



UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO PARA MAYORES DE 25 AÑOS

MATEMÁTICAS
CURSO 2022/2023

- Instrucciones:**
- a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
 - b) Tienes que elegir únicamente tres de entre los seis ejercicios propuestos.
 - c) Cada ejercicio se puntuará de 0 a 10 puntos. La calificación será la media aritmética de los tres ejercicios.
 - d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente.
 - e) No se permite el préstamo de calculadoras. Se permite el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

EJERCICIO 1

- a) [5 puntos] Resuelve la ecuación $\sqrt{6-2x} = \sqrt{3x-2} + 1$ y comprueba el resultado.
- b) [5 puntos] Halla un polinomio $p(x)$ de segundo grado sabiendo que: $p(0) = -10$, es divisible por $x-5$ y el resto de dividirlo por $x+1$ es 12.

EJERCICIO 2

- a) [5 puntos] Resuelve la inecuación $\frac{x+5}{x-3} \leq 2$.
- b) [5 puntos] Determina la posición relativa de la circunferencia de centro $C(2,1)$ y radio 1 con la recta $y - x + 2 = 0$.

EJERCICIO 3

- a) [5 puntos] Resuelve la siguiente ecuación exponencial $5^{2x+1} - 5^{x+2} = 2500$.
- b) [5 puntos] Sabiendo que $\cot g(\alpha) = -\frac{4}{3}$ y $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, halla $\operatorname{sen} \alpha$, $\cos \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$.

EJERCICIO 4

- a) [5 puntos] Sabiendo que $0 < x < \frac{\pi}{2}$, resuelve la ecuación trigonométrica $5\sec(x) - 4\cos(x) = 8$.
- b) [5 puntos] Consideremos el triángulo de vértices $A(1,2)$, $B(-1,2)$ y $C(1,4)$. Halla la ecuación de la recta que pasa por el vértice A y por el punto medio del lado BC.

EJERCICIO 5

- a) [5 puntos] Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \geq 2 \\ 2-x & \text{si } x < 2 \end{cases}$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=2$.
- b) [5 puntos] El perímetro de un rectángulo es de 24 cm y su altura mide 2 cm más que su base. Calcula las dimensiones del rectángulo.

EJERCICIO 6

- a) [5 puntos] Calcula $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 2n + 1} - \sqrt{n^2 + 1})$.
- b) [5 puntos] Halla a y b sabiendo que la gráfica de la función $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ alcanza un punto crítico en $(2, 3)$. Comprueba que se trata de un mínimo relativo.

SOLUCIONES**EJERCICIO 1**

a) [5 puntos] Resuelve la ecuación $\sqrt{6-2x} = \sqrt{3x-2} + 1$ y comprueba el resultado.

b) [5 puntos] Halla un polinomio $p(x)$ de segundo grado sabiendo que: $p(0) = -10$, es divisible por $x-5$ y el resto de dividirlo por $x+1$ es 12.

a) Elevamos al cuadrado la ecuación.

$$\sqrt{6-2x} = \sqrt{3x-2} + 1 \Rightarrow (\sqrt{6-2x})^2 = (\sqrt{3x-2} + 1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6-2x = (\sqrt{3x-2})^2 + 1^2 + 2\sqrt{3x-2} \Rightarrow 6-2x = 3x-2+1+2\sqrt{3x-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5x+7 = 2\sqrt{3x-2} \Rightarrow (-5x+7)^2 = (2\sqrt{3x-2})^2 \Rightarrow 25x^2 + 49 - 70x = 4(3x-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25x^2 + 49 - 70x = 12x - 8 \Rightarrow 25x^2 - 82x + 57 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{82 \pm \sqrt{(-82)^2 - 4(25)(57)}}{2 \cdot 25} = \frac{82 \pm 32}{50} = \begin{cases} \frac{82+32}{50} = \frac{57}{25} = 2.28 \\ \frac{82-32}{50} = 1 \end{cases}$$

Las soluciones obtenidas son $x = 2.28$ y $x = 1$.

Como hemos elevado al cuadrado la ecuación debemos comprobar si realmente las dos soluciones son válidas o no.

¿ $x = 2.28$ es una solución válida?

$$\left. \begin{array}{l} x = 2.28 \\ \sqrt{6-2x} = \sqrt{3x-2} + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} \sqrt{6-2 \cdot 2.28} = \sqrt{3 \cdot 2.28-2} + 1? \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{¿} \sqrt{\frac{36}{25}} = \sqrt{\frac{121}{25}} + 1? \Rightarrow \text{¿} \frac{6}{5} = \frac{11}{5} + 1? \text{ ¡No es cierto!}$$

Al no cumplirse la igualdad la solución $x = 2.28$ no es válida.

¿ $x = 1$ es una solución válida?

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 \\ \sqrt{6-2x} = \sqrt{3x-2} + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{¿} \sqrt{6-2 \cdot 1} = \sqrt{3 \cdot 1-2} + 1? \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{¿} \sqrt{4} = \sqrt{1} + 1? \Rightarrow \text{¿} 2 = 1 + 1? \text{ ¡Si es cierto!}$$

Se cumple la igualdad y la solución $x = 1$ sí es válida.

b) Consideramos el polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$. Si $p(0) = -10$ tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} p(0) = -10 \\ p(x) = ax^2 + bx + c \end{array} \right\} \Rightarrow -10 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = -10$$

El polinomio queda $p(x) = ax^2 + bx - 10$.

Si es divisible por $x - 5$ significa que $p(5) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} p(5) = 0 \\ p(x) = ax^2 + bx - 10 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 - 10 \Rightarrow 10 = 25a + 5b \Rightarrow \boxed{2 = 5a + b}$$

Si el resto de dividirlo por $x + 1$ es 12 significa que $p(-1) = 12$.

$$\left. \begin{array}{l} p(-1) = 12 \\ p(x) = ax^2 + bx - 10 \end{array} \right\} \Rightarrow 12 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) - 10 \Rightarrow \boxed{22 = a - b}$$

Reunimos las dos ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 2 = 5a + b \\ 22 = a - b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 - 5a = b \\ 22 = a - b \end{array} \right\} \Rightarrow 22 = a - (2 - 5a) \Rightarrow 22 = a - 2 + 5a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24 = 6a \Rightarrow \boxed{a = \frac{24}{6} = 4} \Rightarrow \boxed{b = 2 - 5 \cdot 4 = -18}$$

Los valores buscados son: $a = 4$, $b = -18$ y $c = -10$.

El polinomio que cumple lo pedido es $p(x) = 4x^2 - 18x - 10$.

EJERCICIO 2

a) [5 puntos] Resuelve la inecuación $\frac{x+5}{x-3} \leq 2$.

b) [5 puntos] Determina la posición relativa de la circunferencia de centro $C(2,1)$ y radio 1 con la recta $y - x + 2 = 0$.

a) Resolvemos la inecuación.

$$\frac{x+5}{x-3} \leq 2 \Rightarrow \frac{x+5}{x-3} - 2 \leq 0 \Rightarrow \frac{x+5-2x+6}{x-3} \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-x+11}{x-3} \leq 0 \Rightarrow \frac{x-11}{x-3} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x-11 \geq 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 11 \\ x > 3 \end{cases} \rightarrow x \in [11, +\infty)$$

$$\text{o} \quad \begin{cases} x-11 \leq 0 \\ x-3 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 11 \\ x < 3 \end{cases} \rightarrow x \in (-\infty, 3)$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, 3) \cup [11, +\infty)$$

b) Los puntos de la circunferencia de centro $C(2,1)$ y radio 1 tienen ecuación

$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1^2$. Resolvemos el sistema formado por la ecuación de la circunferencia y la ecuación de la recta.

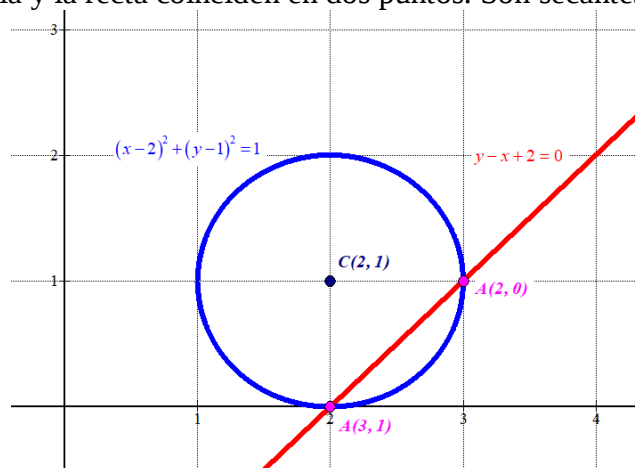
$$\left. \begin{array}{l} y - x + 2 = 0 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = x - 2 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow (x-2)^2 + (x-2-1)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (x-3)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + 4 - 4x + x^2 + 9 - 6x = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 10x + 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 = x \rightarrow y = 3 - 2 = 1 \rightarrow (3,1) \\ \frac{5-1}{2} = 2 = x \rightarrow y = 2 - 2 = 0 \rightarrow (2,0) \end{cases}$$

La circunferencia y la recta coinciden en dos puntos. Son secantes.



EJERCICIO 3

a) [5 puntos] Resuelve la siguiente ecuación exponencial $5^{2x+1} - 5^{x+2} = 2500$.

b) [5 puntos] Sabiendo que $\cot g(\alpha) = -\frac{4}{3}$ y $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, halla $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$ y $tg\alpha$.

a) Hacemos un cambio de variable para resolver la ecuación.

$$5^{2x+1} - 5^{x+2} = 2500 \Rightarrow 5^{2x} \cdot 5^1 - 5^x \cdot 5^2 = 2500 \Rightarrow 5(5^x)^2 - 25(5^x) = 2500 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (5^x)^2 - 5(5^x) = 500 \Rightarrow \{5^x = y\} \Rightarrow y^2 - 5y - 500 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(-500)}}{2} = \frac{5 \pm 45}{2} = \begin{cases} \frac{5+45}{2} = 25 = y \rightarrow 5^x = 25 \rightarrow \boxed{x=2} \\ \frac{5-45}{2} = -20 = y \rightarrow 5^x = -20 \rightarrow \text{¡Imposible!} \end{cases}$$

La solución de la ecuación es $x = 2$.

b) Aplicamos las fórmulas trigonométricas.

$$\cot g(\alpha) = -\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = -\frac{4}{3} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{4}{3}\operatorname{sen}\alpha \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha + \left(-\frac{4}{3}\operatorname{sen}\alpha\right)^2 = 1 \Rightarrow \\ \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha + \frac{16}{9}\operatorname{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{25}{9}\operatorname{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} \text{ como } \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}} \Rightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{-4}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{-4}{5}}$$

Para determinar el valor de tangente hacemos uso de la igualdad $tg\alpha = \frac{1}{\cot g\alpha}$.

$$\boxed{tg\alpha = \frac{1}{\cot g\alpha} = \frac{1}{-\frac{4}{3}} = \frac{-3}{4}}$$

Hemos obtenido que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{-4}{5}$ y $tg\alpha = \frac{-3}{4}$.

EJERCICIO 4

a) [5 puntos] Sabiendo que $0 < x < \frac{\pi}{2}$, resuelve la ecuación trigonométrica

$$5\sec(x) - 4\cos(x) = 8.$$

b) [5 puntos] Consideremos el triángulo de vértices $A(1,2)$, $B(-1,2)$ y $C(1,4)$. Halla la ecuación de la recta que pasa por el vértice A y por el punto medio del lado BC.

a) Aplicamos la fórmula trigonométrica $\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}$ y que $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.

$$5\sec(x) - 4\cos(x) = 8 \Rightarrow 5\frac{1}{\cos(x)} - 4\cos(x) = 8 \Rightarrow 5 - 4\cos^2(x) = 8\cos(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4\cos^2(x) - 8\cos(x) + 5 = 0 \Rightarrow 4\cos^2(x) + 8\cos(x) - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(x) = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4(4)(-5)}}{2 \cdot 4} = \frac{-8 \pm 12}{8} = \begin{cases} \cos(x) = \frac{-8+12}{8} = 0.5 \left\{ 0 < x < \frac{\pi}{2} \right\} \rightarrow \boxed{x = 60^\circ} \\ \cos(x) = \frac{-8-12}{8} = \frac{-20}{8} = -2.5 \rightarrow \text{Imposible!} \end{cases}$$

La solución de la ecuación es $x = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$ radianes.

b) Averiguamos las coordenadas del punto medio del lado BC.

$$P = \frac{(-1,2) + (1,4)}{2} = \frac{(0,6)}{2} = (0,3)$$

Hallamos la ecuación de la recta r que pasa por los puntos $A(1,2)$ y $P(0,3)$.

$$\left. \begin{array}{l} A(1,2) \in r \\ P(0,3) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m = \frac{3-2}{0-1} = -1 \\ P(0,3) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow y-3 = -1(x-0) \Rightarrow \boxed{r: y = -x+3}$$

La recta pedida tiene ecuación $r: y = -x+3$.

EJERCICIO 5

a) [5 puntos] Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \geq 2 \\ 2-x & \text{si } x < 2 \end{cases}, \text{ el eje OX y las rectas } x=0 \text{ y } x=2.$$

b) [5 puntos] El perímetro de un rectángulo es de 24 cm y su altura mide 2 cm más que su base. Calcula las dimensiones del rectángulo.

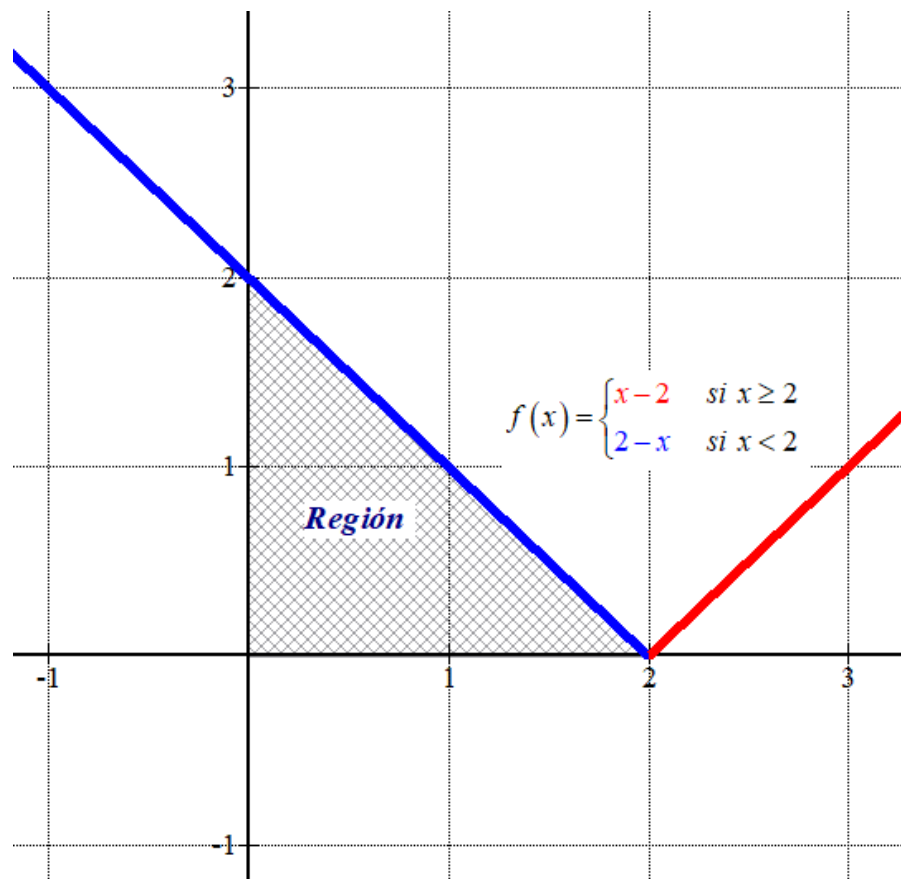
a) La función entre 0 y 2 tiene la expresión $f(x) = 2 - x$. La gráfica de la función solo corta el eje OX en $x = 2$, que está en un extremo de la región.

El área del recinto será el valor absoluto de la integral definida de $f(x) = 2 - x$ entre 0 y 2.

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 2 - x dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \left[2 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} \right] - \left[2 \cdot 0 - \frac{0^2}{2} \right] = 2$$

El área de la región tiene un valor de 2 unidades cuadradas.

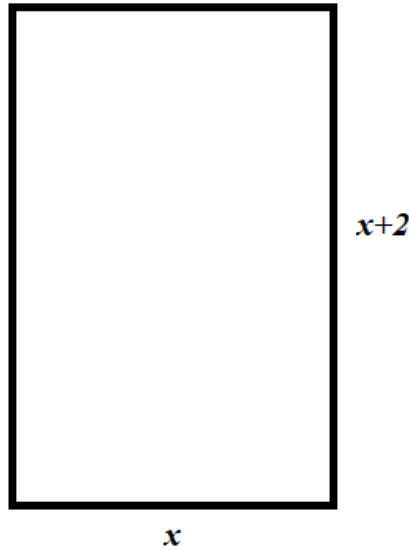
Dibujamos esta región para comprobar la solución obtenida.



La región es un triángulo de base 2 y altura 2, por lo que su área vale

$$\frac{\text{Base} \cdot \text{Altura}}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2 \text{ unidades cuadradas.}$$

b) Dibujamos la situación planteada.



El perímetro del rectángulo es la suma de los lados y sabemos que vale 24 cm.

$$\text{Perímetro} = 24 \Rightarrow 2x + 2(x + 2) = 24 \Rightarrow 2x + 2x + 4 = 24 \Rightarrow 4x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{4} = 5 \text{ cm}$$

El rectángulo tiene 5 cm de base y 7 cm de altura.

EJERCICIO 6

a) [5 puntos] Calcula $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 2n + 1} - \sqrt{n^2 + 1})$.

b) [5 puntos] Halla a y b sabiendo que la gráfica de la función $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ alcanza un punto crítico en $(2, 3)$. Comprueba que se trata de un mínimo relativo.

a) Utilizamos el producto por el conjugado para resolver la indeterminación.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 2n + 1} - \sqrt{n^2 + 1}) &= \infty - \infty = \text{Indeterminación} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 - 2n + 1} - \sqrt{n^2 + 1})(\sqrt{n^2 - 2n + 1} + \sqrt{n^2 + 1})}{\sqrt{n^2 - 2n + 1} + \sqrt{n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 - 2n + 1})^2 - (\sqrt{n^2 + 1})^2}{\sqrt{n^2 - 2n + 1} + \sqrt{n^2 + 1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n + 1 - (n^2 + 1)}{\sqrt{n^2 - 2n + 1} + \sqrt{n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n^2} - 2n + 1 - \cancel{n^2} - 1}{\sqrt{n^2 - 2n + 1} + \sqrt{n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{\sqrt{n^2 - 2n + 1} + \sqrt{n^2 + 1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{-2n}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2} - \frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{\frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \\ &= \frac{-2}{\sqrt{1 - \frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty}} + \sqrt{1 + \frac{1}{\infty}}} = \frac{-2}{\sqrt{1 - 0 + 0} + \sqrt{1 + 0}} = \frac{-2}{2} = \boxed{-1} \end{aligned}$$

b) Si la función $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ alcanza un punto crítico en $(2, 3)$ implica que la función pasa por el punto $(2, 3) \rightarrow f(2) = 3$ y que la derivada se anula para $x = 2 \rightarrow f'(2) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 + ax^2 + b \\ f(2) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 3 = 2^3 + a \cdot 2^2 + b \Rightarrow \boxed{4a + b = -5}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 + 2ax \\ f'(2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 3 \cdot 2^2 + 4a \Rightarrow 4a = -12 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-12}{4} = -3}$$

Sustituimos el valor $a = -3$ en la primera ecuación y obtenemos b .

$$\left. \begin{array}{l} 4a + b = -5 \\ a = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow -12 + b = -5 \Rightarrow \boxed{b = 12 - 5 = 7}$$

Los valores buscados son $a = -3$ y $b = 7$.

La función queda $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$. Obtenemos el signo de la segunda derivada para $x = 2$ y decidimos si es máximo o mínimo relativo.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 7 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6 > 0$$

Como $f''(2) = 6 > 0$ la función presenta un mínimo relativo en (2,3).