

Heu de resoldre tres dels quatre problemes següents. Els quatre problemes puntuen igual i cada un val deu punts. La nota final serà el resultat de dividir entre tres la suma de les puntuacions obtingudes en cada problema. Heu de justificar totes les respostes.

P1) a) Un client d'un supermercat ha pagat un total de 156 € per 24 litres de llet, 6 kg de pernil salat i 12 litres d'oli d'oliva. Calculeu el preu de cada article, sabent que 1 litre d'oli costa el triple que 1 litre de llet i que 1 kg de pernil salat costa igual que 4 litres d'oli més 4 litres de llet. (6 punts)

b) Se sap que el determinant de la matriu $\begin{pmatrix} 3 & a \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ val -4. Quin és el valor de a ? (4 punts)

P2) a) Donada la funció $f(x) = \frac{4x}{2x^2+4}$, calculeu $f'(x)$ (1 punt) i determineu-ne els intervals de creixement i decreixement (3 punts).

b) En un mateix gràfic, representau la paràbola $y = x^2 - 2x$ i la recta d'equació $y = 2x$ i calculeu-ne i assenyalau-ne els punts de tall (3 punts). Calculeu l'àrea del recinte limitat per aquestes dues funcions (3 punts).

P3) a) Se sap que el punt mitjà de dos punts, **P** i **Q**, és el punt $(-1,1,3)$. Si **P** = $(2,-1,3)$, determineu el punt **Q**. (5 punts)

b) Determineu l'equació del pla generat pels punts **A** = $(3,2,1)$, **B** = $(-4,-1,1)$ i **C** = $(-5,-3,-1)$. (5 punts)

P4) En cert curs d'un centre d'ensenyament, el 62,5% dels alumnes varen aprovar Matemàtiques. D'altra banda, entre els que varen aprovar Matemàtiques, el 80% va aprovar també Física. Se sap igualment que només el 33,3% dels que no varen aprovar Matemàtiques varen aprovar Física.

a) Identifiqueu els successos adequats i expressau les dades donades com a probabilitats relacionades amb aquests successos. (2 punts)

b) Quin percentatge va aconseguir aprovar ambdues assignatures a la vegada? (3 punts)

c) Quin va ser el percentatge d'aprovats en l'assignatura de Física? (5 punts)

Criteris específics de correcció

Cada problema val deu punts. La nota final serà el resultat de dividir entre tres la suma de les puntuacions obtingudes en cada problema. Totes les respostes han d'estar justificades.

P1)

- a) Plantejar correctament el sistema a resoldre: 4 punts.
Solució correcta del sistema donant els preus demanats: 2 punts.
Si el sistema plantejat no és correcte i manca solament una de les equacions, però el sistema donat està correctament resolt: màxim 2 punts.
- b) Plantejament de l'equació associada al problema: 2 punts.
Solució correcta de l'equació i solució correcta: 2 punts.
Si tan sols dona el valor correcte sense cap explicació i/o justificació: 0 punts.

P2)

- a) Càlcul correcte de $f'(x)$: 1 punt.
Solució correcta de l'equació $f'(x) = 0$: 1 punt.
Estudi correcte del creixement i decreixement: 2 punts.
- b) Gràfic correcte amb indicació dels punts de tall: 2 punts.
Càlcul dels punts de tall: 1 punt.
Càlcul correcte de l'àrea demanada: 3 punts.
Si les primitives estan ben calculades, però no l'àrea: màxim 1 punt.

P3)

- a) Expressió de l'equació $(P + Q)/2 = (-1, 1, 3)$: 2 punts.
Determinació del punt Q: 3 punts.
- b) Determinació correcta de qualsevol equació del pla: 5 punts.

P4)

- a) Identificar el succés M «aprovar matemàtiques» i dir que $P(M) = 0,625$: 0,5 punts.
Identificar el succés F «aprovar física»: 0,25 punts.
Identificar que ens donen $F|M$ i que $P(F|M) = 0,8$: 0,5 punts.
Identificar que ens donen $F|Mc$ o $F|M^c$ i que $P(F|M^c) = 0,333$: 0,75 punts.
- b) Expressió correcta de la probabilitat total aplicada al problema: 1 punt.
Càlcul correcte de la probabilitat demanada substituint els valors corresponents: 2 punts.
- c) Expressió correcta de la probabilitat total aplicada al problema: 2 punts.
Càlcul correcte de les probabilitats demanades substituint els valors corresponents: 3 punts.

Solucions

Heu de resoldre tres dels quatre problemes següents. Els quatre problemes puntuen igual i cada un val deu punts. La nota final serà el resultat de dividir entre tres la suma de les puntuacions obtingudes en cada problema. Heu de justificar totes les respostes.

P1) a) Un client d'un supermercat ha pagat un total de 156 € per 24 l de llet, 6 kg de pernil salat i 12 l d'oli d'oliva. Calculau el preu de cada article, sabent que 1 l d'oli costa el triple que 1 l de llet i que 1 kg de pernil salat costa igual que 4 l d'oli més 4 l de llet.

(6 punts)

b) Se sap que el determinant de la matriu $\begin{pmatrix} 3 & a \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ val -4. Quin és el valor de a ?

(4 punts)

Solució:

a) Siguin:

$$\begin{aligned} x &= \text{preu d'un l de llet} \\ y &= \text{preu d'un kg de pernil salat} \\ z &= \text{preu d'un l d'oli} \end{aligned}$$

D'aquesta manera, l'enunciat es tradueix en el següent sistema d'equacions lineals:

$$\begin{cases} 24x + 6y + 12z = 156, \\ z = 3x, \\ y = 4x + 4z. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24x + 6y + 12z = 156, \\ 3x - z = 0, \\ 4x - y + 4z = 0. \end{cases}$$

La solució és: $x = 1$, $y = 16$, $z = 3$. Així, els preus d'un l de llet, d'un kg de pernil salat i d'un l d'oli són 1 €, 16 € i 3 €, respectivament.

b) Hem de resoldre l'equació

$$\begin{vmatrix} 3 & a \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 5a = -4,$$

I, per tant, $a = 2$.

P2) a) Donada la funció $f(x) = \frac{4x}{2x^2+4}$, calculau $f'(x)$ (1 punt) i determinau-ne els intervals de creixement i decreixement (3 punts).

b) En un mateix gràfic, representau la paràbola $y = x^2 - 2x$ i la recta d'equació $y = 2x$ i calculau-ne i assenyalau-ne els punts de tall (3 punts). Calculau l'àrea del recinte limitat per aquestes dues funcions (3 punts).

Solució:

- a) Observau que la funció està definida per a tot nombre real. La derivada que ens demanen és la següent:

$$f'(x) = \frac{-8x^2 + 16}{(2x^2 + 4)^2}.$$

Per estudiar els intervals de creixement i decreixement, resollem l'equació $f'(x) = 0$. Per tant:

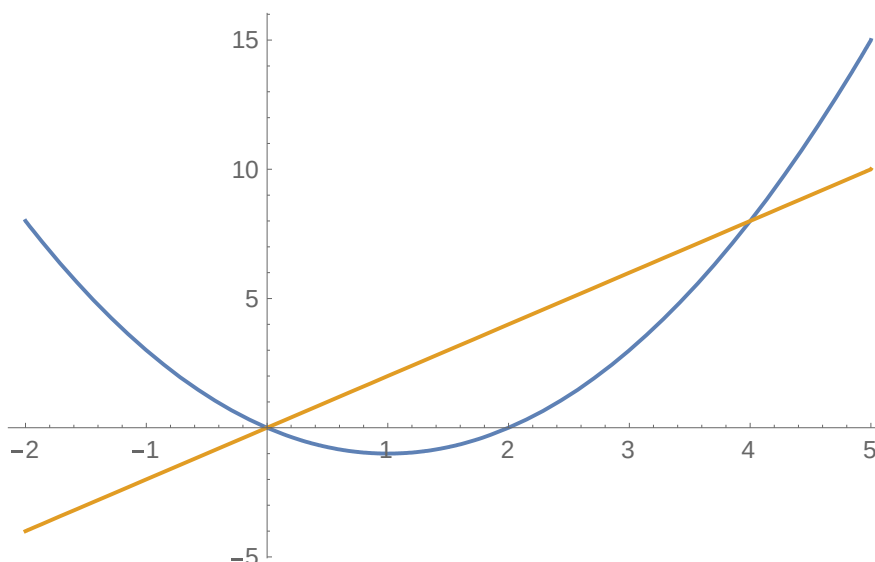
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -8x^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

Estudiam ara el creixement i decreixement:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$+\sqrt{2}$		$+\infty$
<i>Signe $f'(x)$</i>		—		+		—	
<i>$f(x)$</i>		decreixent		creixent		decreixent	
			punt mínim		punt màxim		

La funció decreix a $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (+\sqrt{2}, +\infty)$ i creix a $(-\sqrt{2}, +\sqrt{2})$.

- b) El gràfic demanat, sense els punts de tall, és:



Els punts de tall són $(0,0)$ i $(4,8)$.

Ens demanen calcular la integral $\int_0^4 (2x - (x^2 - 2x)) dx$,

$$\begin{aligned}\int_0^4 (2x - (x^2 - 2x)) \, dx &= \int_0^4 (4x - x^2) \, dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} \right)_0^4 = 2 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} - 0 \\ &= 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}.\end{aligned}$$

P3) a) Se sap que el punt mitjà de dos punts, **P** i **Q**, és el punt $(-1,1,3)$. Si **P** = $(2,-1,3)$, determinau el punt **Q**. (5 punts)

b) Determinau l'equació del pla generat pels punts **A** = $(3,2,1)$, **B** = $(-4,-1,1)$ i **C** = $(-5,-3,-1)$. (5 punts)

Solució:

a) Per calcular el punt **Q** hem de resoldre l'equació:

$$\frac{P+Q}{2} = (-1,1,3),$$

D'on

$$\begin{aligned}\frac{(2,-1,3) + Q}{2} &= (-1,1,3) \Rightarrow (2,-1,3) + Q = 2 \cdot (-1,1,3) = (-2,2,6) \Rightarrow Q \\ &= (-2,2,6) - (2,-1,3) = (-4,3,3).\end{aligned}$$

b) L'equació del pla v donada per:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ -4-3 & -1-2 & 1-1 \\ -5-3 & -3-2 & -1-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ -7 & -3 & 0 \\ -8 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

d'on l'equació és:

$$6x - 14y + 11z - 1 = 0.$$

P4) En cert curs d'un centre d'ensenyament, el 62,5% dels alumnes varen aprovar Matemàtiques. D'altra banda, entre els que varen aprovar Matemàtiques, el 80% va aprovar també Física. Se sap igualment que només el 33,3% dels que no varen aprovar Matemàtiques varen aprovar Física.

a) Identificau els successos adequats i expressau les dades donades com a probabilitats relacionades amb aquests successos. (2 punts)

b) Quin percentatge va aconseguir aprovar ambdues assignatures a la vegada? (3 punts)

c) Quin va ser el percentatge d'aprovat en l'assignatura de Física? (5 punts)

Solució:

- a) Considerem els successos següents:
 $M = \text{«aprovar Matemàtiques»}$, $F = \text{«aprovar Física»}$, i siguin M' , F' els seus complementaris. Les probabilitats que ens donen a l'enunciat són les següents:
 $p(M) = 0,625$, $p(F|M) = 0,8$, $p(F|M') = 0,333$.
- b) $p(M \cap F) = p(M)p(F|M) = 0,625 \cdot 0,8 = 0,5$. El 50% dels alumnes aproven les dues assignatures.
- c) $p(F) = p(F \cap M) + p(F \cap M') = p(M) p(F|M) + p(M') p(F|M') = 0,625 \cdot 0,8 + 0,375 \cdot 0,333 = 0,625$. El 62,5% dels alumnes aproven Física.