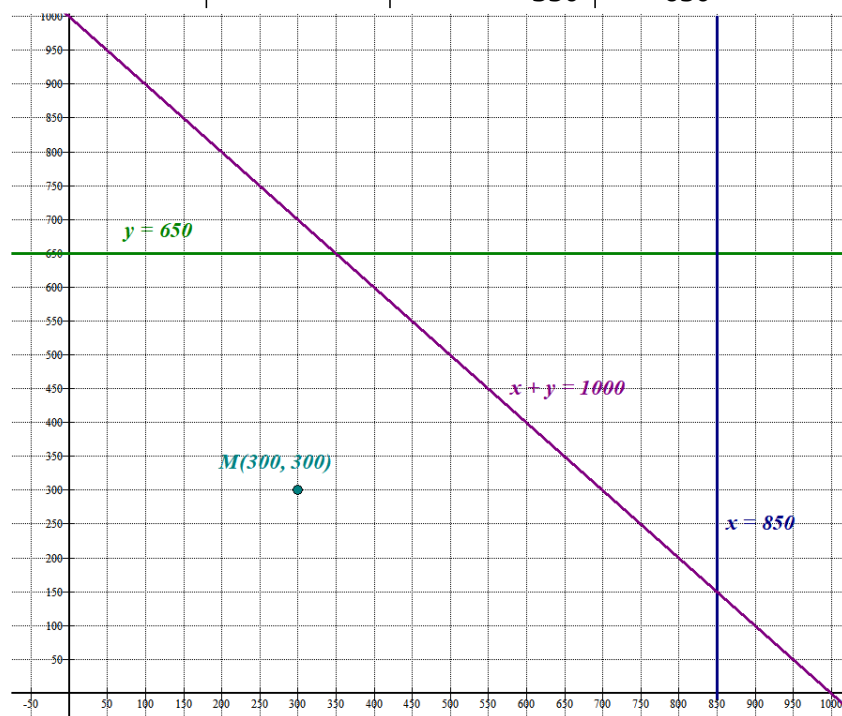
- “Dispone de material para fabricar diariamente 850 trajes de señora y 650 de caballero”
 $\rightarrow x \leq 850 \quad y \leq 650$
- “Tiene que fabricar diariamente como máximo 1000 unidades totales” $\rightarrow x + y \leq 1000$

Añadimos la restricción de que el número de trajes no puede ser negativo y se resumen en:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 850 \\ y \leq 650 \\ x + y \leq 1000 \end{array} \right\}$$

Dibujemos las rectas asociadas a las restricciones.

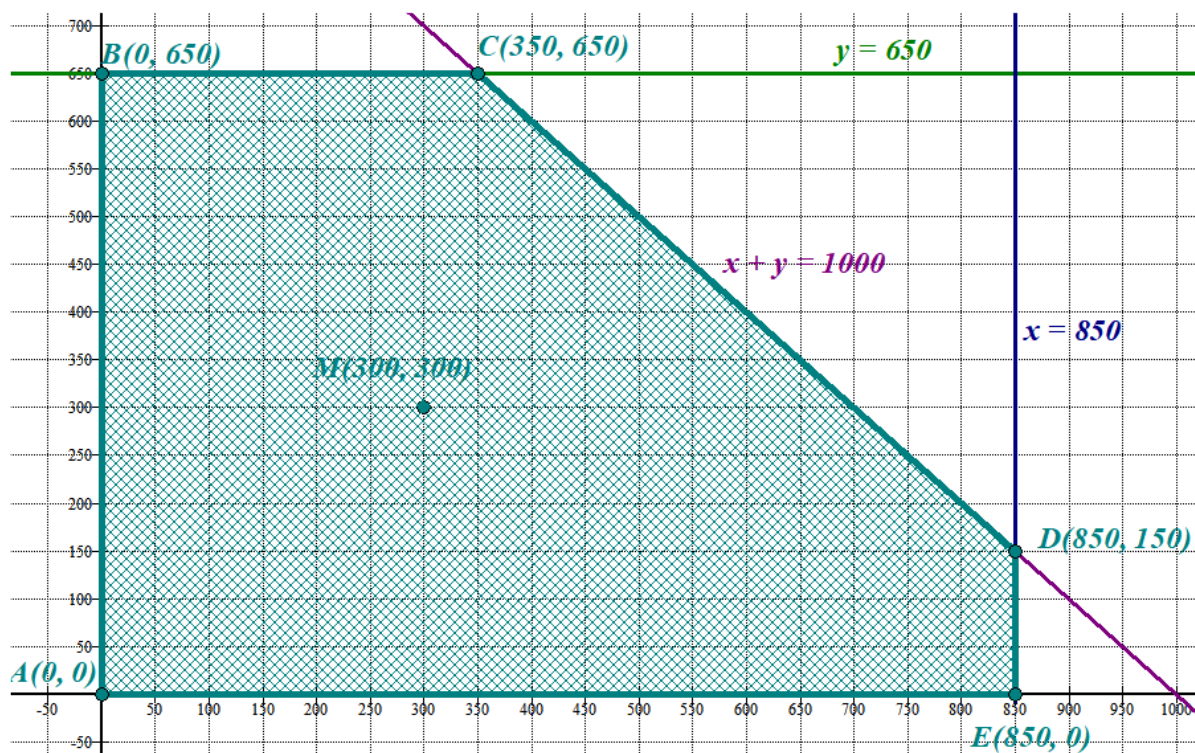
$x = 850$	y	x	$y = 650$	x	$y = 1000 - x$
850	0	0	650	0	1000
850	150	350	650	850	150
				350	650



Probamos si el punto $M(300, 300)$ cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 300 \geq 0 \\ 650 \geq 0 \\ 300 \leq 850 \\ 300 \leq 650 \\ 300 + 300 \leq 1000 \end{array} \right\}$$

Las cumple todas, por lo que la región factible es la limitada por los ejes de coordenadas OX y OY, las tres rectas dibujadas y que contiene al punto $M(300, 300)$. Coloreamos esta región e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 150x + 200y$ en cada uno de los vértices y determinamos donde se alcanza el máximo beneficio.

$$A(0, 0) \rightarrow B(0, 0) = 0$$

$$B(0, 650) \rightarrow B(0, 650) = 0 + 130000 = 130000$$

$$C(350, 650) \rightarrow B(350, 650) = 52500 + 130000 = 182500$$

$$D(850, 150) \rightarrow B(850, 150) = 127500 + 30000 = 157500$$

$$E(850, 0) \rightarrow B(850, 0) = 127500 + 0 = 127500$$

El máximo beneficio se obtiene en el punto $C(350, 650)$. Significa fabricar 350 trajes de señora y 650 de caballero.

El máximo beneficio es de 182500 €.

PROBLEMA 5

El precio de cada acción de una determinada empresa, x , oscila entre 1 y 5 euros. La facturación de dicha empresa en bolsa (en miles de euros) depende del precio de la acción y viene dada por la función:

$$F(x) = \begin{cases} A + Bx & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 2 - Bx + Ax^2 & \text{si } 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

Se sabe que, para un precio de la acción de 1 euro, la facturación es 4 (miles de euros) y que la función es continua. Determina, justificando la respuesta, las constantes A y B .

Como para un precio de la acción de 1 euro la facturación es de 4 mil euros, esto significa que

$$F(1) = 4 \Rightarrow \boxed{A + B = 4}$$

Para que la función sea continua en $x = 2$ debe cumplirse:

- Existe $F(2) = A + 2B$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 2^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} A + Bx = A + 2B$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 2^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2 - Bx + Ax^2 = 2 - 2B + 4A$
- Los tres valores deben ser iguales. $A + 2B = 2 - 2B + 4A \Rightarrow \boxed{-3A + 4B = 2}$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones.

$$\left. \begin{matrix} -3A + 4B = 2 \\ A + B = 4 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} -3A + 4B = 2 \\ A = 4 - B \end{matrix} \right\} \Rightarrow -3(4 - B) + 4B = 2 \Rightarrow -12 + 3B + 4B = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7B = 14 \Rightarrow \boxed{B = 2} \Rightarrow \boxed{A = 4 - 2 = 2}$$

Los valores buscados son $A = B = 2$.

PROBLEMA 6

Durante la crecida de un río, la Confederación Hidrográfica del Tajo ha estimado que el caudal (en m^3/s) ha variado durante las primeras 6 horas de acuerdo con la función:

$$C(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 20 \quad (0 \leq t \leq 6)$$

- a) Estudiar el crecimiento y decrecimiento del caudal a lo largo de esas 6 horas.
 b) Determinar las horas de máximo y mínimo caudal, Calcular los caudales máximo y mínimo.

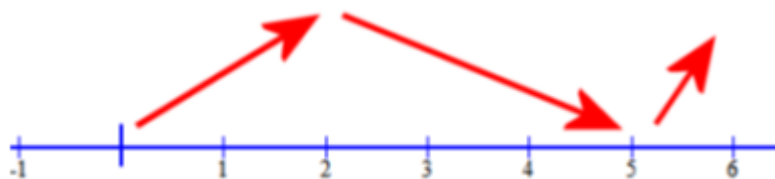
a) Derivamos la función $C(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 20 \Rightarrow C'(t) = 6t^2 - 42t + 60$

Igualemos a cero para determinar los puntos críticos de la función.

$$C'(t) = 0 \Rightarrow 6t^2 - 42t + 60 = 0 \Rightarrow t^2 - 7t + 10 = 0 \Rightarrow t = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{7+3}{2} = 5 \\ \frac{7-3}{2} = 2 \end{cases}$$

Veamos cual es máximo y cual mínimo estudiando el signo de la derivada antes de 2, entre 2 y 5 y después de 5.

- En $(0, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $C'(1) = 6 - 42 + 60 = 22 > 0$ la función crece.
- En $(2, 5)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $C'(3) = 54 - 126 + 60 = -12 < 0$ la función decrece.
- En $(5, 6)$ tomamos $x = 5,5$ y la derivada vale $C'(5,5) = 6 \cdot 30,25 - 231 + 60 = 10,5 > 0$ la función crece.



El caudal aumenta de 0 a 2 horas, disminuye de 2 a 5 horas y crece de 5 a 6 horas.

- b) Valoramos el caudal en los momentos inicial y final, es decir, 0 horas y 6 horas.

$$C(0) = 20 \qquad C(6) = 432 - 21 \cdot 36 + 360 + 20 = 56$$

El máximo relativo en caudal se produce a las 2 horas y el mínimo relativo a las 5 horas.
 Veamos el caudal en esas horas.

$$C(2) = 16 - 84 + 120 + 20 = 72 \qquad C(5) = 250 - 525 + 300 + 20 = 45$$

Comparando los cuatro valores de caudal obtenidos en el momento inicial, final y en los puntos críticos observamos que la hora de mínimo caudal es la hora 0 y la de máximo caudal es a las 2 horas.

$$\left. \begin{array}{l} C(0) = 20 \text{ Mínimo} \\ C(2) = 72 \text{ Máximo} \\ C(5) = 45 \\ C(6) = 56 \end{array} \right\}$$

El caudal máximo es de $72 \text{ m}^3/\text{s}$ y el mínimo es de $20 \text{ m}^3/\text{s}$.

PROBLEMA 7

Se considera la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

Se pide, justificando las respuestas:

- a) Determinar sus asíntotas (horizontales, verticales y oblicuas). **(1.5 puntos)**
 b) Calcular $f'(x)$ y hallar el valor de $f'(2)$. **(0.5 puntos)**

- a) El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{1\}$

Asíntota vertical. $x = a$.

Como el dominio es $\mathbb{R} - \{1\}$ comprobamos el valor de los límites de la función cuando se acerca al valor excluido del dominio.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = \frac{1^2 - 1 + 1}{1 - 1} = \frac{1}{0} = \infty$$

La recta $x = 1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - x + 1}{x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1 - x^2 + x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x - 1} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La asíntota oblicua es $y = x$.

- b) Calculamos la derivada de la función.

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x - 1)(x - 1) - 1 \cdot (x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 2x - x + 1 - x^2 + x - 1}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$$

Calculamos el valor de la derivada en $x = 2$.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{2^2 - 2 \cdot 2}{(2 - 1)^2} = \frac{0}{1} = 0$$

PROBLEMA 8

En un bosque hay 50 abetos, 30 cipreses y 120 pinos. Una enfermedad provocada por una oruga afecta a 25 abetos, 9 cipreses y 48 pinos. Se pide, justificando las respuestas:

- a) Calcular la probabilidad de que un árbol elegido al azar esté infectado por la oruga, si se sabe que es un pino. **(1 punto)**
b) Calcular la probabilidad de que un árbol elegido al azar esté infectado por la oruga. **(1 punto)**

- a) Utilizamos la regla de Laplace y el teorema de Bayes para obtener la probabilidad pedida.

$$P(\text{Esté infectado, sabiendo que es un pino}) = \frac{\text{número de pinos infectados}}{\text{número de pinos}} = \frac{48}{120} = \boxed{0,4}$$

- b) Utilizamos la regla de Laplace para obtener la probabilidad pedida.

$$P(\text{Sea elegido un árbol y esté infectado}) = \frac{\text{nº de árboles infectados}}{\text{nº de árboles}} = \frac{25 + 9 + 48}{50 + 30 + 120} = \frac{82}{200} = \boxed{0,41}$$

PROBLEMA 9

Dos fabricantes de pan, A y B, hacen un estudio de su cuota de mercado en una ciudad. El proveedor A suministra al 23% de los establecimientos alimentarios. Además, se sabe que el 35% de los establecimientos son abastecidos por A o por B y que el 5% son suministrados por A y B simultáneamente. Se pide, justificando la respuesta:

- a) ¿Qué porcentaje de establecimientos reciben el pan fabricado por B? **(1 punto)**
 b) Si sabemos que un establecimiento es abastecido por A, ¿qué probabilidad hay de también reciba el pan fabricado por B? **(1 punto)**

Como se sabe que el 35% de los establecimientos son abastecidos por A o por B entonces el restante 65 % de establecimientos no está abastecido ni por A ni por B.

Realizamos una tabla de contingencia.

	Suministrado por B	No suministrado por B	
Suministrado por A	5		23
No suministrado por A		65	
			100

Completamos la tabla.

	Suministrado por B	No suministrado por B	
Suministrado por A	5	18	23
No suministrado por A	12	65	77
	17	83	100

- a) Reciben el pan fabricado por B el 17 % de los establecimientos.
 b) Hay un 23% de los establecimientos que están suministrados por el fabricante A, y un 5 % de establecimientos suministrados por A y B.

Nos piden calcular $P(B/A)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.05}{0.23} = \boxed{\frac{5}{23} \approx 0.2174}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Llamamos A al suceso “El establecimiento está suministrado por el fabricante A” y B al suceso “El establecimiento está suministrado por el fabricante B”.

Nos dicen que $P(A) = 0.23$, $P(A \cup B) = 0.35$ y $P(A \cap B) = 0.05$

- a) Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cup B) = 0.35 \\ P(A \cap B) = 0.05 \\ P(A) = 0.23 \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{array} \right\} \Rightarrow 0.35 = 0.23 + P(B) - 0.05 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.35 - 0.23 + 0.05 = P(B) \Rightarrow \boxed{0.17 = P(B)}$$

Como $P(B) = 0.17$ el porcentaje de establecimientos suministrados por B es el 17 %.

b) Nos piden calcular $P(B/A)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.05}{0.23} = \boxed{\frac{5}{23} \approx 0.2174}$$

PROBLEMA 10

Con el fin de estimar la proporción de empresas de una determinada ciudad que reciclan el papel usado, se selecciona una muestra de 400 de ellas, resultando que 336 reciclan el papel que utilizan. Se pide, justificando las respuestas:

- a) Calcular un intervalo de confianza al 95% para la proporción de empresas que recicla. **(1 punto)**
 b) A la vista del intervalo, ¿podemos asegurar que el porcentaje de empresas que reciclan supera el 75%? **(1 punto)**

- a) Para un nivel de confianza del 95% obtenemos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,96}$$

La proporción muestral es $\frac{336}{400} = \frac{21}{25} = 0.84$.

Utilizamos la fórmula del error para determinar la amplitud del intervalo de confianza.

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}} \Rightarrow E = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0.84 \cdot 0.16}{400}} = 0.036$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(pr - Error, pr + Error) = (0.84 - 0.036, 0.84 + 0.036) = (0.804, 0.876)$$

Entre el 80.4% y el 87.6 % de empresas reciclan el papel usado (con un nivel de confianza del 95%)

- b) Si podemos asegurar que el porcentaje de empresas que reciclan supera el 75% pues el intervalo de confianza al 95 % está entre el 80.4 % y el 87.6 %, valores superiores al 75 %.